Ahora, en cuanto á estas especies de cantidades, podemos probar el axioma. Sean dos cantidades iguales á las que se añaden cantidades iguales. Según el análisis precedente, esto significa que la primera agrupación contiene un cierto número de individuos ó de unidades; que se le añade un cierto número de ellas, que la segunda agrupación contiene el *mismo* número de individuos ó de unidades que la primera, que se le añade el *mismo número* de ellas que á la primera, que en ambos casos el mismo número es añadido al mismo número, y que, por tanto, las dos agrupaciones finales contienen el mismo número añadido al mismo número, es decir, el *mismo número total* de individuos ó de unidades, de donde se sigue, según la definición, que las dos sumas ó cantidades finales son cantidades iguales.—De modo semejante, sean dos cantidades iguales; según el mismo análisis, esto significa que la primera agrupación contiene un cierto número de individuos ó de unidades, que se le quita un cierto número de ellas, que la segunda agrupación contiene el *mismo* número de individuos ó de unidades que la primera, que se le quita el *mismo* número de ellas que á la primera, de suerte que en ambos casos el mismo número es disminuido en el mismo número, y que por tanto, las dos colecciones finales contienen el mismo número disminuído en el mismo número, es decir, el *mismo número restante* de individuos ó de unidades, de donde se sigue siempre, según la definición, que los restos ó cantidades finales son cantidades iguales.

De las cantidades artificiales pasamos á las naturales. Entre éstas, las más importantes son las

geométricas, porque sirven de medida para todos los demás tiempos, velocidades, fuerzas, masas, etcétera. Estas cantidades geométricas son las líneas, las superficies, los sólidos; y si les llamamos cantidades es porque pueden llegar á ser mayores ó menores; queremos decir con esto que de hecho ó mentalmente se puede añadir ó quitar una línea á la línea, una superficie á la superficie, un sólido al sólido. Ahora, comparemos una línea con una línea, una superficie con una superficie, y por el pensamiento ó de otro modo trasportemos la segunda sobre la primera, teniendo cuidado en este trasporte de no cambiar nada en la segunda. Dos casos se presentan como hace un momento.—O bien la segunda coincide exacta y completamente con la primera, de modo que se confunde en absoluto con ella, en cuyo caso las dos líneas no forman sino una sóla y *misma* línea, y entonces se dice que ambas magnitudes son iguales. Decir que dos magnitudes son iguales es, por tanto, decir que después del trasporte, en otros términos, omisión y abstracción hecha de los dos emplazamientos distintos, las dos líneas, superficies, etc., son las *mismas*.—O bien la segunda línea no coincide exacta y completamente con la primera; en cuyo caso las dos líneas, no confundiéndose, permanecen *distintas*, y entonces se dice que las dos magnitudes son desiguales, es decir, hecha omisión y abstracción de sus emplazamientos distintos, las dos líneas, superficies, etc., son diferentes.

Ahora, para estas especies de cantidades, podemos también probar el axioma. Sean dos magnitudes iguales sumadas á dos magnitudes iguales. Según el análisis precedente, esto significa que una cierta línea, superficie, etc., primitiva se da, que se le añade una complementaria, que una segunda linea primitiva omisión hecha de su emplazamiento distinto, es la *misma* que la primera, que se le añade una complementaria, la *misma*, salvo su emplazamiento distinto, que la otra complementaria, que en los dos casos, abstracción hecha de los emplazamientos distintos, la misma línea se añade á la misma linea, y que por tanto las dos líneas completadas son la misma línea añadida á la misma línea, es decir, la *misma linea total*, de donde se sigue, según la definición, que las dos sumas ó magnitudes totales son iguales. —De modo semejante, sean dos magnitudes iguales, quitadas de dos magnitudes iguales. Según el mismo análisis, esto significa que una cierta línea, superficie, etc., primitiva, se da, que de ella se quita una parte, que una segunda linea primitiva, omisión hecha de su emplazamiento, es *la misma* que la primera, que se le quita una parte, que, salvo su emplazamiento distinto, es la *misma* que la otra parte restada, que en ambos casos, abstracción hecha de los emplazamientos distintos, la misma línea se quita de la misma línea, y que por tanto, las dos líneas disminuidas son la misma línea disminuída en la misma línea, es decir, la *misma linea* restante, de donde se sigue, según la definición, que los dos restos ó magnitudes finales son iguales.—Se demostraría del mismo modo un tercer axioma, que es verdad de las cantidades naturales tanto como de las artificiales, á saber que dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Tómese el trabajo el lector de examinar el artificio de esta prueba. Por el pensamiento, y con

la confirmación auxiliar de los hechos sensibles, hacemos corresponder miembro por miembro, dos cantidades artificiales, ó hacemos coincidir, elemento por elemento, dos cantidades naturales; si esta correspondencia ó esta coincidencia son absolutas, la idea de igualdad nace en nosotros. Acabamos de asistir á su nacimiento y distinguimos su fondo; encierra un elemento más simple y se reduce á la idea del *mismo*; en efecto, desde un cierto punto de vista, omisión hecha de lo que es necesario admitir, las dos cantidades llegan á ser la *misma*. Por consiguiente, desde el punto de vista inverso, adición hecha de lo que es preciso añadir, la misma cantidad se trasforma en dos cantidades *iguales*. Quitad á las dos cantidades sus caracteres distintivos, á las dos cantidades artificiales iguales la propiedad de pertenecer á dos agrupaciones distintas, á las dos cantidades naturales iguales la propiedad de tener emplazamientos distintos; llegan á ser la *misma cantidad*. Recíprocamente, tomad dos veces la misma magnitud, y unidla sucesivamente á dos colecciones distintas ó á dos emplazamientos distintos, se trasformará en *dos magnitudes iguales*. Bajo la palabra *igual* está la palabra *misma*; he aquí la palabra esencial; tal es la idea latente incluida en la de igualdad. Separada y seguida á través de varias proposiciones intermedias, reduce el axioma á una proposición analítica. Por ella, unimos el atributo al sujeto; la vemos presente en ambos; pero, antes de verla la presentiamos; allí estaba y daba señal de su presencia por la presión que ejercía sobre nuestra afirmación, aunque no se la distinguía, cumplía su cometido. Sentíamos bien que las dos cantidades iguales podían, por esto mismo, ser sustituídas una por otra, que, por tanto, el aumento ó la disminución sufridos por la segunda podían sustituirse á los correspondientes sufridos por la primera. Adivinábamos con certidumbre, pero sin poder precisar las cosas, que en los dos datos y en las dos operaciones, había lo *mismo*; el análisis no ha hecho más que aislar esto mismo y mostrarnos en estado distinto el poder que en nosotros había en estado latente.

V. Hay doce axiomas de este género al principio de la geometría de Euclides; varios se reducen á los anteriores; otros, que encierran las ideas de todo, de parte, de menor, de mayor, se demuestran fácilmente por la definición prévia de los términos (1). Los últimos, en fin, más importantes, merecen ser estudiados aparte; son los que conciernen á la línea recta y las paralelas. Observemos primeramente que la definición ordinaria de la línea recta es mala; se dice que es la más corta que pueda trazarse de un punto á otro. No es esta una propiedad primitiva, sino derivada; no se asiste en modo alguno, pensándola, á la generación de la línea; no se poseen los elementos de la construcción mental, no se tiene más que una de las consecuencias. Por otra parte (2), «esta definición reduce una noción á otras que no se tiene y que son muchos menos simples que la primera. ¿Qué se entiende, en efecto, por una línea

(1) Léase sobre el particular Duhamel, *ibid*, tomo II, pgs. 3 y 6.—Los ángulos iguales se definen por la coincidencia de sus lados; la perpendicular, por la igualdad de los dos ángulos adyacentes que forma; el ángulo recto por las perpendiculares que son sus lados.

(2) Duhamel, *ibid*, pág. 7.

menos corta ó mayor que otra? Es la que se compone de una parte *igual* á la primera y de un resto cualquiera. Ahora bien, dos líneas iguales son las que pueden coincidir, y por consiguiente, la igualdad no puede concebirse entre dos líneas cuya figura no se presta á la superposición», lo que ocurre con la línea recta referida á las otras líneas, quebradas ó curvas, en número indefinido, á las cuales sería necesario compararla para comprobar que es más corta que ninguna de ellas. No es en modo alguno así como los finos y sútiles analistas griegos han definido la línea recta; Euclides no admite al principio que sea la más corta; lo prueba más tarde, comparando triángulos de que es un lado, lo que demuestra que es más corta que ninguna línea quebrada, luego extendiendo el caso de la línea quebrada á la curva, que es su límite.—Es preciso, pues, buscarle una definición distinta, y según nuestro uso, asistir á su construcción. Ahora bien, la hemos formado, considerando dos puntos dados, y notando la línea que traza el primer punto cuando se mueve hacia el segundo y hacia él solamente, por oposición á la línea que traza cuando antes de moverse hacia el segundo, se mueve ya hacia otro ó varios otros puntos, lo cual da la línea quebrada, ya hacia una serie infinita de otros puntos, lo cual dá la líuea curva. Se ve así que en la línea recta trazada á partir de un punto, el trazado entero, es decir, la línea recta misma, siendo determinado única y completamente por su relación con un sólo y segundo punto, todos sus caracteres, cualesquiera que sean, conocidos ó desconocidos, derivan única y completamente de la relación que tiene con este sólo segundo punto.

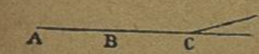
De aquí dos consecuencias, una que concierne á la línea entera, otra que concierne á sus diversas porciones.—Si á partir del primer punto se traza otra línea que se mueve también hacia el mismo segundo punto, y hacia él solamente, este segundo trazado no hace más que repetir exactamente el primero; porque todos sus caracteres, como todos los del primero, derivan total y únicamente de la relación que tiene, como el primero, con el solo segundo punto; de donde se vé que los caracteres de las dos líneas, cualesquiera que sean, conocidos ó desconocidos, son todos absolutamente los *mismos*, en otros términos, que estas dos líneas se confunden y no forman más que una (1) lo que se expresa de diferentes modos, diciendo que entre dos puntos no puede trazarse más que una recta, que dos puntos bastan para determinar la línea recta interpuesta, que dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extensión intermedia, de donde se deduce fácilmente que dos rectas que se cortan no pueden cerrar un espacio (2).—Esto en cuanto á la línea entera; consideremos ahora sus diversas porciones. Puesto que el trazado entero está completa y únicamente determinado por su relación con el segundo punto, y deriva de aquí todos sus caracteres, cada una de sus porciones constituyentes está única y totalmente determinada por la misma relación y deriva también de aquí todos sus caracteres, excepto uno que es la propiedad de

(1) Una demostración enteramente análoga prueba que dos circunferencias cuyos radios son iguales se confunden en una sola.

(2) Esta última proposición es el duodécimo axioma de Euclides.

ser tal porción y no tal otra, situada en tal ó cual lugar de la línea, al principio, al fin, ó en el medio. Por consiguiente si hacemos abstracción de esta particularidad, todas las partes de la línea tienen exactamente los mismos caracteres, en otros términos son las *mismas*. Efectuemos esta abstración, y para ello, suprimamos el emplazamiento particular de un trozo de la línea, retirándola del sitio donde está, del final, por ejemplo, para trasportarle á otra parte, al principio, por ejemplo, y superponerle en este punto á la línea total. Se confundirá con el trozo sobre el cual se aplique, y ambos no formarán más que uno. De donde se sigue que una porción cualquiera de la línea recta, retirada de su puesto y superpuesta en otro punto cualquiera de la línea total coincidirá rigurosamente con la porción sobre la que se le haya aplicado (1).

Asentado esto, conocemos la relación de una porción *cualquiera* de la línea recta con otra porción *cualquiera* de esta misma línea, y por consiguiente, podemos más allá de los dos puntos entre los cuales la hemos trazado, seguirla hasta el infinito. Sea en efecto, una recta A B; prolonguémosla todo lo que se quiera más allá del punto B, pero de modo que permanezca recta, es decir, según la condición precedente, de modo que una cualquiera de sus



(1) Una demostración análoga prueba que en el mismo círculo ó en círculos iguales, un arco cualquiera mudado de su lugar, coincidirá exactamente con la porción de circunferencia sobre la que se le haya colocado. Es que la circunferencia, como la línea recta, es una línea uniforme.

porciones, pueda coincidir con otra cualquiera, por tanto, con todas las que están comprendidas en su prolongación. Ahora, supongamos una segunda recta trazada de A ó B, y prolongada de igual modo cuanto se quiera; lo mismo que se ha probado hace un momento, de A á B, coincidirá con la primera; pero ademas, lo que vamos á probar, más allá de B, por lejos que se la prolongue coincidirá con la prolongación de la primera. Porque, admitimos que en un punto cualquiera deja de coincidir, y que á partir de C, por ejemplo, es divergente por encima ó por debajo de la primera; tomemos una parte del trazado que sea común á las dos líneas, A B, por ejemplo, y apliquémosla sobre la primera línea en el punto C, de modo que sobresalga á un lado y á otro. Puesto que la primera línea es recta, esta porción coincidirá, de un lado y de otro de C, con el trozo de la primera línea sobre el que se haya aplicado. Puesto que la segunda línea se supone recta, esta misma porción deberá coincidir también á un lado y á otro de C, con el trozo de la segunda línea sobre el que se haya aplicado. Lo cual es contradictorio, puesto que más allá de C, el segundo trozo es divergente y deja de coincidir con el primero. Hay pues, contradicción en que la segunda línea sea recta y deje de coincidir con la primera. Su divergencia excluye su rectitud, ó viceversa. Si ha dejado de coincidir con la primera es que ha dejado de ser recta; para que siga siendo recta, es preciso que continúe coincidiendo con la primera; para que siempre permanezca recta, es preciso que siga siempre coincidiendo con la primera. Por consiguiente, dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su ex-

tensión, á cualquier distancia, que se las prolongue; ó tambien dos puntos bastan para determinar completamente en una línea recta no solo el trazado que las une, sino también el trazado entero prolongado por ambos lados cuanto se quiera.

«La definición y las propiedades de la línea recta, decía d'Alembert (1), son el escollo, y por decirlo así, el escándalo de los elementos de geometría». Si no me engaño, se acaba de ver que este escándalo puede desaparecer, y que los axiomas admitidos son teoremas capaces de prueba. Según d'Alembert, las paralelas presentan una dificultad análoga. Sin duda, es temerario abordar un obstáculo que grandes espíritus y sabios especiales declaran invencible ó no superado; pero felizmente se trata menos de descubrir una demostración que de analizar una construcción; hacemos labor de psicólogo y no de geómetra; buscamos simplemente el procedimiento íntimo y secreto por el cual, bajo el testimonio accesorio é insuficiente de la vista, se forma la convicción inquebrantable del espíritu.—¿Cómo formamos la noción de dos paralelas? El medio más ordinario es, sobre una recta dada en un plano, elevar una perpendicular por un punto y otra por otro; estas dos perpendiculares se llaman paralelas una á otra. Pero hay una construcción más sencilla aún, ó al menos más natural, y que nos permite asistir á la generación de nuestras dos perpendiculares.

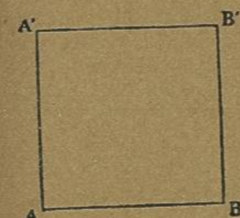
Sea una recta A B, y concebimos que sube permanecien-

(1) *Mélanges.—Eclaircissements sur les éléments de philosophie.* Tomo V, 207.

do inflexible, sin cambiar de forma ni de magnitud. Sigamos primero con la vista, luego con el espíritu, los diferentes modos como puede remontarse.—Visiblemente, puede hacerlo trazando por sus diversos puntos líneas *desiguales*, lo cual ocurre, por ejemplo, cuando gira alrededor de A como centro y sus diversos puntos describen arcos de círculo tanto mayores cuanto más alejados están de A. Pero puede subir de un modo enteramente distinto, trazando por todos sus puntos *rectas iguales* y visiblemente esta ascensión puede operarse de infinitos modos, hacia la izquierda ó hacia la derecha, por rectas más ó menos inclinadas sobre A B. Visiblemente, en fin, entre todos estos casos, hay uno en que el punto A, al subir, no se inclina ni hacia la derecha ni hacia la izquierda, y por consiguiente traza una perpendicular á A B.—Ahora, esta operación que los sentidos declaran posible ¿lo es efectivamente? El compuesto mental que formamos así según una sugestión de nuestros ojos ¿no encierra alguna contradicción interior? Las condiciones que hemos reunido, la ascensión de una recta, el que todos los puntos de ella hayan de trazar en su ascensión rectas iguales entre sí, la posibilidad para el punto A de trazar una perpendicular, estas tres condiciones ¿pueden cumplirse á un tiempo? ¿No hay una de ellas, la primera, la segunda, la tercera que no se avenga con las otras dos, ó con una de las otras dos?—Nada sabemos de ello; todo lo que podemos decir, es que nuestra experiencia y nuestra imaginación no descubren en esta construcción nada imposible. Pero esto nos basta, porque lo mismo ocurre en todas las construcciones mentales, que, siendo muy simples, en-

gendran el primer individuo de una clase nueva y distinta. Tal era nuestra construcción anterior á propósito de la línea recta; engendraba la más sencilla de las líneas, y con el punto en movimiento, creaba la primera dimensión. Tal es nuestra construcción actual; engendra la más sencilla de las superficies, y con la recta en movimiento, crea la segunda dimensión. Tal sería una última construcción análoga, que engendraría el más simple de los sólidos, y con nuestra superficie en movimiento, crearía la tercera dimensión. Cada una de estas formaciones es, en su género, una suposición primitiva; no la hay anterior en su género á la que pueda compararsela para comprobar si no se aviene á ella. Así no teníamos que probar que el punto puede moverse, ni que puede hacerlo, en todos los momentos de su movimiento, hacia un sólo y otro único punto. De modo semejante, no tenemos que probar que la recta puede subir, ni que puede hacerlo trazando por todos sus puntos rectas iguales, ni que haciendo este trazado puede trazar una perpendicular por su extremidad A. Al menos, nuestra combinación mental tiene el valor de las fórmulas algebráicas, por las que el análisis construye de antemano curvas y superficies, sin preocuparse de saber si geométricamente son ó no realizables. Una vez establecida la fórmula, se deducen las consecuencias, poco importa que éstas repugnen á la extructura de nuestro espacio visible y tangible; son deducciones legítimas y conducen á teoremas probados; se ha formado una geometría entera, suponiendo que el postulado de Euclides no es verdadero, y esta geometría es tan rigurosa como la de Euclides.—Tomemos, pues, nuestra combinación por lo que es, es decir, por una pura reunión de condiciones, de las que no se sabe si son compatibles con la estructura de nuestro espacio, ni si en éste son compatibles entre sí. Mejor aún, consideremos reservada la cuestión de saber, si consideradas aparte y en sí, son compatibles ó incompatibles entre sí. Acerca de este último punto, el desarrollo de los teoremas responderá; si una repugna á la otra, como la forma cuadrada repugna al círculo, al cabo de algunas deducciones se distinguirá en el compuesto mental que forma su reunión una contradición interior semejante á la que inmediatamente se descubre en la noción de un círculo cuadrado.

Admitido esto, volvamos á nuestra construcción. Suponemos que la recta A B, permaneciendo siempre la misma, sube trazando por todos sus puntos rectas iguales; nada más; tan sólo que, entre los innumerables ángulos que el punto A, al trazar su recta, puede formar con A B, elegimos el ángulo recto.—Ahora, fácil es probar (1) que si A A' es perpendicular á A B, A' B' es también perpendicular á B B'; que por tanto estas dos verticales son, en todas partes y por lejos que se las prolongue, equidistantes; que esta distancia es



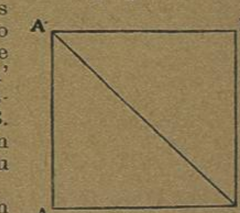
(1) He aquí el pormenor de la demostración: A' B' es una posición cualquiera de la recta ascendente A B, y los datos son los siguientes: A B = A' B', A A' = B B' el ángulo A es recto.

1.° Tracemos A' B. Los dos triángulos así formados son iguales por tener sus tres lados iguales uno á uno;

A B; que las dos horizontales son, en todas partes y por lejos que se las prolongue, equidistantes; que esta distancia es A A'; que además B 'B es perpendicular á A B; que así la recta ascendente engendra por sus extremos dos perpendiculares; y se comprende que si las dos perpendiculares, son en todas partes equidistantes, es que la recta que las engendra sigue siendo durante toda su ascensión la medida de su apartamiento.

En mi opinión, tal es la secreta operación mental que ilumina y sostiene el testimonio de nuestra vista cuando vemos subir la recta que traza por todos sus puntos rectas iguales entre sí. Sentimos que, puesto que la recta permanece *la misma* y que todos los trazados deben ser *los mismos*, todos los puntos deben subir en *el mismo* sentido; que, si uno sube hacia la derecha ó hacia la izquierda, los otros deben *del mismo modo* subir hacia la

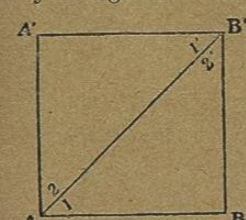
porque A B = A' B', A A' = B B' y A' C comun. Pero A es recto luego B' es recto. Luego A' B' es perpendicular á B' B y mide la distancia de las dos verticales al punto A'. Pero A' B' = AB, y por lejos que se prolonguen las dos verticales, A' B', en virtud del mismo razonamiento, será siempre igual á A B. Luego las dos verticales son en todas partes equidistantes y su distancia es A B.



2.° La misma demostración para las dos horizontales. Puesto que B' es recto, B B' es perpendicular á A' B' y mide la distancia de las dos horizontales al punto B. Pero B B' = A A' y, por lejos que se prolonguen las dos horizontales B B', en virtud del mismo razonamiento, será siempre igual á A A'. Luego las dos horizontales son en todas partes equidistantes, y su distancia es A A'.

3.° Tracemos A B'. Los dos triángulos son iguales, izquierda ó la derecha, que si uno no se remonta ni hacia la derecha ni hacia la izquierda, los otros deben *del mismo modo* no remontarse ni hacia la derecha ni hacia la izquierda; en otros términos, que si el uno traza una perpendicular, los otros deben *de igual modo* trazar perpendiculares; que en este caso la recta ascendente que, en su primera posición, es perpendicular á la primera vertical, debe ser *de igual modo* en la segunda posición perpendicular á la segunda vertical, que con este motivo, en su segunda posición, mide la distancia de las dos verticales, que en estas dos posiciones es siempre *la misma*, y que por tanto, cualquiera que sea su posición, crea y observa siempre *la misma* distancia entre las dos verticales. A medida que la recta visible sube, esta serie de identidades se desarrolla más ó menos clara-

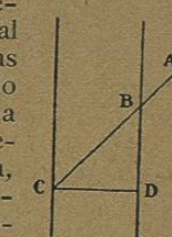
puesto que, como en la figura anterior, tienen los tres lados iguales uno á uno. Luego el ángulo 1 = al ángulo 1' y el ángulo 2 = al ángulo 2'. Pero 1 + 2 = á un recto,



luego 1 + 2' = á un recto. Por otra parte 1 y 1', 2 y 2', respectivamente comprendidos entre rectas equidistantes ó paralelas, son respectivamente alternos internos; de donde se sigue, como todos saben, que en todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos.—Luego, en el triángulo A B B' en que la suma de los ángulos 1 y 2' es igual á un recto, el tercer ángulo B es igual á un recto, y B' B, es perpendicular á A B. De modo semejante, en el triángulo A A' B' en que la suma de los ángulos 2 y 1' es igual á un recto, el tercer ángulo A' es igual á un recto, y A A' es perpendicular á A' B'.—Así las dos verticales equidistantes son perpendiculares á A C, y las dos horizontales equidistantes son perpendiculares á A A'.

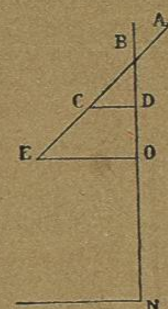
mente en el espíritu; un anillo de la cadena tira de otro, tenemos vaga conciencia de que al principio, al fin y en todos los momentos intermedios de la operación, la recta ascendente no solo permanece intacta, sino que sigue siendo siempre la medida de la distancia que establece entre las verticales que traza por sus dos extremidades, que no solo permanece invariablemente la *misma*, sino que hace invariablemente *el mismo* oficio. He aquí la reminiscencia sorda que se añade á la sugestión de la vista y adelanta las comprobaciones de la escuadra, para hacer inútil su uso, y para autorizar, por una evidencia más fuerte, el testimonio insuficiente de la vista.

Ahora, la segunda proposición de la teoría ordinaria, quiero decir, el postulado de Euclides, no presenta ya dificultad. Porque hemos probado no solo que nuestras dos verticales no se encontrarán jamás, sino también que serán siempre equidistantes, y tal es ahora nuestra definición de las paralelas. Ahora bien, el postulado consiste en decir que si una oblícua A B encuentra á la primera paralela encontrará también á la segunda, y se vé fácilmente la condición necesaria y suficiente de este encuentro. Es preciso y basta que la



oblícua prolongada por debajo de B se aparte bastante de la primera paralela para que una perpendicular C D levantada en un punto C de la oblícua, iguale la distancia de las dos paralelas. ¿Se apartará la oblícua bastante para esto?—Se demuestra fácilmente que su separación va en aumento á medida que se prolonga; porque, si en un momento cualquiera esta separación disminuyera ó cesara de aumentar, dos puntos tomados en ella á partir de este momento estarían á igual distancia de la primera paralela, y como dos puntos bastan para determinar una recta, la oblícua se confundiría con una tercera paralela que pasaría por estos dos puntos, lo cual es imposible, puesto que por la proposición anterior dos paralelas no pueden encontrarse, y puesto que por hipótesis nuestra oblícua encuentra á la primera paralela. Luego, á medida que la oblícua se prolonga, se separa más de la primera paralela, y la perpendicular que mide esta separación es una magnitud que va siempre en aumento.—Pero nuestra cuestión subsiste siempre. En efecto, esta magnitud creciente crecerá lo bastante para igualar á una magnitud muy grande, y principalmente á una todo lo grande que se quiera, como puede ser la distancia de las dos paralelas elegidas. Reducida á estos términos precisos la proposición, nos deja una cierta inquietud; sin duda, á primera vista, viendo una oblícua sensiblemente inclinada y dos paralelas medianamente distantes, hemos juzgado que la oblícua, después de haber encontrado á la primera, encontraría á la segunda; es que el punto de encuentro no estaba lejos; le percibíamos con los ojos ó le señalábamos de antemano con la imaginación; con estos indicios hemos inducido con verosimilitud que por pequeña que fuera la inclinación y por grande que fuese la distancia, la proposición sería siempre verdadera. Pero, si suponemos la distancia igual á la línea que une una estrella fija con la tierra, al mismo tiempo que la inclinación reducida á una cienmillonésima de segundo, nuestros ojos no nos infor-

man ya, nuestra imaginación desfallece, estamos turbados. Lo estamos más todavía, si recordamos que podemos aumentar la distancia y disminuir la inclinación mucho más allá de estas cifras enormes, y esto indefinidamente. Aún nos inquietamos más, si notamos que ciertas magnitudes aumentan indefinidamente, sin poder lograr nunca un cierto límite; que vanamente aumentadas é infladas, quedan siempre por debajo de una magnitud dada; que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, etcétera queda siempre por bajo de 2 y que quizá nuestra perpendicular está en este caso.—Es preciso, pues, emplear un análisis más delicado, es decir, buscar el modo cómo crece la separación de la oblícua con relación á la primera paralela; cuando conozcamos su modo de aumentar, sabremos si este aumento tiene un límite. Para esto, de un punto cualquiera C de la porción de la oblícua situada entre las dos paralelas, bajamos una perpendicular C D, á la primera paralela; en la prolongación de la oblícua tomemos una longitud C E igual á B C, y finalmente de E bajamos una perpendicular E O á la primera paralela. Se demostrará fácilmente que C B O, E B O son triángulos semejantes, que por consiguiente sus lados homólogos son proporcionales, de donde se sigue que si B E = 2 B C, E O = 2 C D. En otros términos, á medida que la oblícua dobla en longitud, la perpendinular que mide su apartamiento con relación á la primera paralela dobla también su longitud. Su aumento se verifica, pues, doblando siempre, y por tanto no tiene en modo alguno límite. Aún mejor: podemos decir ahora en qué punto encontrará la segunda paralela. Sea C D con relación á la perpendicular, que mide la distancia entre las dos paralelas como 1 es á 10, 100, 1.000, etc., ó más generalmente, como 1 es á x; la



oblícua encontrará á la segunda paralela, cuando su longitud sea B C $\times$ 10, 100, 1.000, etc., ó más generalmente, B C $\times x$. Pero como B D, B O, son también lados homólogos, la correspondencia se mantiene si á B C se sustituye por B D. En consecuencia, se podrá marcar de antemano el punto en que la oblícua encuentra á la segunda paralela: bastará tomar en la primera paralela una longitud B N igual á B D $\times x$; la perpendicular á B N levantada hasta el encuentro con la segunda paralela encontrará á esta última en el punto en que la alcance la oblícua.

VI. El lector ve ahora cómo se forman los axiomas. No solo la experiencia realizada con la vista ó con la imaginación no es más que un indicio, sino que además este indicio, en ciertos casos puede faltar; hace un momento, ni con la vista exterior ni con la interior, podía seguir la prolongación de las dos paralelas más allá de una cierta distancia; de modo semejante, puede citarse tal figura, el miriágono regular, que jamás he visto trazada, que por la imaginación no puedo trazar, y acerca de la cual, sin embargo, puedo formar juicios ciertos con claridad. Bajo el trabajo de la vista exterior ó interior hay un sordo trabajo mental, el reconocimiento repetido ó continuo de una circunstancia que, supuesta en la

construcción primitiva, persiste ó reaparece siempre *la misma* en los diversos momentos sucesivos de nuestra operación. Cuando después de haber levantado mis dos perpendiculares sobre una base, las sigo indefinidamente con la imaginación sin poder admitir que en un punto cualquiera del recorrido se acerquen, es que involuntariamente y sin saberlo llevo con ellas la porción de base incluída entre sus pies, y que en todos los momentos del recorrido esta base, siempre la misma en mi espíritu, se hace reconocer vagamente en él siempre la misma.—Pero aun cuando la razón sea el verdadero obrero de la convicción final, el indicio que proporcionan los sentidos es muy precioso. Porque los testimonios de la vista y de la imaginación preceden y confirman las conclusiones del análisis; nos conduce al axioma una sugestión previa, y nos mantiene en él una comprobación ulterior. La evidencia sensible sirve de introducción y de complemento á la evidencia lógica, y gracias á esta concordancia es como la aritmética, la geometría y aún el álgebra, habiendo encontrado enseguida sus axiomas, han sido tan precoces.—No ocurre lo mismo con la mecánica. En esta ciencia los axiomas no concuerdan con las inducciones de la experiencia; al menos no concuerdan con las de la experiencia ordinaria. Por ejemplo, los axiomas dicen que la materia es inerte, incapaz de modificar espontáneamente su estado, de pasar del reposo al movimiento si está en reposo, y del movimiento al reposo si está en movimiento. Ahora bien, todos los días vemos cuerpos pasar del movimiento al reposo ó del reposo al movimiento, á lo que parece, espontáneamente, y sin la intervención apreciable de una condición nueva. Una piedra lanzada, un péndulo que oscila, terminan por detenerse, y estamos tentados á creer que se detienen por sí mismos; una mezcla estalla, una manzana cae de su arbol, sin que nuestros sentidos distingan la circunstancia nueva que, añadiéndose al antiguo estado, ha ocasionado el nuevo. Durante toda la antigüedad y la Edad Media, los filósofos han admitido tendencias al reposo ó al movimiento, diversas en los distintos cuerpos, la tendencia á bajar en la piedra que cae, la tendencia á subir en el aire y el fuego, la tendencia al movimiento perfecto ó circular en los actos que giran, el horror al vacío, etc. Ya en el Renacimiento, con Stevin y Galileo, la mecánica ha comenzado; y probablemente la causa de este largo retraso es el desacuerdo de la inducción ordinaria y de la razón pura. En vez de llevar al axioma, la experiencia la alejaba de él; en vez de confirmarle, le desmentía. No había ayuda para formarle, y si se le hubiera formado, la observación, tal como era practicada, hubiera bastado para deshacerle. Hemos concluído por formarlo, y la experiencia, mejor guiada, se encuentra hoy de acuerdo con él. Aun ha sido tan bien guiada, y en ciertos casos, como el del péndulo de Borda, es tan concluyente que, según varios autores, la inducción es la única prueba valedera del axioma; consideran los principios de la mecánica como proposiciones análogas al principio de la atracción, establecidas como él por la inducción pura, limitadas como él al pequeño círculo y á la corta duración del mundo que nuestra observación puede alcanzar, incapaces como él de ser aplicadas más allá, sino por conjetura, y enteramente dudosas como él, cuando nuestra temeridad quiere extender su imperio á todas las partes del espacio ó á todos los momentos del tiempo.

Por nuestra cuenta, nos inclinamos á pensar, con Leibnitz y d'Alembert, que, entre los principios de la mecánica, varios son no sólo verdades experimentales, sino también proposiciones *analíticas*. A fin de mostrarlo, examinemos de cerca nuestras construcciones. Antes de formar los movimientos compuestos, es preciso formar el movimiento simple, puesto que aquellos no son más que combinaciones de éste. Ahora bien, todo movimiento que no es uniforme y rectilíneo es compuesto; éste solamente es simple. Porque, desde el punto de vista del tiempo, su forma es simple, puesto que en todos los momentos su velocidad es la misma; y desde el punto de vista del espacio, su dirección es simple, puesto que siendo recta la línea que describe, es la más simple de todas las líneas. Con este doble motivo, es el elemento cuyas combinaciones constituyen los otros movimientos, y de sus propiedades derivan forzosamente las propiedades de éstos.—Sea, pues, un móvil que tiene un movimiento uniforme y rectilíneo durante un cierto tiempo y reuniendo un cierto espacio; este tiempo será tan corto y este espacio tan reducido como se quiera. He aquí lo que se puede llamar su movimiento inicial y primitivo; continuará moviéndose, y en este caso, ¿cuál será su movimiento?—Por corto que haya sido el tiempo primeramente trascurrido, por ejemplo, una millonésima de segundo, y por pequeño que haya sido el espacio primeramente recorrido, por ejemplo, una milésima de milímetro, pueden considerarse sucesivamente dos mitades en este tiempo y en este espacio. Como, según nuestra hipótesis, el movimiento ha sido rectilíneo, la segunda media milésima de milímetro descrita, se ajusta á la primera en línea recta. Como, según nuestra hipótesis, el movimiento ha sido uniforme, el espacio recorrido durante la segunda media millonésima de segundo, es el mismo en magnitud que el recorrido durante la primera. De aquí se siguen dos consecuencias. Ni la dirección ni la velocidad del cuerpo se han alterado. La dirección que tenía en la primera porción de espacio ha permanecido *la misma* durante la segunda. La velocidad que llevaba durante la primera porción de tiempo ha seguido siendo *la misma*, durante la segunda. Que la fracción sea la primera ó la segunda, no importa; este carácter que constituye su diferencia, no ha tenido influjo en el movimiento; con relación á éste, este carácter ha sido *indiferente*, y si me atrevo á decirlo, *nulo*.—Pero entre las fracciones semejantes del espacio ulterior y del tiempo consecutivo, puede concebirse una que sigue inmediatamente á nuestra segunda fracción, después de la segunda media milésima de milímetro del espacio recorrido, una tercera, después de la segunda media millonésima del tiempo empleado, una tercera. Esta tercera, considerada en sí misma y comparada con la segunda, no difiere de ella, sino lo mismo que la segunda de la primera; viene tras de la segunda, como esta tras de la primera, y nada más. De donde se sigue que, puesto que el carácter por el cual, la segunda difiere de la primera, á saber, la propiedad de venir inmediatamente, no ha tenido influjo en el movimiento, el carácter por el cual la tercera difiere de la segunda, á saber, la propiedad de venir inmediatamente, no tendrá influjo en el movimiento; en relación al movimiento, este carácter será tan *indiferente* y *nulo*, y del mismo modo que durante el segundo momento el cuerpo ha continuado su movimiento uniforme y rectilíneo, así durante el tercero, salvo introducción de un nuevo carácter influyente, continuará su movimiento uniforme y rectilíneo. El mismo razonamiento para el cuarto, el quinto momento, y así sucesivamente hasta el infinito.

Reducida á estos términos, la prueba es rigurosa. Se funda por entero en dos observaciones: la una es que dos porciones iguales y contiguas del espacio, como dos porciones iguales y sucesivas del tiempo, son exactamente las mismas, salvo la diferencia de que la segunda va después de la primera; la otra es que si esta diferencia, establecida una primera vez, no ha tenido efecto en el movimiento, esta misma diferencia, establecida segunda vez, no tendrá ya efecto en el movimiento, á condición de que la segunda vez sea absolutamente *la misma*, y que ninguna otra diferencia influyente y nueva haya intervenido. A lo que se provee suponiendo que la tercera fracción de tiempo y de espacio repite la segunda absolutamente y en todos respectos; que no habiéndose hallado ningún carácter perturbador en la segunda, no se encontrará tampoco en la tercera; que en el tercer lugar y el tercer instante, como en los segundos, ninguna circunstancia extraña é influyente se ha añadido para suspender, desviar, apresurar ó contener el movimiento; que estando vacío el pequeño espacio recorrido primeramente, lo estará también el espacio infinito que queda por recorrer; que no habiendo presentado el cor-