sas, de las cuales una coexiste y otra no coexiste con una tercera, no coexisten entre sí, para las negativas.

Sorprende la semejanza de este axioma con el tan conocido de los matemáticos, en el que, de la igualdad de dos cosas con una tercera, se infiere la igualdad de las cosas entre sí. Ambos son axiomas propiamente dichos, es decir, generalizaciones inductivas de la experiencia, en que se afirma de una clase un predicado que puede ó no convenirle; en los axiomas citados la afirmación ha sido reconocida cierta por concordancia universal. No lo sería en la proposición siguiente, á pesar del gran parecido que tiene con los axiomas de que hablamos. Dos cosas que tienen cierta relación con una tercera, tienen entre sí la misma relación. Ni en esta otra, dos cosas diferentes de una tercera, son diferentes entre sí.

En resumen, tanto el *Dictum de omni et nullo*, como el *Nota notæ*, pueden ser adoptados como principio fundamental de la deducción, pues en realidad de verdad vienen á expresar el mismo hecho, pero uno y otro postulan ó suponen aún otro axioma que les sirve de garantía, y este es el principio de la uniformidad de la Naturaleza. ≠

X

CAPITULO IV.

TEORIA DE LOS AXIOMAS Y DE LA DEMOSTRACION.

§ 1.—La palabra axioma, tomada á la ciencia matemática y particularmente á la Geometría, pues Euclides, el gran matemático de la antigüedad, formuló algunas proposiciones fundamentales dándoles este nombre, es usada muy á menudo sin que todos los que la emplean le atribuyan la misma connotación.

Se deriva de una raíz griega, que significa *digno*, sugiriéndose así que tales proposiciones son tan dignas de fe, que basta hacer ver que sirven de fundamento á otras, para que *ipso facto* estas últimas sean admitidas.

Justamente así procedía Euclides en su inmortal Geometría, después de haber formulado los axiomas, demostraba los teoremas geométricos haciendo ver, por diversas reflexiones auxiliadas por diferentes artificios gráficos, que el teore-

ma por demostrar era consecuencia de alguno de los axiomas, y que de no admitirla, el mismo axioma debía ser rechazado.

§ 2.—Los lógicos, y sobre todo los matemáticos, han tratado en varias ocasiones de definir la palabra axioma, es decir, de señalar los caracteres que una proposición ha de tener para declararla axiomática, una de las definiciones propuestas y que adquirió bastante boga para ser adoptada en obras didácticas, es la que sigue: Los axiomas son verdades evidentes por sí mismas y que no tienen necesidad de prueba.

Tal definición adolece desde luego de redundancia, pues *evidente por sí mismo*, no significa otra cosa *que no tener necesidad de prueba*, por lo cual muchos autores con buen consejo han reducido la definición á su primera parte, ó le han dado una redacción más conveniente, diciendo que los axiomas son verdades que se admiten por sólo su enunciado.

Parece, pues, que en el ánimo de los que han tratado de definir la palabra axioma, ha prevalecido la idea que el ser cierta una proposición por sólo su enunciado, era título suficiente para hacerla acreedora al dictado de axioma, siendo por tanto esa circunstancia la capital y característica de la connotación del nombre.

Para juzgar tal aseveración examinemos las dos proposiciones siguientes: primera: ¿toda proposición evidente por sí misma, es un axioma? segunda: ¿todo axioma es una proposición evidente por sí misma?

Hay muchos que no vacilan en contestar por la afirmativa á la primera cuestión. Tal opinión es inexacta, á ser verdadera esa opinión, *dos y dos son cuatro*, *una y dos son tres*, y todas las sumas de cantidades cortas, que podemos hacer de memoria y con gran facilidad, serían axiomáticas, lo cual multiplicaría en extremo el número de axiomas, siendo así que éstos han de ser en corto número. Serían axiomas también todas aquellas proposiciones llamadas por Bain proposiciones verbales que expresan juicios comprensivos, y en los que el predicado está ya afirmado ó negado en la enunciación del sujeto: la luz alumbra, el fuego quema, el calor calienta, dos no es tres, dos no es cuatro, dos no es cinco, y así hasta tener tantas proposiciones negativas, cuantos sean los números, por tanto sería infinito el número de axiomas, si cada proposición de este género se calificara de axiomática.

Por otra parte, la evidencia de una proposición depende, más que de su verdad intrínseca, de lo familiarizados que estamos con ella, toda verdad que repetimos diariamente llega á ser evidente, más todavía, una proposición falsa, pero que se tiene por cierta, llega á parecer evidente si los espíritus se habitúan á ella. Con dos proposiciones de la misma naturaleza, que tienen las mismas pruebas, y que, por lo tanto, poseen el mismo grado de certeza, suele suceder que una de ellas sea evidente por sí misma y se admita por sólo su enunciado, mientras que la otra, á pesar de ser de la misma naturaleza, no sea admitida sino después de comprobada. Tan verdadero es decir que dos y dos son cuatro, como decir que 2789 y 6857 son 9646.

La evidencia, no es más que el último grado de la certeza, es un estado subjetivo de nuestro espíritu, dependiente, sobre todo, como ya lo dijimos, de la sencillez de la proposición, ó de que estamos tan habituados á ella, que llega á sernos familiar. Para cualquier adulto instruido, son evidentes todas las proposiciones de las tablas de sumar y de multiplicar, mientras que no lo son para el niño que las está aprendiendo de memoria en la escuela, ni para el palurdo á quien si aseguráis que nueve y siete son dieciseis, no os creerá desde luego, sino que comprobará vuestro aserto ya sea contando con los dedos, ya con piedrecitas.

El solo hecho de repetir una proposición, de propalarla, de incorporarla, por decirlo así, á los hábitos del espíritu, es causa de que muchas proposiciones pasen por axiomáticas; así sucede con las supersticiones, con las preocupaciones, y así ha pasado durante siglos, entre sabios y filósofos, con proposiciones que parecieron evidentes á los antiguos, y que luego, á fuerza de repetirlas, se tuvieron por indubitables, y no pocas de ellas ¡ay! resultaron falsas. Tales fueron, entre otras: el supuesto horror de la Naturaleza al vacío, desmentido por el tubo de Torricelli; el supuesto principio de que ningún cuerpo puede obrar donde no está, que sumergió en perplejidades aun al vigorosísimo intelecto de Newton; y la famosa creencia en la incorruptibilidad de los cielos, que en tantas cavilaciones sumió al luminoso espíritu de Kepler.

No, no es la evidencia de una proposición lo que le dará el carácter axiomático, supuesto que aquella es, en cierto modo,

accidental é independiente de la naturaleza de la proposición, y del fundamento de sus pruebas, y sólo depende de la facilidad con que la mente la percibe, y de la frecuencia con que se repite. Ahora bien, sirviendo los axiomas para demostrar otras verdades, deben, sin duda, tener otro fundamento, otra fuente de certeza, y este fundamento y esta fuente de certeza, deben ser distintos de la mera circunstancia de que sean evidentes, la cual, sobre ser accidental por lo que se ha visto, es falible, desde que puede amparar á proposiciones falsas.

El examen de la segunda de las cuestiones propuestas más arriba, y que es la forma conversa de la primera, se hace por el mismo camino, casi en los mismos términos, por lo cual, desechada esta última, tiene que ser breve el examen de aquella.

Los axiomas sólo son evidentes por sí mismos, cuando llevan tiempo de haberse incorporado al dominio común del saber, cuando se les enuncia por primera vez nunca se admiten sin pruebas, sino justamente en fuerza de lo rigoroso y concluyente de ellas, y lejos de que parezcan evidentes, suelen parecer absurdos. ¿El mismo Newton no juzgó absurda su propia ley de la gravitación, si hubiere de entenderse como una propiedad real de la materia? ¿En nuestros días no han pensado lo mismo sabios tan insignes como el P. Secchi y el abate Moigno? ¿Acaso el axioma físico, y aun metafísico pudiéramos agregar, de la unidad de la fuerza, ó conservación de la energía, no requirió para ser admitido que se adujeran en su apoyo las pruebas más inconcusas? ¿Acaso pareció evidente á alguien? ¿no pareció más bien absurdo, y contrario á todo hábito mental? Si á nosotros nos parece ahora evidente ¿no es porque ha llegado á sernos familiar, y porque hemos vaciado en su molde, por decirlo así, nuestras reflexiones sobre los fenómenos físicos?

Desechamos, pues, terminantemente, la doctrina que caracteriza á los axiomas por su evidencia, y admitimos, siguiendo á Bain, que una proposición, para ser axioma, debe cumplir las siguientes condiciones: primera, ha de ser una proposición *real*, y no una definición; segunda, ha de ser independiente de cualquier otro principio contenido en la ciencia.

Examinando este filósofo, conforme á este criterio los axiomas de Euclides, borra de la lista las siguientes proposiciones tenidas erróneamente por axiomáticas:

"Las magnitudes que coinciden son iguales."

"El todo es mayor que la parte."

"Las diferencias de cantidades iguales son iguales."

"Si á cantidades iguales se agregan cantidades desiguales, las sumas son desiguales."

"Si de cantidades desiguales se sustraen cantidades iguales, las restas son desiguales."

"Los duplos de cantidades iguales son iguales."

"Las mitades de cantidades iguales ó las de una misma cantidad, son iguales."

"Dos líneas rectas no pueden pasar por un mismo punto, y ser paralelas á una tercera recta, sin coincidir."

Practicando tales expurgos los axiomas matemáticos se reducirían á dos, á saber:

"Dos ó más cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí."

"Las sumas de cantidades iguales son iguales."

§ 3.—Dilucidada la cuestión de lo que por axioma debe entenderse, surge inmediatamente otra ¿cuál es su origen? ¿á qué debe el espíritu su adquisición? En la primera parte de esta obra hemos tratado *in genere* este punto, proclamando que todo conocimiento viene de la experiencia, los axiomas son, pues, de origen experimental.

La demostración es un medio de prueba muy usado en la Matemática, especialmente en Geometría, para hacer ver la verdad de una proposición. La demostración es notable por el grado de convicción que engendra. Examinada desde el punto de vista lógico se reconoce sin esfuerzo que es una deducción, pues consiste en poner de manifiesto que, el teorema por demostrar, es un caso particular de un axioma, ó de una proposición ya admitida.

Sabiendo que el ángulo inscrito á la circunferencia tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados, quedará demostrado que el ángulo inscrito á una semicircunferencia es recto, reflexionando que, según el supuesto, el arco comprendido entre los lados del ángulo que se considera, vale 180º cuya mitad es 90º; esta mitad medirá al ángulo de que

se trata, conforme á lo admitido ya; pero justamente 90º es la medida de un ángulo recto.

§ 4.—La demostración se compone de tres elementos principales: los axiomas, las definiciones y los artificios demostrativos; los primeros son las verdades fundamentales que se trata de extender á los casos particulares, las definiciones son los conceptos conforme á los cuales se clasifican ó agrupan dichos casos, y los artificios demostrativos tienen por objeto hacer ver, que el caso, ó grupo de casos, de que se trata, queda incluido en otra clase, á la que atribuye algo un axioma, ó una proposición ya demostrada.

Como se ve, los elementos de la demostración son los mismos que los de la deducción, y el modo de combinarlos es el mismo también. Si en Geometría, y en general en Matemáticas, el rigor de las demostraciones es inconcuso, no se debe á que la demostración matemática posea algo que sea peculiar á la operación misma, sino á que los fenómenos matemáticos se prestan al más feliz empleo de la deducción. Se trata, en efecto, de fenómenos muy generales, de fenómenos muy abstractos, de fenómenos muy simples; la abstracción es tan fácil de hacer que simula una abstracción pura, es decir, completamente desprendida de los hechos particulares; la simplicidad es tanta, que la inteligencia puede fijarse en una sola circunstancia, como si esta existiese sola: la independencia de los fenómenos es tan grande, que nuestro espíritu puede estar cierto de que ninguna circunstancia extraña vendrá, en los casos particulares, á falsear la conclusión. Que un triángulo sea de papel, de madera ó de hierro, que sea chico ó grande, que esté en reposo ó en movimiento, nada de esto es obstáculo para que se verifiquen los teoremas geométricos relativos al triángulo.

Esta sencillez, esta independencia, que es propia de los fenómenos matemáticos, han engañado más de una vez á los filósofos, cuando han especulado sobre los conceptos matemáticos, ó sobre las operaciones matemáticas, consideradas como medios para conocer la naturaleza de las facultades intelectuales.

Se ha dicho, por ejemplo, la experiencia no puede proporcionar lo que ella misma no contiene, *nemo dat quod non habet.* En la Naturaleza no existen círculos perfectos, no existen líneas sin anchura, ni puntos sin extensión, ¿cómo puede, pues, el espíritu humano haberla tomado por modelo, para copiar de ella los conceptos de *círculo perfecto*, de línea sin anchura, y de punto sin extensión, que nuestro espíritu posee, que con todo desembarazo maneja, y con los cuales llega á los maravillosos resultados consignados en la Matemática?

El argumento es más especioso que sólido; es verdad que en la Naturaleza no existen círculos perfectos, mas sí existen figuras circulares que se aproximan más ó menos al círculo de los geómetras, y, proporcionalmente al grado de aproximación, serán ciertos en los círculos de la Naturaleza los teoremas del geómetra. Es verdad que ninguna línea material carece de anchura, pero nuestro espíritu puede desentenderse de ella como si no existiera, y fijarse solamente en la longitud.

Si en la Naturaleza no existen los conceptos geométricos puros, si existen con profusión los conceptos geométricos aproximados, suministrando á nuestra inteligencia un número inmenso de datos, que penetran sin que nos demos cuenta de ello, por las puertas siempre abiertas de los sentidos; esos datos, los elaboramos inconscientemente, y como fruto maduro de tal elaboración resultan los axiomas y las definiciones.

Por otra parte la simplicidad de esos conceptos y su independencia traen aparejada la facilidad de efectuar las abstracciones, prescindiendo de todas las circunstancias perturbadoras, y los conceptos, así abstraídos, se reproducen á voluntad en nuestra mente con tanta facilidad como fidelidad, de suerte que yo puedo discurrir sobre el triángulo, que mi imaginación refleja en un espíritu, con la misma ó mayor facilidad, que sobre el triángulo que mi mano traza en el pizarrón, ó sobre el que encuentro realizado en los objetos de la Naturaleza.

Esta facilidad que hay en Matemáticas, y sólo en ellas, de sustituir las cosas por sus representaciones mentales, da á esta ciencia un aspecto engañoso de subjetivismo puro, haciéndonos olvidar, é induciéndonos á negar, que en la Naturaleza están los hechos cuya reproducción realiza nuestro espíritu, que en el mundo exterior están los datos que nuestro espíritu ha generalizado inconscientemente, dándoles ya la

forma de nociones, si la generalización ha sido simple, ya la de axiomas si ha sido inductiva.

Lo que dijimos antes, á saber: que en la Naturaleza, si bien no se realizan en toda su pureza los conceptos geométricos, sí se encuentran realizados esos conceptos con un grado de aproximación creciente, nos permite poner en práctica un método inductivo de los más eficaces, á saber el método de variaciones concomitantes. No lo hacemos en verdad á sabiendas y con propósito deliberado, pero lo hacemos, y el resultado es siempre el mismo; si nuestras experiencias nos muestran una escala ó serie de círculos que paulatinamente van acercándose á la forma pura, como las asíntotas de la hipérbola van acercándose sin cesar á las ramas de la curva, esas mismas experiencias nos indican, que las verdades geométricas van realizándose en el círculo real con una aproximación tanto mayor cuanto menos distare éste del círculo ideal. ¿Qué infiere entonces la inteligencia, quiéralo ó no, adviértalo ó no? que si el círculo real hubiese llegado á realizar con perfección el arquetipo ó modelo ideal, asimismo se habría realizado á la letra en él cuanto del círculo se afirma en Geometría. ¿Y quién duda que discurrir conforme á tal molde es poner en práctica el método inductivo de variaciones concomitantes?

§ 5.—He aquí como en Matemática el material inductivo se infiltra, por decirlo así, á cada instante en nuestro espíritu, el cual le encamina y dirige luego, por el cauce deductivo; he aquí como las Matemáticas son ciencias naturales, y no ciencias ideales; he aquí como son á la vez inductivas y deductivas, lo uno en sus fundamentos, en sus axiomas; lo otro en sus teoremas. No son puramente deductivas, como erróneamente tendemos á creer por el aspecto engañoso bajo el cual se nos presentan los hechos; son, pues, las Matemáticas ciencias de generalización y de aplicación, lo primero conduce á las definiciones y á los axiomas, lo segundo á la demostración, ó prueba deductiva de los teoremas.

No es de admirar, sino muy de esperar, que fuera de la Matemática el espíritu no proceda á deducir con tanto desembarazo, sino que tropiece y se confunda desde sus primeros pasos dada la complicación de los fenómenos. En las ciencias biológicas y sociales, por ejemplo, en que los conceptos son siempre complexos, en que no siempre se encuentran bien deslindados, y en que es, por ende, imposible la sustitución del hecho por su representación mental, en que jamás puede confiarse á un signo un concepto genérico, ¿cómo fuera posible de hacer series de raciocinios, cuando muy felices fuéramos si llegáramos á ejecutar correctamente una que otra deducción? ¿Qué economista podrá representarse el concepto de *valor*, de *capital* y de *trabajo*, de una manera tan fiel que pueda desentenderse de los hechos enmarañados, confusos y complicados de que esos conceptos son la generalización?

CAPITULO V.

VALOR LOGICO DE LA DEDUCCION.

§ 1.—Desconociendo la verdadera función de la inferencia deductiva, se le han hecho dos objeciones muy serias, se le ha negado ser una inferencia propiamente dicha, es decir, una inferencia mediata, y por lo tanto, se ha negado que la deducción contribuya á ensanchar el conocimiento.

Si sabiendo que los hombres son mortales y que los reyes son hombres, afirmo que éstos son mortales también, mis conocimientos no han aumentado en lo más mínimo después de hacer la supuesta inferencia, pues al afirmar la mortalidad de todos los hombres, es claro que la he afirmado también de los reyes, que son parte de los hombres. Tal es la primera objeción.

La segunda es todavía más seria, pues no solamente niega á la deducción su carácter de inferencia mediata, sino que la califica de falaz y sofística, considerándola como un ejemplo de aquella falacia, en que se presenta, como prueba de una proposición, la misma proposición bajo otra forma.

Si quiero probar que los reyes son mortales, es porque no estoy seguro, ó porque mi auditorio no lo está, de que se pueda afirmar de los reyes la mortalidad. ¿Y en qué consiste mi prueba? en comenzar por afirmar que todos los hombres son mortales; pero no puedo hacer esa afirmación, á lo menos universalmente, supuesto que no he probado todavía que los reyes, que son parte de los hombres, sean mortales también. Por tanto, fundo deductivamente la conclusión en la univer-

salidad de la mayor, pero esta mayor, para poder ser afirmada, necesitaría que la conclusión estuviera probada, luego se ha incurrido en el defecto de querer probar una proposición suponiéndola ya probada.

Estas objeciones, aunque fueron formuladas contra la forma silogística, afectan realmente á la misma deducción, pues son independientes de la forma en que ésta se exprese, y pueden dirigirse lo mismo al viejo silogismo de la mortalidad de los reyes, que á una demostración de Euclides.

§ 2.—Para disiparlas, basta exponer con claridad los caracteres esenciales de la deducción, analizar, por decirlo así, el mecanismo deductivo, y darse cuenta de la verdadera significación de la conclusión, así como de lo que en realidad le sirve de fundamento.

La deducción, lo hemos dicho ya, consiste en la aplicación á un caso nuevo de una proposición general. Antes de operar, no se sabe si el caso de que se trata, está comprendido en el grupo de casos para los cuales se formuló la proposición general; después de operar, se sabe ya con certeza, si el nuevo caso queda incluido, ó no queda, en el grupo de que se trata, y en fuerza de este conocimiento, se extiende, ó no se extiende, hasta él, aquella proposición.

Las proposiciones generales se formulan forzosamente *in genere*, no pueden especificarse, ni mucho menos individualizarse en ellas los casos particulares, los cuales están comprendidos en ellas, sí, pero sólo de un modo implícito, en un estado que, si se nos permite la analogía, pudiera compararse á lo que los físicos llaman estado latente, ó los biólogos estado embrionario.

Un médico, sabe que en todo enfermo de pulmonía, una parte del pulmón es impermeable al aire; cuando se le llama á ver á un enfermo, no puede afirmar antes de explorarlo, ó de tomar datos, si tendrá ó no tendrá pulmonía; pero una vez que lo ha explorado, queda esclarecido este punto, y entonces puede ya, por deducción, afirmar ó negar la impermeabilidad del pulmón.

Un juez sabe que debe sentenciar á cierta pena á los que hubieren robado, pero esto lo sabe sólo *in genere*, la ley sólo le suministra puntos generales, y cuando se le presenta un individuo cualquiera, no puede, por el solo contexto de la ley,