de contradicción. En vez de un conocimiento que abarcara y agotase todas estas relaciones de espacio, no obtenemos más que algunos de los resultados, elegidos á voluntad, de estas relaciones, y nos encontramos en el caso de una persona á quien se muestran los diferentes efectos de una máquina, sin permitirle ver el mecanismo interior ni los resortes. Es cierto que nos vemos obligados á reconocer, por virtud del principio de contradicción que lo que Euclides demuestra es tal como lo demuestra, pero no nos enseña por qué es así. De ahí que se experimente casi el mismo sentimiento de desconfianza que se tiene después de haber asistido á una sesión de juegos de prestidigitación, á los cuales se parecen asombrosamente la mayor parte de las demostraciones de Euclides.

Casi siempre se introduce la verdad en ellas por una puertecita de escape, pues resulta por accidente de cualquier circunstancia secundaria. En ciertos casos la prueba *ad absurdum* cierra sucesivamente todas las puertas y no deja abierta más que una sola, por la cual nos vemos obligados á pasar sin otro motivo. En otros casos, como en el teorema de Pitágoras, se tiran líneas sin que se sepa por qué razón, hasta que se advierte luego que eran nudos corredizos que se aprietan de improviso para atrapar el consentimiento del curioso, que trataba de instruirse; éste, todo sorprendido, se ve obligado á admitir una cosa cuya contestura íntima no comprende, hasta tal punto que podría estudiar á Euclides por completo sin llegar á tener una comprensión efectiva de las relaciones del espacio, en lugar de las cuales sólo habría aprendido algunos de sus resultados. Este conocimiento, que hablando con propiedad, es empírico y anticientífico, se asemeja al de un médico que conociera la enfermedad y el remedio, pero ignorase su relación. Todo esto es con-

secuencia de haber rechazado por capricho el procedimiento de demostración y de evidencia propio de un modo de conocimiento, para reeemplazarle á viva fuerza por un método ajeno á su esencia. Esto no impide que la manera de haberlo realizado Euclides, sea digna de la admiración que ha inspirado durante tantos siglos; se llevó tan lejos esta admiración que su manera de tratar las matemáticas se proclamó como un modelo de exposición científica, sobre el cual se procuraba construir todas las demás ciencias, pero luego se ha mudado de opinión sin saber por qué. A mi juicio este método de Euclides en las matemáticas, no es más que un brillante absurdo. Es indudable, sin embargo, que todo grande error, proseguido con intención y método y que además alcanza la aprobación general, ya sea concerniente á la vida, ya á la ciencia, tiene su razón de ser en la filosofía reinante en su época. Los eleáticos fueron los primeros que conocieron la diferencia y hasta el antagonismo (á veces), que media entre el objeto percibido, φαινομενον (fenómeno), y el objeto pensado, νοουμενον (1) (noumeno) é hicieron uso de ella en diversas ocasiones para sus filosofismos y también para sus sofismas. Fueron imitados por los megarenses, los dialécticos, los sofistas, los neoplatónicos y los escépticos. Estos últimos llamaron la atención sobre la apariencia, es decir, el error de los sentidos ó más bien del entendimiento, que transforma los datos de los sentidos en percepciones. La apariencia es lo que nos hace ver muchas veces objetos, á los cuales niega la razón toda certeza, por ejemplo, el bastón que se ve roto en el agua, etc. Se reconoció que no era posible fiarse sin reservas de la intuición de los sentidos, y se dedujo

(1) Conviene olvidar aquí completamente el abuso que hizo Kant de estas expresiones griegas.

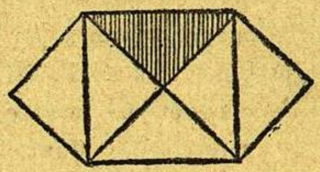
prematuramente que sólo el pensamiento racional y lógico podía dar la verdad, si bien Platón (en el *Parménides*), los megarenses, Pissón y los neoplatónicos, mostraron con ejemplos (de igual manera que lo hizo luego Sexto Empírico), que los razonamientos y los conceptos inducen á error por su parte y pueden dar origen á paralogismos y sofismas que hacen mucho más fácilmente y se disipan con mucho más trabajo que la apariencia en la percepción sensible.

Con todo, aquel racionalismo que se había desarrollado por oposición al empirismo llevó la mejor parte, y con arreglo á estos principios racionalistas trató Euclides las matemáticas, no basando más que los axiomas (por no poder hacer otra cosa) sobre la evidencia intuitiva (φαινομενον) y todo lo demás sobre demostraciones (νοουμενον). Su método continuó en vigor al través de los siglos, y no podía ser de otro modo mientras no se distinguiese la pura intuición *à priori* de la intuición empírica. Proclo, comentador de Euclides, parece, sin embargo, haber reconocido ya esta diferencia, como lo prueba un pasaje que Keplero tradujo al latín en su *De harmonia mundi*, pero Proclo no la dió bastante importancia; presentó la cosa aisladamente, no fue tomada en consideración y no consiguió abrirse camino. Sólo al cabo de dos mil años, las doctrinas de Kant, que están llamadas á producir tan profundas modificaciones en el saber y en la manera de pensar y de obrar de las poblaciones de Europa, introdujeron estas mismas modificaciones en las matemáticas. Ha sido necesario que este pensador eminente viniera á enseñarnos que las intuiciones del espacio y del tiempo se diferencian totalmente de la intuición empírica, que son independientes de toda impresión sensible, de la cual son condición en vez de hallarse condicionadas por ella; en una palabra,

que existen *à priori* y están por tanto á cubierto de toda ilusión de los sentidos: ha sido necesario, repito, que Kant viniera á traernos estas enseñanzas para que podamos comprender hoy que el método lógico de Euclides en matemáticas es una precaución inútil, una muleta para quien tiene las piernas sanas, y que se asemeja al viajero que, caminando de noche, en vez de seguir el camino real que se extiende junto á un río, se mete constantemente por senderos escabrosos considerándose muy feliz con volver á hallar de distancia en distancia el río.

Sólo ahora podemos afirmar con seguridad que lo que se manifiesta á nuestro espíritu como necesario, al ver una figura geométrica, no viene de un dibujo trazado sobre el papel (que puede estar muy mal hecho), ni tampoco de una noción abstracta que la vista de él hace nacer en nuestro pensamiento, sino que se deriva directamente de esa forma de todo conocimiento que poseemos *à priori* en nuestra conciencia; esta forma es siempre el principio de razón. En las matemáticas se manifiesta en calidad de forma de la intuición, es decir, en calidad de espacio como principio de la razón de ser, y su evidencia y su autoridad son tan grandes y tan inmediatas, como las del principio de la razón de conocimiento, ó sea la certeza lógica.

No nos reporta, pues, utilidad alguna el no fiarnos más que de ésta última, ni debemos, por tal razón, abandonar el campo propio de las matemáticas y tratar de comprobar esta ciencia sobre un terreno, como el de los conceptos, que es ageno á ella. Manteniéndonos en el terreno especial de las matemáticas conseguimos la ventaja inmensa de saber al mismo tiempo *que tal cosa es así* y *porqué es de esa manera*; el método de Euclides, por el contrario, separa estas dos clases de conocimiento y nos da la primera, pero nunca la segunda. Aristóteles, en sus *Anal. post.* vol. I, pág. 27, dice admirablemente: *Subtilior autem et præstantior ea est scientia, qûa «quod» aliquid sit, et «cur» sit una simulque intelligimus, non separatim «quod», et «cur» sit.* En física ¿quedamos satisfechos cuando sabemos que tal cosa es, ignorando por qué? No basta saber que el mercurio se eleva á 28 pulgadas en el tubo de Torricelli, si no sabemos al mismo tiempo que esto sucede porque se equilibra con él el peso del aire. Pero en geometría ¿tendremos que contentarnos con conocer esta *cualitas occulta* del círculo, que consiste en que las partes de todas las cuerdas, que se cortan dos á dos en el interior de aquél formen rectángulos iguales? Euclides, en la proposición 35 del libro III, demuestra á la verdad que esto es así, pero nos falta todavía conocer el por qué. De igual manera el teorema de Pitágoras nos enseña una *cualitas occulta* del triángulo rectángulo: la demostración de Euclides, coja y hasta insidiosa, nos abandona cuando llegamos al por qué; la figura adjunta, con ser tan sencilla, nos enseña mucho más que aquella demostración y nos da una convicción íntima y firme de que la propiedad aludida es necesaria y tiene estrecha relación con la esencia misma del triángulo rectángulo.



Se debe poder llegar á una demostración intuitiva de esta especie hasta en el caso en que los catetos sean desiguales, como en general respecto de toda verdad

geométrica posible, pues para descubrir estas verdades se ha partido siempre de un hecho necesario percibido intuitivamente y la demostración ha venido después. No había más que analizar la marcha del pensamiento, al partir de la primera verdad geométrica descubierta para hallar de nuevo la necesidad intuitiva. En general, en la enseñanza de la geometría, prefiero el método analítico al método sintético empleado por Euclides. No niego que aquél presenta grandes dificultades en los casos en que se trata de verdades matemáticas complicadas, pero estas dificultades no son insuperables. En algunos puntos de Alemania se empieza ya á modificar la enseñanza de las matemáticas y á seguir con preferencia el procedimiento analítico. El Sr. Kosack, profesor de matemáticas y de física en el Colegio de Nordhausen, es quien ha defendido más enérgicamente esta reforma, insertando en el programa de exámenes de 6 de Abril de 1852 un proyecto detallado de enseñanza de la geometría según mis principios.

Para corregir el método en las matemáticas es necesario ante todo rechazar ese prejuicio de que la verdad demostrada aventaja en algo á la verdad adquirida intuitivamente, ó que la verdad lógica, basada sobre el principio de contradicción, es superior á la verdad metafísica de evidencia inmediata, y de la que forma parte la intuición pura del espacio.

El contenido del principio de razón es lo más cierto que hay y al mismo tiempo es inexplicable. Este principio, en sus diversas formas, expresa siempre la forma general de todas nuestras representaciones y de todos nuestros conocimientos. Explicar significa remontarse al principio de razón; es indicar en cada caso las relaciones entre representaciones, que dicho principio expresa de una manera general. Es, pues, este principio la fuente primera de toda explicación, sin que él sea susceptible de ser explicado y sin que tenga necesidad de ello, puesto que toda explicación le supone implícitamente y no tiene significación más que por él.

Además, ninguna de sus formas es superior á otra; es igualmente cierto é indemostrable como principio de la razón de ser, ó de *devenir*, ó de obrar, ó de conocer. En cada una de estas formas la relación de causa á efecto, no sólo es una relación necesaria, sino también el origen y el sentido único del concepto de necesidad. No existe otra necesidad que la del efecto, dada la causa, ni existe causa que no cree la necesidad del efecto. Luego con tanta seguridad como el efecto enunciado en la proposición final se desprende del principio de conocimiento contenido en las premisas, la razón de ser en el espacio determina su efecto en el espacio mismo.

Desde que compruebo, por la intuición, la relación, entre estos dos últimos términos, la certeza que consigo es tan completa como cualquier certeza lógica. Cada teorema de geometría expresa una relación análoga, tan perfectamente como cada uno de los doce axiomas, y constituye una verdad metafísica tan inmediatamente cierta—como tal verdad de esta especie—cual el mismo principio de contradicción, que es una verdad metalógica y la base general de toda demostración lógica.

Si se pone en duda la necesidad, intuitivamente expuesta, de las relaciones de espacio que enuncia una proposición geométrica, con el mismo derecho se pueden negar los axiomas, negar que la consecuencia se desprende de las premisas, negar hasta el principio de contradicción, pues éstas son relaciones igualmente indemostrables, evidentes directamente y conocidas *à priori*. Síguese de ahí, que pretender deducir del principio de contradicción, y por virtud de una argumentación lógica, la necesidad intuitivamente cognoscible de las relaciones del espacio, es querer dar á uno, á título de feudo, lo que posee ya á título de propiedad.

Esto es lo que hace Euclides. Obligado por la necesidad, funda sus axiomas, pero nada más que éstos sobre la evidencia inmediata; todas las demás verdades geométricas las prueba lógicamente, una vez sentados los axiomas, ya mostrando su armonía con las condiciones admitidas en el teorema propuesto, ó con un teorema anterior, ya haciendo resaltar la contradicción que nacería entre lo opuesto al teorema y los datos admitidos, á saber: los axiomas, los teoremas anteriores, ó la proposición misma. Pero los axiomas no tienen evidencia más inmediata que cualquier otro teorema de la geometría, sólo que son más sencillos de enunciar por su poco contenido.

Cuando se interroga á un delincuente, se escriben sus declaraciones en el acta para apreciar la sinceridad de ellas por su concordancia. Pero esto no es más que un recurso menos malo, y no se limitan á él los jueces cuando se puede comprobar directamente la verdad de cada declaración, con tanto mayor motivo cuanto que el reo podría haber mentido, sin variar, desde el principio. Euclides interrogó al espacio con arreglo al primer sistema. Parte de una suposición verdadera, á saber, que la naturaleza debe ser consecuente en todo, y por tanto, en su forma primera, que es el espacio; que por consiguiente, como las partes del espacio están entre sí en la relación de causa ó efecto, ninguna posición puede ser distinta de como es en el espacio, sin hallarse en contradicción con todas los demás. Pero es un rodeo fatigoso y poco satisfactorio, el que se da al preferir el conocimiento mediato al conocimiento inmediato, á pesar de su igual certeza; separando, con gran detrimento de la ciencia, el hecho de saber que *tal cosa es* del de saber *porqué es así*, y en fin, ocultando á los ojos del alumno toda perspectiva sobre las leyes del espacio, é impulsándole á contentarse con el conocimiento de que *tal cosa existe*, al hacer que se olvide de escudriñar convenientemente las causas y el encadenamiento íntimo de las cosas. El mérito, tan decantado, de este método, de ejercitar la penetración del espíritu, consiste meramente en que el alumno se habitúa á sacar consecuencias, es decir, á aplicar el principio de contradicción, y sobre todo, á hacer esfuerzos de memoria á fin de recordar todos los datos cuya concordancia tiene que comparar.

Es de notar, por otra parte, que este procedimiento de demostración sólo ha sido aplicado á la geometría, y no á la aritmética; en ésta se deja efectivamente á la verdad manifestarse por la intuición sola, que consiste aquí en la simple numeración. Como la intuición de los números no existe más que *sólo en el tiempo*, y no puede por consiguiente ser representada por un esquema sensible como una figura geométrica, no ha habido que detenerse ante el temor de que, siendo empírica la percepción, pudiera conducir á errores, que fué el único motivo que hubo para introducir en la geometría el método de demostración lógica.

Como el tiempo no tiene más que una dimensión, contar es la única operación de la aritmética, á la cual pueden reducirse todas las demás, y no se vacila en acudir á esta operación de contar, que no es más que una intuición *à priori*, para comprobar finalmente todos los cálculos y todas las ecuaciones. No se prueba, por ejemplo que $\frac{[(7+9)\ 8]-2}{3}=42$; lo único que se hace es apelar á la simple intuición en el tiempo, haciendo así de cada proposición separada un axioma. En vez de esas

demostraciones de que está llena la geometría, todo el contenido de la aritmética y del álgebra no es más que un método para abreviar la numeración. Es verdad que nuestra intuición inmediata de los números en el tiempo no llega á lo sumo más que hasta diez; más allá se necesita que un concepto abstracto del número, fijado en una palabra, reemplace á la intuición; en este caso no se efectúa realmente la operación, nos contentamos con indicarla en términos precisos. Pero áun así, se puede tener una evidencia intuitiva del cálculo, por medio del importante recurso de los diferentes órdenes de cifras que nos permiten representar grandes números con una pequeña cantidad de signos. Esta evidencia es todavía posible en los casos en que la abstracción se lleva tan lejos, que no sólo los números, sino cantidades indeterminadas y operaciones enteras no existen más que para el pensamiento en abstracto, ni son expresadas más que á este efecto, como la expresión $\sqrt{r^{-b}}$. Estas operaciones no se efectúan; lo que se hace es indicarlas solamente.

Con el mismo derecho y con la misma seguridad que en la aritmética, podría dejarse en la geometría que la verdad se manifestara únicamente por la intuición pura *à priori*. En realidad, la necesidad intuitiva, reconocida por virtud del principio de razón de ser, es lo que da á la geometría su gran evidencia, y sobre ella está fundada en la conciencia de cada uno la certeza de las proposiciones geométricas; no se debe esto á la demostración lógica que se arrastra con muletas, y que ajena á la materia, suele ser olvidada bien pronto, sin que por esto disminuya la convicción; hasta podría ser suprimida sin que la evidencia de la geometría padeciese en manera alguna, pues esta evidencia existe fuera de toda comprobación, y la demostración no prueba jamás otra cosa que aquello de que se estaba ya convencido de antemano por otro modo de conocimiento. Es como un soldado cobarde que traspasara con su espada á un enemigo muerto ya por otro, y se alabase en seguida de haberle dado muerte (1).

Espero que, después de todas estas explicaciones, nadie dudará que la evidencia de las matemáticas, considerada hasta aquí como el modelo y el símbolo de toda evidencia, no se deriva de las demostraciones, sino de la intuición inmediata que, allí como en todas partes, es el primer principio y la fuente de toda verdad. Pero la intuición en las matemáticas tiene una gran superioridad sobre cualquiera otra intuición, es decir, sobre la intuición empírica. Como es *à priori*, independiente de la experiencia, que no nos es dada más que por partes sucesivas, todo le es igualmente cercano y se puede partir indiferentemente de la causa ó del efecto. Esto le da una infalibilidad absoluta, pues se puede reconocer el efecto por la causa, único conocimiento dotado de necesidad, por ejemplo, la igualdad de los lados del triángulo que se reconoce como fundada en la igualdad de los ángulos; mientras que por el contrario, la intuición empírica y la mayor parte de la experiencia van del efecto á la causa. Este último modo de conocimiento no es infalible, pues

(1) Spinosa, que se vanagloría de proceder siempre *more geometrico*, practica efectivamente este método mucho más de lo que él mismo supone. Lo que sabía de la naturaleza del mundo, de una manera cierta y definitiva, por virtud de una comprensión intuitiva y directa, trata de demostrarlo lógicamente con independencia de aquel conocimiento. Es verdad que para llegar á este resultado, á pesar de la convicción que poseía ya, toma como punto de partida conceptos *(substantia, causa sui*, etc.) que forjó él mismo á su capricho, y se permite en sus demostraciones todas esas maniobras arbitrarias, á las cuales deja ancho campo la naturaleza de los conceptos cuyas esferas son muy vastas. En él, como en la geometría, lo que hay de verdadero y excelente en la doctrina, es independiente por completo de las demostraciones.

no hay necesidad más que para el efecto dada la causa, pero no para la causa reconocida por el efecto, puesto que un mismo efecto puede resultar de causas diferentes.

Este segundo modo de conocimiento es la *inducción*, es decir, el procedimiento que consiste, cuando muchos efectos indican la misma causa, en admitir ésta como cierta. Pero como el conjunto de los casos no puede ser nunca completo, la verdad que se admite no puede ser tampoco cierta más que de un modo condicional. Esta es la verdad inherente á todo conocimiento adquirido por intuición sensible y á casi toda la experiencia. La impresión de un sentido determina al entendimiento á deducir de la acción su causa; pero como la deducción de la causa por el efecto no es jamás infalible, síguese que la falsa apariencia, bajo la forma de ilusión de los sentidos, es siempre posible y muchas veces efectiva como he mostrado. Cuando varios de los cinco sentidos, ó todos ellos, son impresionados de manera que indican la misma causa, entonces la posibilidad de error se reduce al *mínimum*, pero sin que desaparezca completamente; pues en ciertos casos, por ejemplo, con una moneda falsa pueden ser engañados todos los sentidos á la vez. Esto es aplicable á todo nuestro conocimiento empírico, y también, por consiguiente, á toda la ciencia natural, salvo su parte de ciencia pura (lo que Kant llama el aspecto metafísico).

En las ciencias naturales se reconocen igualmente las causas por los efectos, por lo cual descansan todas aquellas en hipótesis, que muchas veces resultan falsas y son sustituídas por otras hipótesis más justificadas. Solo cuando se hacen experimentos es cuando se aprende á conocer el efecto por la causa y se sigue la verdadera senda, pero los mismos experimentos se hacen á consecuencia de hipótesis.

Esto nos explica por qué ninguna de las ramas de las ciencias naturales, ni la física, ni la astronomía, ni la fisiología, ha podido ser descubierta de un golpe como las matemáticas ó la lógica, sino que se han necesitado, y se necesitan aún, las experiencias reunidas y comparadas de muchos siglos. Sólo una repetida confirmación experimental puede dar á la inducción, sobre la cual descansa la hipótesis, una perfección tal que en la práctica pueda suplir á la certeza y quitar poco á poco á la hipótesis sus probabilidades originales de error. Esto es exactamente lo que sucede en geometría con la inconmensurabilidad entre una curva y una recta, y en aritmética con el logaritmo, que no obtienen nunca más que una exactitud aproximada. Así como, por medio de una fracción indefinida, se puede llevar la cuadratura del círculo ó la determinación de un logaritmo tan cerca como se quiera de la exactitud absoluta, de igual manera numerosos experimentos pueden aproximar la inducción, ó conocimiento de la causa por sus efectos, á la evidencia, matemática ó conocimiento del efecto por la causa; esta aproximación puede llevarse, si no hasta lo infinito, lo bastante lejos para que la probabilidad de error sea insignificante. Mas esta probababilidad existe, con todo, por ejemplo, cuando de innumerables casos deducimos la totalidad, lo cual equivale, propiamente hablando, á deducir la causa desconocida de la cual depende esa totalidad. ¿Qué conclusión de este género hay que nos parezca más cierta que la del corazón colocado á la izquierda en todos los hombres? Y sin embargo hay, como excepciones mny raras y casos aislados, hombres que tienen el corazón á la derecha.

La intuición sensible y las ciencias experimentales poseen, pues, el mismo género de evidencia. La superioridad de las matemáticas, de las ciencias naturales puras

y de la lógica, como conocimiento *à priori*, consiste sólo en que la parte formal de los conocimientos en que se funda la aprioridad se da entera y en conjunto, pudiendo pasarse de la causa al efecto; mientras que en todas las demás ciencias no se puede hacer, en la mayoría de los casos, más que ir del efecto á la causa. Pero en sí misma la ley causal, ó principio de la razón de *devenir*, regla de todo conocimiento empírico, es tan segura como las otras formas del principio de razón, á las cuales están sujetas las dos ciencias *à priori* antes citadas. Las demostraciones lógicas, por medio de conceptos ó silogismos, tienen como el conocimiento por intuición *à priori*, la ventaja de procedor de la causa al efecto, por lo cual, en sí mismas, ó sea, en cuanto á su forma, son infalibles. Esto ha contribuído mucho á la estima en que son tenidas. Mas esta infalibilidad es relativa, pues lo hacen entrar todo, por inclusión, en las proposiciones superiores de la ciencia, y como estos primeros principios contienen el fondo entero de la verdad, limitarse á probarlos no basta; hay que basarlos sobre la intuición, y ésta no es pura y *à priori* más que en matemáticas y en lógica; en las demás ciencias es empírica y no se eleva á lo general más que por inducción. Si pues en las ciencias experimentales se prueba lo particular por lo general, lo general á su vez saca su verdad de lo particular: no es más que un granero donde se guardan las provisiones y no un terreno productivo por sí mismo.

Esto por lo que toca al establecimiento de la verdad. Cuanto al origen y á la posibilidad del error se han ensayado muchas explicaciones, empezando por Platón (*Theetetes*, pág. 167 y siguientes) con su metáfora de un palomar, de donde se saca un pichón distinto del que se quería coger. La expllcación vaga é indecisa que da Kant del origen del error, valiéndose de la imagen del movi-