3e LEÇON

MÉTHODE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

I. — DÉFINITION, DIVISION, MÉTHODE

Définition de ces sciences. — Les sciences *mathématiques* sont celles qui *ont pour objet les nombres, les figures et les mouvements.* (LITTRÉ.) A. Comte les définit : *sciences ayant pour objet la mesure des grandeurs.* « On s'y propose, dit-il, de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations constamment précises qui existent entre elles. » Si les réalités ou grandeurs sensibles (sensibles soit directement, soit par leurs effets) sont représentées par des nombres, sans introduire ni l'idée d'étendue ni l'idée de cause, elles sont l'objet de l'*arithmétique,* qui est la science du nombre; si l'on ajoute à l'idée de nombre celle d'étendue, toujours sans l'idée de cause, elles sont l'objet de la *géométrie,* qui est la science de l'étendue; enfin, si à ces deux idées de nombre et d'étendue on ajoute l'idée de cause, cause qu'on appelle force, elles sont l'objet de la *mécanique,* qui est la science du mouvement et des forces.

On appelle les sciences mathématiques *abstraites,* parce qu'elles considèrent les rapports, abstraction faite de la réalité. Ainsi le point, la ligne qu'il engendre, la surface qu'engendre la ligne, sont de pures abstractions. C'est avec les idées abstraites de nombres que se fait l'arithmétique; avec les idées abstraites de points, de lignes, de surfaces, de solides, que se fait la géométrie; avec les idées abstraites de mouvement, de repos, de vitesse, de masse, que se fait la mécanique. Ces sciences ne sont pas cependant les plus abstraites; bien au-dessus d'elles, il y a la métaphysique, qui étudie l'être en tant qu'être, c'est-à-dire l'être en soi, indépendant de tout être concret et particulier.

On les a appelées sciences *exactes,* non parce que les autres sciences sont moins certaines, mais parce que, partant de principes admis et de conventions faites, on en tire, par une méthode sûre, des conclusions rigoureuses; on arrive à la certitude dite *mathématique.*

Division. — Les sciences mathématiques comprennent :

1° Les mathématiques *pures,* qui sont théoriques et indépendantes de l'expérience : l'*arithmétique,* l'*algèbre* et la *géométrie ;*

2° Les mathématiques *appliquées,* qui sont, comme l'indique le mot, une application des mathématiques pures à certaines données de l'expérience : la *mécanique,* l'*astronomie* et la *physique dite mathématique.*

Leur méthode. — Les mathématiques emploient surtout la méthode *déductive* et spécialement la *démonstration;* mais elles font aussi appel, dans leurs recherches, à la *méthode d'invention,* méthode qui se rapproche beaucoup de celle qu'emploient les sciences de la nature.

La déduction, on l'a vu, consiste à tirer des axiomes et des définitions, ou des principes acquis soit par la généralisation ordinaire, soit par les sciences expérimentales, les conséquences qui y sont contenues.

Ce mode de raisonnement suppose un type parfaitement connu et une inconnue sur laquelle on a quelques données.

« Toute *déduction* se compose, réduite à sa plus grande simplicité, *d'au moins trois propositions.* La première pose le *principe général,* c'est-à-dire le type connu, le genre ou la loi où doit rentrer l'inconnu. La deuxième fournit les *données* de la question, c'est-à-dire les caractères qui peuvent faire rentrer l'inconnu, la chose en litige, dans la catégorie, dans le genre posé par le principe général. La troisième tire la *conséquence,* c'est-à-dire affirme que l'objet en question a tous les caractères essentiels du genre dans lequel il rentre, toutes les propriétés de la loi sous laquelle il tombe. » (H. JOLY, *Cours de philosophie.*)

Ce qui revient à dire que la forme-type de la déduction est le *syllogisme* et que ses règles sont celles du syllogisme et des raisonnements qui en dérivent (*Voir 1re leçon de Logique.*)

Dans les mathématiques, où l'on part de principes admis comme nécessaires et où l'on aboutit à des conséquences nécessaires, la forme de la déduction est la démonstration. (*Elle est définie plus loin.*)

La démonstration s'appuie sur deux sortes de principes : les principes communs ou *axiomes,* et les principes propres ou *définitions.*

II. — AXIOMES

Définition des axiomes. — Un axiome est une *vérité nécessaire, évidente par elle-même, et qui sert à démontrer d'autres vérités.* Il s'impose à l'esprit dès qu'il est énoncé, si l'on en comprend les termes. « Un axiome doit frapper notre esprit et entraîner notre adhésion, comme les rayons du soleil frappent nos yeux et nous font croire à la lumière. » (BALMÈS.)

Certains philosophes distinguent les axiomes et les vérités premières. Celles-ci sont les lois formelles de la pensée en tant que pensée, c'est-à-dire de la pensée considérée en elle-même, abstraction faite des objets; l'axiome n'est qu'une vérité première énoncée dans une de ses conséquences immédiates, et par conséquent indémontrable.

« Les mathématiciens ne s'entendent pas toujours sur la nature des axiomes. Ainsi Legendre met au nombre des axiomes de géométrie (*Élém. de géom.,* 14e édit., p. 6) ces deux propositions : Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé. — Deux grandeurs sont égales lorsque, étant placées l'une sur l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue. » Ces deux propositions ne sont évidemment que des *définitions ;* la première est la définition du tout, la seconde est la définition ou la marque de l'égalité. — Les axiomes proprement dits ne sont pas de la nature des définitions, mais de la nature des théorèmes. Les définitions font connaître l'essence; les axiomes et les théorèmes, une propriété particulière qui résulte de l'essence... Pour qu'un théorème mérite le nom d'axiome, il faut qu'il énonce une vérité qui non seulement paraisse, à raison de son évidence immédiate, n'avoir pas besoin de démonstration, mais qui ne soit pas susceptible de recevoir de démonstration. Les *axiomes* sont donc des *théorèmes fondamentaux* d'où dérivent les autres théorèmes, et qui ne peuvent dériver d'aucun. Conditions suprêmes de la démonstration, ils en sont aussi les limites extrêmes. » (Rabier, *Logique*.)

Les axiomes sont à la base de toutes les sciences. Il y en a de *grammaticaux :* Tout *adjectif* se rapporte à un *substantif* exprimé ou sous-entendu (application du principe de substance). Point de phrase sans un verbe exprimé ou sous-entendu. — Il y en a de *logiques :* Deux idées qui conviennent à une même troisième conviennent entre elles (*identité*). Toute proposition est vraie ou fausse (*exclusion du milieu*). — Il y en a de *moraux :* Il faut faire le bien et éviter le mal (pr. d'*obligation*). Tout être libre est responsable. Le bien mérite une récompense et le mal un châtiment proportionnés (pr. du *mérite* et du *démérite*). — Il y en a de *physiques :* Les lois de la nature sont stables et générales. Tout fait a une cause. — Il y en a de *mathématiques :* Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles. Si à des quantités égales on ajoute ou l'on retranche des quantités égales, les sommes ou les différences sont égales. (Les axiomes mathématiques se ramènent tous au principe d'identité ou de contradiction.) — Il y en a de *métaphysiques*, et ceux-ci sont les vérités vraiment premières : principe d'*identité :* Ce qui est, est; ou de *contradiction :* Une même chose ne peut pas être et n'être pas en même temps; de *causalité :* Tout fait a une cause; de *finalité :* Rien n'est en vain dans l'univers, tout a une fin; de *substance :* Tout attribut est inhérent à une substance.

Différence : 1° entre les axiomes et les vérités générales. — Un *axiome* est une proposition dont la vérité s'impose à l'esprit dès qu'elle est énoncée. Ainsi : Une chose ne peut pas, sous le même rapport, être ou n'être pas en même temps, voilà un axiome. — Une *vérité générale* est une proposition dont la vérité est démontrée par des observations ou des expériences multipliées, amenant toujours le même résultat. Ainsi : La lumière se meut en ligne droite, la chaleur dilate les corps : voilà des vérités générales.

Outre cette différence qui tient à leur *nature*, il y en a une autre qui vient de leur *rôle* dans les sciences. Les axiomes sont le *point de départ de toutes les sciences*, non qu'on en tire directement celles-ci : par eux-mêmes, les axiomes sont stériles, mais en ce sens que toute science qui contredit un axiome est nécessairement fausse. Les vérités générales sont *particulières à chaque science*, et comme elles sont une synthèse de l'observation ou de l'expérience, on les trouve plutôt au point d'arrivée qu'au point de départ. Tous les axiomes sont des vérités générales, mais toutes les vérités générales ne sont pas des axiomes.

2° Entre les axiomes, les postulats et les théorèmes. — Un *théorème* est l'énoncé d'une proposition qui a besoin d'une démonstration pour devenir évidente.

Un *postulat* (littéralement : *ce qui est postulé ou demandé*) est une proposition qu'on est prié d'accorder pour les besoins de la démonstration, soit au début, soit au milieu d'une série de raisonnements. « On appelle ainsi, d'après Aristote, une proposition qui n'a pas encore été démontrée et qui peut-être ne le sera jamais, mais qu'on est cependant prié d'accorder pour le besoin de la discussion, ou qui se présente comme un complément nécessaire d'un certain ordre d'idées, quoique nous ne puissions pas en donner une preuve directe. » (*Dictionnaire des sciences philosophiques* [1].)

Le postulat n'est pas un *axiome*, c'est-à-dire un principe commun, bien qu'il soit admis sans preuve et qu'on ne puisse le démontrer; ce n'est pas une *hypothèse*, bien qu'il conserve, au moins dans la forme, un caractère hypothétique; ce n'est pas un *théorème*, bien qu'il soit l'énoncé d'une proposition non évidente par elle-même; c'est un *principe*, mais dans le sens où un théorème démontré devient le principe des théorèmes qui en dépendent; c'est un théorème sans démonstration. On peut citer comme exemple cette proposition : *Par un point pris sur un plan, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite de ce plan*, qu'il faut admettre sous peine d'être arrêté dans les développements qui suivent. Le postulat fait fonction de *principe*, puisque tous les raisonnements subséquents reposent sur lui; mais il repose lui-même sur une définition initiale. Ainsi, il serait inutile d'admettre le postulat précédent, si on n'avait préalablement défini deux droites parallèles.

[1] Kant a regardé comme *postulats de la pensée empirique* les lois de la possibilité, de la réalité et de la nécessité des choses, et comme *postulats de la loi morale*, l'existence de Dieu, de la liberté, de la vie future.

Rôle des axiomes. — « Il ne sert de rien, dit Leibniz, de ruminer les axiomes, si on n'a de quoi les appliquer. » Stériles en eux-mêmes à cause de leur indétermination, ils servent au développement de la définition, qui les applique à des objets précis. Le raisonnement ne peut s'en passer, ils en sont l'âme même.

L'axiome sur lequel s'appuie le syllogisme, *deux choses qui conviennent à une même troisième conviennent entre elles*, n'est ni l'une ni l'autre des prémisses; mais c'est par lui que l'esprit relie entre eux les termes et rattache la conclusion aux prémisses.

Règles de Pascal pour les axiomes. — Dans son petit traité *de l'Esprit géométrique*, Pascal donne les règles suivantes :

1° *N'admettre aucun principe nécessaire sans avoir demandé si on l'accorde en axiome, quelque clair et évident qu'il puisse être.*

S'il n'est pas accordé en axiome, sa négation renverse tout l'échafaudage de raisonnements qu'on a élevé dessus. De plus, comme les axiomes sont le fondement de la démonstration, s'ils sont douteux, les conclusions le sont aussi, et il n'y a pas de démonstration.

2° *Ne demander en axiomes que les choses parfaitement évidentes.*

Ainsi, quand on énonce cet axiome, que *deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles*, on suppose qu'on a défini, pour chaque espèce de grandeur, la notion d'égalité, laquelle est souvent délicate à définir : l'égalité des nombres ne se définit pas de la même manière que l'égalité en géométrie, qui est la superposition, que l'égalité des surfaces, qu'on appelle en géométrie l'équivalence, que l'égalité des forces en mécanique, etc.

Rousseau a manqué à cette seconde règle, dans son *Émile*, en partant de ce prétendu axiome que « l'homme naît bon et que c'est la société qui le corrompt ». On y manquerait également, si on voulait prendre ou imposer comme axiomes les maximes, sentences, proverbes, aphorismes, qui n'expriment souvent que des vérités incomplètes, mais en imposent par leur tour concis et affirmatif. Ainsi on ne pourrait, en jurisprudence, ériger en axiome ce mot de Médée à Jason, que *celui à qui sert le crime en est le coupable;* cela est souvent vrai, mais pas toujours.

III. — DÉFINITION

La *définition* est une *proposition qui détermine d'une manière précise le sens d'un mot ou la nature d'une chose.* On précise une idée ou un être par l'énumération des éléments ou des caractères essentiels de cette idée ou de cet être. De là le mot très juste des scolastiques : *La définition est une proposition dont l'attribut développe toute la compréhension du sujet;* la compréhension, c'est-à-dire l'ensemble des éléments ou des caractères essentiels. La définition est l'*expression de l'essence,* a dit Aristote; l'attribut, en effet, exprime l'essence du sujet, s'il en égale la compréhension.

Au sens étymologique, définir (*finis, limite*), c'est délimiter, tracer la ligne de démarcation entre une idée, une chose, et celles qui l'entourent et avec lesquelles on pourrait la confondre; c'est marquer sa place dans la hiérarchie des idées, des choses. Une chose est définie, quand ce qu'on en énonce la distingue de toute autre.

Au sens scientifique, la définition consiste à marquer le genre et l'espèce auxquels appartient l'objet à définir; on définit par le *genre prochain* et par la *différence spécifique.* Le genre indique en quoi une idée ou un être ressemble à d'autres, et l'espèce en quoi il en diffère.

Le *genre prochain* est celui qui se rapproche le plus de l'objet à définir ou qui le contient immédiatement. Ainsi, il faut définir le *cuivre,* non par le mot général *être* ou *corps,* mais par le mot *métal.*

La *différence spécifique* est ce qui distingue l'objet à définir des autres objets renfermés dans le même genre prochain. Ainsi, le cuivre, l'or, l'argent, qui appartiennent au même genre prochain *métal,* diffèrent par leurs propriétés.

EXEMPLES. — L'homme est un animal (*genre*) raisonnable (*espèce*). Une étoile est un astre (*genre*) qui brille de sa propre lumière (*espèce*). Le carré est un quadrilatère (*genre*) qui a les côtés égaux et les angles droits (*espèce*). Le misanthrope est un homme (*genre*) qui hait les hommes (*espèce*). Un labeur est un travail (*genre*) pénible (*espèce*).

Deux sortes de définitions. — Quoique d'ordinaire la définition de mots soit en même temps une définition de choses, on distingue cependant : la définition de *mots,* qui consiste à déterminer le sens des mots; la définition de *choses,* qui est l'explication de la nature et des propriétés des choses.

1° **Définitions de mots.** — La définition de mots est arbitraire et variable, et, par conséquent, de nulle valeur pour la démonstration; mais elle est utile et même nécessaire pour la discussion. S'il est loisible à chacun de donner à tel mot tel sens qu'il voudra, encore faut-il, sous peine de ne jamais s'entendre, qu'il définisse ce sens et ne le change pas pendant la discussion.

Rien de plus commun, dans l'histoire d'une langue, que les changements de sens des mots; tout mot *vivant* suit une évolution dans le sens, comme dans la

forme. C'est ainsi que les mots *sens commun* et *volonté,* par exemple, n'avaient pas en philosophie au XVIIe siècle, particulièrement dans Bossuet, le sens qu leur est attribué aujourd'hui. Le *sens commun,* chez l'animal, était la conscience sensitive, où toutes les impressions se centralisent et s'ordonnent suivant les circonstances. Nous l'appelons aujourd'hui *sens intime,* et le mot sens commun, au moins dans la langue courante, n'est plus employé que pour désigner l'ensemble des notions premières accessibles à tous les hommes. La définition que Bossuet donnait de la *volonté* ou *appétit* rationnel, nous l'appliquons plutôt au *sentiment.*

2° **Définition de choses.** — La définition de choses n'est point arbitraire, et elle sert de base à la démonstration. Elle suppose la possibilité de son objet : ce qui est impossible, c'est-à-dire contradictoire, ne peut être ni connu ni défini.

Définitions empiriques et définitions rationnelles. — Les définitions *empiriques* ou *inductives,* propres aux sciences d'observation, ont pour objet de faire connaître la nature des êtres réels; elles n'ont qu'une valeur relative et se perfectionnent avec les sciences; elles sont *progressives* et partant *provisoires.*

Souvent un fait nouveau, inconnu jusque-là, vient modifier l'idée qu'on s'était formée d'un genre, ou d'une espèce, ou même d'un phénomène. L'idée de la poésie, comme l'idée de la science, comme celle du droit, comme toutes les idées générales, se précisent, se complètent, s'éclairent, s'enrichissent, avec l'éducation, avec l'étude, avec la comparaison des civilisations.

Les définitions *rationnelles* ou *déductives* ou *à priori,* propres aux sciences exactes, se rapportent à des idées abstraites. Elles sont *parfaites* du premier coup, *définitives* et *immuables :* l'esprit les produisant librement y met ce qu'il veut et sait ce qu'il y met. Exemple : la définition du carré, du cercle. Elles sont *nécessaires,* en ce sens que les rapports qu'elles expriment ne peuvent être changés. Elles sont *universelles :* ainsi le lieu des points à égale distance d'un point fixe est et sera toujours et partout un cercle.

Une définition *à priori* part d'un premier attribut pour en déduire les autres, elle est *explicative.* Il n'en saurait être ainsi des notions concrètes qui représentent la réalité dans sa complexité : les définitions des êtres réels ne font guère que constater l'existence de leurs caractères essentiels. Ce qui fait que les notions abstraites, les figures de géométrie, les fonctions algébriques, ou encore certains phénomènes séparés de la substance, tels que le mouvement, peuvent être clairement définis, c'est précisément leur caractère abstrait qui diminue ou détruit la complexité qu'ils ont toujours, quand ils sont mêlés à la réalité.

Cependant cette différence entre les définitions géométriques et les définitions naturelles « n'est qu'accessoire et accidentelle ; les définitions naturelles tendent, comme les définitions géométriques, à devenir explicatives, et il n'y a pas entre ces deux sortes de définitions l'espèce d'opposition symétrique qu'on y a cru voir. Les unes et les autres expriment des lois essentielles et dépendantes de la pensée ; les objets des unes et des autres sont hiérarchisés en genres et en espèces, et si ces notions jouent en géométrie un rôle moindre qu'en histoire naturelle, c'est à cause de la plus grande simplicité des objets géométriques, plus faciles à connaître et dès lors à expliquer. De toutes façons, la définition exprime l'essence, ou, comme dit Aristote, la forme de l'être ». (FONSEGRIVE, *Logique,* II.)

Pour ce qui est *de la part de l'expérience dans ces définitions*, on peut dire, avec M. Fonsegrive, que « les définitions sont suggérées à l'esprit par l'expérience, puis rectifiées par l'esprit, et enfin énoncées de manière à exprimer la loi d'après laquelle l'objet de la définition est construit. Ainsi, l'expérience montre à l'œil des figures à peu près circulaires : l'horizon, l'arc-en-ciel les ronds que fait une pierre en tombant dans l'eau ; à l'occasion de ces cercles, l'esprit conçoit la vraie figure circulaire, celle dont tous les points extérieurs sont à égale distance d'un point intérieur ; et enfin, se demandant par quel procédé il pourrait construire le cercle ainsi conçu, l'esprit voit que ce cercle est engendré par la révolution d'une droite autour d'un point. Exprimant alors cette loi de construction, on a la définition du cercle, non pas seulement descriptive, mais explicative, ou, comme disent les géomètres, par *génération :* le cercle est une figure courbe plane, engendré par la révolution d'une droite autour d'un point. »

Rôle et place des définitions. — De tous ces caractères des définitions mathématiques, on peut facilement déduire *leur rôle.* Elles sont le point de départ et le point d'appui de la démonstration[1]. Puisqu'elles disent l'essence et la loi génératrice de leur objet, les poser, c'est poser du même coup les propriétés secondaires qui sont l'objet des théorèmes. De la définition du triangle découle la science de toutes ses propriétés et, en particulier, la trigonométrie rectiligne. C'est parce que les définitions sont le *point de départ* des sciences *déductives* et qu'elles servent de prémisses à la démonstration qu'on les place au commencement des traités ; au contraire, dans les sciences *inductives*, elles sont le *but*, et leur place est à la fin. « Les définitions géométriques sont des *principes de connaissance ;* les définitions empiriques ne sont que des *résumés.* Les unes et les autres contiennent la science à l'état virtuel, mais avec cette différence que les premières en précèdent le développement et que les secondes le suivent. (Liard.)

Règles de Pascal pour les définitions. — Définitions de mots : 1° définir tout mot obscur ou équivoque ; 2° n'employer dans les définitions que des mots bien connus et déjà définis.

Ainsi, on emploie souvent et à tort, en mathématiques, les mots *petit, grand,* qui ne sont pas nettement définis. A quel moment une grandeur commence-t-elle à devenir petite ou grande ? — De même la locution *l'infini* est souvent employée sans répondre d'une manière adéquate à l'idée d'infini. Le nombre infini serait un nombre arrivé au moment où il ne pourrait plus croître ; or un tel nombre ne peut être conçu ; l'esprit se refuse à l'admettre. En mathématiques, on ne doit jamais entendre, par quantité *infinie*, qu'une *quantité variable qui croît de manière à surpasser toute limite.*

On peut ajouter : ne pas changer sans raison le sens des mots reçus ; et si l'on est obligé de créer un mot nouveau pour exprimer une idée nouvelle, il faut qu'il soit clair et conforme aux règles de l'analogie.

Actuellement, pour lire certains journaux scientifiques, il faudrait un glossaire particulier à chaque auteur. — Il importe de ne pas prendre des mots nouveaux pour des idées nouvelles. Les philosophes allemands surtout ont abusé de la création de mots nouveaux. Schopenhauer a dit de Kant : « L'obscurité qu'il mit parfois en son exposition fut surtout fâcheuse par le mauvais exemple qu'elle donna. » Aussi Taine a-t-il pu dire avec esprit : « Un Français peut conclure qu'un philosophe commence à se tromper, lorsqu'il introduit dans le français des mots allemands. »

[1] Dans la démonstration d'un théorème, il faut, à tout moment, s'en référer à la définition.

Définitions de choses : n'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes qu'on n'ait pas de terme plus clair pour les expliquer.

Limites de la définition. — L'*individuel* et l'*universel absolu* ne peuvent être définis, parce que, dans le premier cas, la compréhension, et dans le second l'extension, sont sans limites. L'idée d'*être*, par exemple, ne peut rentrer dans un genre plus étendu, et l'*individu*, par le nombre infini de ses attributs, échappe à toute compréhension qui puisse l'embrasser.

La définition doit donc évoluer entre la réalité individuelle et l'idée d'être la plus générale de toutes.

Caractères d'une bonne définition. — Elle doit être :

1° *Complète* ou *universelle,* c'est-à-dire convenir à *tout le défini,* l'embrasser tout entier ;

2° Être *propre,* convenir au *seul défini*[1] *;* — quand une définition est à la fois universelle et propre, on dit qu'elle est *adéquate,* c'est-à-dire qu'elle égale l'objet ;

3° *Réciproque* ou *convertible :* rester vraie, si l'ordre des termes est renversé. C'est un moyen de vérification.

4° *Positive :* on ne définit pas par une négation.

Voilà pour le fond ; quant à la forme, elle doit être *claire,* sinon elle manquerait son but ; *concise* et *portative,* sans quoi l'esprit ne peut facilement l'embrasser d'un regard, et elle fatigue la mémoire.

Ces caractères étant connus, il est facile de *critiquer* les *définitions défectueuses,* qui peuvent être : trop *larges* (convenir plus qu'au seul défini) ; trop *étroites* (ne pas embrasser tout le défini) ; *surabondantes* (disant plus qu'il n'est nécessaire) ; *tautologiques* (répétant le terme à définir) ; *métaphoriques* ou *poétiques* (faites au moyen de comparaisons) ; *négatives* (disant ce que n'est pas la chose, non ce qu'elle est).

— On a défini la reconnaissance : *mémoire du cœur.* Cette définition manque des deux caractères essentiels de toute bonne définition : elle n'est pas *universelle :* il y a autre chose dans la reconnaissance que la mémoire du cœur ; elle n'est pas *propre :* la mémoire du cœur, c'est aussi bien la haine, l'amitié, l'amour du pays, que la reconnaissance. Enfin elle n'est pas *convertible.*

Avantages de la définition. — L'usage de la définition fait contracter à l'esprit l'habitude de l'ordre et de la méthode, donne le goût de l'exactitude, de la clarté, de la propriété dans les termes. On est moins exposé à se payer de mots ou de sophismes, quand on s'est fait une nécessité de voir clair dans le sens de tous les termes employés dans le raisonnement.

[1] Ces deux caractères répondent au *genre prochain* et à la *différence spécifique.*

IV. — DÉMONSTRATION

Définition. — On appelle *démonstration*, en général, *tout raisonnement qui prouve avec évidence.*

La démonstration, au sens propre du mot, consiste à *montrer qu'une vérité particulière est renfermée, à titre de conséquence, dans un principe nécessaire, évident ou déjà démontré.* C'est le syllogisme du nécessaire.

La démonstration se fait par le raisonnement déductif, mais il ne faut pas la confondre avec lui. On *déduit* toutes les fois qu'on tire les conséquences d'une vérité générale; mais il n'y a proprement *démonstration* que quand on part d'une vérité nécessaire ou regardée comme telle, et qu'on aboutit à une vérité nécessaire.

La démonstration s'appuie sur deux sortes de principes : les principes communs ou *axiomes*, et les principes propres ou *définitions*. (Voir les *Tableaux analytiques*, page 26.)

Diverses sortes de démonstration. — On distingue la démonstration *directe* et la démonstration *indirecte* ou réduction à l'*absurde*.

a) Démonstration directe. — La démonstration *directe* est celle qui fait voir la raison pour laquelle une proposition est vraie. C'est la seule vraiment philosophique. « Notre esprit n'est point satisfait s'il ne sait, non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est. » (PORT-ROYAL.)

La démonstration directe comprend :

1° La démonstration *à posteriori, ascendante* ou *analytique*, qui se tire des conséquences ou des effets. Elle consiste à remonter d'une proposition ou d'une vérité particulière à ses antécédents, c'est-à-dire à des vérités plus simples et plus générales, déjà démontrées, ou aux principes sur lesquels elle repose directement. On remonte d'une proposition douteuse à celle qu doit la rendre évidente.

Prenons un exemple simple : *Inscrire un hexagone régulier dans une circonférence donnée.* On suppose le problème résolu et l'on tire une corde qui est, par hypothèse, le côté de l'hexagone demandé. On joint au centre les extrémités de cette corde par des rayons, et l'on a un triangle équiangle, et par conséquen équilatéral, et l'on voit que le côté de l'hexagone est égal au rayon. Pour inscrire un hexagone dans une circonférence donnée, il suffit donc de porter six fois le rayon sur la circonférence. Voilà une démonstration analytique.

Autre exemple, pris en dehors des mathématiques : La création du monde, où l'on ne voit que des êtres contingents, ne peut s'expliquer que par une cause nécessaire; donc cette cause nécessaire existe. — Le remords punit le coupable, et le témoignage de la conscience récompense le juste; donc il existe une loi morale ou obligation pour l'homme de faire ce qui est bien et d'éviter ce qui est mal.

2° La démonstration *à priori, descendante ou synthétique*, qui se tire des principes, des causes ou de la nature même de la chose à prouver. On va d'une proposition incontestée à une proposition douteuse qu'on veut établir. De la proposition reconnue vraie on déduit une conséquence, puis d'autres, jusqu'à ce qu'on arrive au théorème ou à la proposition à démontrer.

Soit à recommencer synthétiquement le problème ci-dessus, qui sera transformé en théorème comme suit : *Le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.* Le dernier mot de la démonstration analytique devient le premier mot de la démonstration synthétique. On prend une corde égale, par construction, au rayon; cette corde sera le côté cherché de l'hexagone régulier inscrit. On joint les extrémités au centre, et l'on a un triangle équilatéral, par conséquent équiangle; chaque angle vaut donc 60°, sixième partie de quatre droits, et l'arc que sous-tend la corde est la sixième partie de la circonférence. Cette corde est donc le côté de l'hexagone régulier inscrit. — Quand on dit : Il n'y a pas de fait sans cause; donc, tout ce qui n'a pas en soi la cause de son existence, c'est-à-dire sa raison d'être, vient d'un autre, — on fait aussi une démonstration *à priori*.

b) Démonstration indirecte. — La démonstration *indirecte* ou *réduction à l'absurde*, ou encore *démonstration par l'impossible*, prouve une vérité en faisant voir l'absurdité de l'hypothèse contraire, en énumérant les conséquences fausses ou inadmissibles qu'entraînerait la négation de la proposition affirmée. — Ainsi on démontre par l'absurde que par un point pris hors d'une droite on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite. De même on démontre la liberté en disant que si l'homme n'est pas libre, il n'y a plus ni bien ni mal, ni vice ni vertu, et l'on ne comprend rien au langage et aux institutions des hommes, qui impliquent la liberté.

La démonstration indirecte peut convaincre l'esprit, elle ne l'éclaire pas, ne le développe pas; elle n'atteint pas le but de la démonstration, qui est de donner les raisons, de faire connaître le pourquoi et le comment des choses. Il ne faut donc l'employer en mathématiques que lorsque toute autre démonstration est impossible. On s'en sert utilement en philosophie pour réfuter les systèmes qui ont des conséquences opposées au sens commun.

REMARQUE. — Tirer les conséquences d'un principe est un moyen expéditif de s'assurer de sa vérité ou de sa fausseté. Le faux ne peut naître que du faux, le vrai du vrai. Bossuet fait remarquer que « les raisonnements par l'absurde sont fondés sur cette proposition : *tout ce d'où il résulte quelque chose de faux est faux*, parce qu'en effet la vérité se soutient elle-même dans toutes ses conséquences ».

Règles pour la démonstration. — La Logique de Port-Royal les résume ainsi, d'après Pascal : « 1° N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes par elles-mêmes, qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver; 2° Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées; 3° Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints, » c'est-à-dire avoir toujours devant les yeux la définition.

Il faut se rappeler que le syllogisme ne garantit pas la vérité des prémisses d'où sort la conclusion, et qu'il faut, avant tout, s'assurer de l'exactitude de ces prémisses; — ne pas mettre dans la conclusion plus que dans les prémisses; pour cela, conserver aux termes, dans tout le cours des raisonnements, une signification identique et nettement définie.

V.— CARACTÈRES DES LOIS ET RÔLE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Caractères des lois mathématiques; comment elles diffèrent des lois physiques et naturelles. — Les théorèmes démontrés sont des lois mathématiques. Ces lois expriment les rapports *nécessaires* qui dérivent ou de la nature des nombres (*arithmétique*), ou de celle de l'étendue (*géométrie*), ou de celle des mouvements (*mécanique*). Ainsi, c'est une loi, que tout nombre qui en divise plusieurs autres divise leur somme; que le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés faits sur les deux autres côtés du triangle; que le mouvement d'un corps soumis à l'action d'une force constante est un mouvement uniformément varié[1].

Les lois mathématiques sont les lois de l'idéal, de l'abstrait; elles sont établies par le raisonnement déductif et non découvertes par l'expérience, comme les lois des sciences physiques et naturelles. « Quoique, historiquement, beaucoup de vérités mathématiques aient été suggérées par l'expérience, c'est en dehors de l'expérience et d'une autre preuve que l'expérience qu'elles ont reçu cette consécration immuable et définitive, qui leur a conféré l'*exactitude*, l'*universalité*, la *nécessité* absolues. » (RABIER, *Logique.*)

Les vérités mathématiques sont *nécessaires* d'une nécessité absolue : le contraire est impossible; les lois physiques sont *contingentes :* elles n'impliquent pas l'impossibilité du contraire. Les premières n'admettent ni exceptions ni conditions restrictives possibles : c'est ce qui résulte de leur caractère *analytique;* on ne saurait empêcher le même d'être le même, pendant qu'il est le même; les secondes, au contraire, sont toujours *conditionnelles :* un même antécédent détermine un même conséquent, pourvu que rien n'intervienne entre l'antécédent et le conséquent, qui sont deux faits distincts et successifs.

Les vérités mathématiques sont *analytiques* (il s'agit ici des mathématiques pures, non des mathématiques appliquées : astronomie, mécanique); elles sont fondées sur la comparaison des idées, et il y a entre le sujet et l'attribut, entre l'hypothèse et la conclusion, un lien d'identité. Les lois physiques sont *synthétiques;* elles sont fondées sur la comparaison, non des idées, mais des faits; le lien entre le sujet et l'attribut résulte de l'observation ou de l'expérience.

Les premières sont obtenues par un travail purement intellectuel ou idéal, où les figures sensibles, nécessairement imparfaites, bien qu'on ne puisse s'en passer, ne sont qu'accessoires et ne servent pas à découvrir la vérité; elles ne dépendent donc nullement, quant à leur certitude, de l'exactitude des figures

[1] Il est bon de remarquer que cette proposition : *les lois de la mécanique expriment des rapports nécessaires qui dérivent de la nature du mouvement*, n'est vraie que pour la partie appelée *cinématique*. La mécanique proprement dite repose sur des lois qui sont des vérités *contingentes*, tirées de l'expérience (lois de l'inertie, loi de l'indépendance des effets des forces, loi de l'égalité de l'action et de la réaction). On peut, sans contradiction *logique*, les nier; Aristote, Descartes, avaient imaginé des *mécaniques* logiques, et cependant en contradiction avec certaines de ces lois.

qui servent à représenter leurs hypothèses ou leurs conclusions[1]. Les secondes sont découvertes par une observation rigoureusement exacte des faits sensibles et dépendent absolument de l'exactitude des expériences. Toute erreur d'observation sur le fait particulier réagit sur la loi générale.

Les vérités mathématiques, étant *absolues*, sont supérieures aux faits et ne peuvent jamais être démontrées par eux, ce qui permet de déclarer fausse *à priori* toute expérience contraire; les lois physiques, étant *conditionnelles*, sont toujours soumises à la vérification des faits; leur *certitude* est contrôlée, et au besoin limitée, par les nouvelles observations.

Ce qui fait que les mathématiques sont des sciences exactes et certaines par excellence, c'est que, construisant leurs objets de toutes pièces, elles savent toutes les propriétés qu'elles y ont mises; au contraire, les sciences de la nature, trouvant leurs objets dans la réalité, ne sont jamais assurées de les connaître à fond et définitivement. Dans les mathématiques ou sciences de démonstration, ce qui est acquis, étant déduit rigoureusement de principes nécessaires ou regardés comme tels, est parfait et définitif; dans les sciences d'observation, au contraire, il est indéfiniment perfectible.

Est-ce à dire que la certitude des mathématiques soit, en elle-même, supérieure à la certitude des sciences naturelles? Non, sans doute; car la certitude complète est absolue et, partant, égale à elle-même. Si cependant nous considérons une vérité scientifique, telle que la circulation du sang, et une vérité mathématique, telle que le rapport de l'hypoténuse aux autres côtés d'un triangle rectangle, nous trouverons cette différence : que la première peut nous être mieux connue, tandis que la seconde est marquée d'un tel caractère de nécessité, qu'une fois connue, elle ne saurait l'être mieux.

Rôle des sciences mathématiques dans les autres sciences. — Les mathématiques ont des applications dans toutes les sciences; elles servent à leur donner le caractère de précision qu'elles réclament pour être de vraies sciences. Une science n'est constituée que quand elle peut mesurer les faits dont elle s'occupe. Ainsi la chimie emploie les formules chimiques, les équivalents; elle a fait un grand pas, quand Lavoisier y a introduit la balance. Pour l'électricité, on a longtemps cherché une unité de mesure; en 1881, le Congrès des électriciens, tenu à Paris, a adopté l'*unité de résistance* sous le nom d'*ohm;* celle de *force électro-motrice*, sous le nom de *volt;* celle d'*intensité de courants*, sous le nom d'*ampère*, etc.

Pour la quantité de chaleur développée ou absorbée par les corps dans les phénomènes calorifiques, l'unité de mesure est la *calorie*. La météorologie a des *baromètres* pour mesurer la pression de l'atmosphère, des *hygromètres* et des *thermomètres* pour en mesurer l'humidité et la chaleur, des *anémomètres* pour noter la direction et l'intensité des vents, des *pluviomètres* pour savoir la quantité de pluie tombée dans telle région donnée.

L'éducation physique elle-même emprunte aux mathématiques leurs méthodes. Un éminent physiologiste de Turin, M. Mosso, a inauguré, il y a peu de temps, des recherches sur les effets des différents exercices physiques. Il existe des méthodes précises pour mesurer les résultats. Le *dynamomètre* permet d'évaluer l'augmentation de force des muscles; le *spiromètre*, l'augmentation de l'ampleur des mouvements respiratoires; le *thoracomètre*, l'augmentation du thorax; la balance même peut donner des renseignements utiles.

En *physiologie*, on peut noter l'application de l'optique mathématique à la théorie de l'œil, de l'acoustique mathématique à l'étude de l'audition, etc.

En *sociologie*, ce sont les *statistiques* ou tableaux comparatifs des faits sociaux qui marquent l'intervention des mathématiques. En *criminologie*, c'est par des statistiques et par des moyennes qu'on essaye de dégager des indications générales, des lois. On les emploie fréquemment dans les *affaires judiciaires*,

[1] On a souvent dit que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites.

dans le *commerce* et l'*industrie* aussi : on fait des statistiques de telle production par année, par régions. En *botanique*, pour les maladies de la vigne, par exemple, on a de nombreux champs d'expérience, et c'est par des statistiques qu'on en synthétise les résultats.

En *biologie*, on mesure les phénomènes physico-chimiques par lesquels se manifeste la vie ; en *psychologie*, ceux qui accompagnent les états de conscience ou en sont les conditions ; mais on ne saurait mesurer ni ces états eux-mêmes, ni la vie, ni la pensée, qui ne sont pas réductibles à la quantité.

Il est bon toutefois de remarquer que les applications des mathématiques à l'éducation physique, par exemple, à la criminologie, etc., présentent rarement le caractère d'applications vraiment scientifiques, et qu'il s'y mêle d'ordinaire beaucoup d'utopie.

Avantages et abus de la méthode géométrique. — Après avoir fait le procès des sciences mathématiques au point de vue éducatif, Hamilton se pose les questions suivantes : « Les mathématiques n'ont-elles donc aucune valeur comme instrument de culture intellectuelle? Bien plus, ne sont-elles bonnes qu'à fausser l'esprit? A cela nous répondrons (ajoute-t-il) que cette étude, poursuivie avec modération et efficacement contre balancée, peut être utile pour corriger un défaut et développer la qualité correspondante. Ce défaut est l'habitude de la distraction; la qualité, l'habitude de l'attention soutenue. »

Cette phrase d'Hamilton n'indique pas tous les avantages de l'étude des mathématiques; on peut ajouter les suivants : 1° la démonstration des théorèmes exerce l'esprit à ranger ses pensées en ordre et à faire des raisonnements rigoureux; 2° la recherche des problèmes donne l'habitude de l'analyse et apprend à distinguer clairement, dans une question posée, toutes les données et toutes les inconnues.

Nombre de savants ont protesté contre l'abus de la méthode des mathématiques, entre autres Pascal et d'Alembert : « Quelques philosophes, dit celui-ci, trouvant cet appareil propre à en imposer, sans doute parce qu'il les avait séduits eux-mêmes, l'ont appliqué indifféremment à toutes sortes de sujets; ils ont cru que raisonner en forme, c'était raisonner juste; mais ils ont montré par leurs erreurs qu'entre les mains d'un esprit faux ou de mauvaise foi, cet extérieur mathématique n'est qu'un moyen de se tromper plus aisément soi-même et les autres. » Cuvier dit que « les premiers éléments des sciences n'exercent pas assez la logique, précisément parce qu'ils sont trop évidents, et c'est en s'occupant des matières délicates de la morale et du goût qu'on acquiert cette finesse de tact qui conduit seule aux hautes découvertes ». Et Biot, qui a joint l'exemple au précepte, comme Cuvier et Pascal, du reste : « Appliquez-vous d'abord à exercer, assouplir, perfectionner les ressorts de votre esprit par l'étude des lettres. N'écoutez pas ceux qui les dédaignent; on n'a jamais eu lieu de s'apercevoir qu'ils fussent plus savants pour être moins lettrés. »

L'esprit géométrique est une espèce particulière de l'esprit scientifique, mais il n'est que cela; vouloir l'appliquer dans tous les ordres de vérités, c'est s'exposer aux plus graves erreurs, ou, tout au moins, se borner à une seule branche de vérités et laisser de côté les vérités morales, ce qui conduit fatalement au positivisme. Dans les sciences de l'abstrait ou de l'idéal, comme les mathématiques, il suffit, pour être dans le vrai, que l'esprit reste d'accord avec lui-même et qu'il tire logiquement les conséquences des principes posés. Dans les sciences du réel et du concret, il faut de plus qu'il s'accorde avec la nature, et c'est ce que ne fait pas facilement l'esprit géométrique, habitué à rester indépendant des faits d'expérience et à fonder uniquement la science sur des données rationnelles. « Toutes les utopies antisociales, dit Aug. Comte, ont trouvé de nombreux et actifs partisans chez les élèves les mieux dominés par une éducation mathématique. »

4e LEÇON

METHODE DES SCIENCES DE LA NATURE

I. — OBJET, DIVISION, MÉTHODE DES SCIENCES DE LA NATURE

Leur objet. — Les *sciences physiques* ont pour objet d'expliquer les phénomènes de la nature, c'est-à-dire de découvrir les causes qui les produisent et les lois qui les régissent; les *sciences naturelles* ont pour but la connaissance de la nature elle-même, tant dans sa constitution propre que dans ses manifestations (phénomènes géologiques et phénomènes vitaux).

Les unes et les autres ont à résoudre successivement deux problèmes : avoir une connaissance exacte des *êtres* et des *faits* en eux-mêmes, ce qui est l'objet de l'observation et de l'expérimentation ; puis, de la connaissance des êtres et des faits, passer à celle des *lois* et des *causes*, ce qu'on fait par l'induction.

Négliger le premier problème, c'est rendre la science hypothétique et incertaine : on ne devine pas, les yeux fermés, les lois des choses réelles, on les dégage de l'analyse des choses mêmes. Négliger le second, c'est transformer la science en une érudition indigeste et stérile. Ce n'est qu'au moment où les lois et les causes se dégagent que la science prend naissance.

La science est *du savoir coordonné*. Observer suffit pour connaître les faits; pour les coordonner, c'est-à-dire pour constituer la science, il faut comparer, abstraire, généraliser : une collection de faits incohérents n'est pas la science. La comparaison amène d'abord à constater des analogies et des différences, puis à définir et à classer. Les idées générales ne sont, au fond, que des analogies générales, dans lesquelles on fait rentrer, on classe plusieurs séries d'êtres ou de faits. Quand on a formé une *série de séries*, on a une *science*. La science proprement dite serait la série universelle des faits et des lois; ne pouvant l'avoir, on entend par là le savoir humain tel qu'il est actuellement coordonné.

Quand il s'agit d'êtres constitués, tels que minéraux, plantes, animaux, la science se propose de trouver l'ordre ou *loi de coexistence* des caractères, c'est-à dire *des types;* quand il s'agit de faits ou phénomènes, comme la chute d'un corps, la liquéfaction d'un métal, la solidification d'un gaz ou d'un liquide, la science cherche l'ordre ou *loi de succession*. Dans un cas comme dans l'autre, il s'agit de trouver un *rapport général et constant* de simultanéité ou de succession entre un phénomène ou un groupe de phénomènes *conditionnant*, et un phénomène ou un groupe de phénomènes *conditionné*.

Il importe d'avoir le sens précis de ces termes : *cause, loi, type*. On a déjà vu (*Préliminaires*, 1re leçon) la différence entre la *cause* et la *loi*. Voyons celle qu'il y a entre la *loi* et le *type*. — La *loi* implique l'idée de phénomènes *successifs;* le *type*, celle de phénomènes ou de caractères *simultanés*. La *loi* est le *lien*, la *consécution constante des phénomènes*. Exemple : la loi de la dilatation des gaz. Le *type* est le *rapport de coexistence des caractères*, le rapport constant et immuable des formes. Exemple : le type vertébré, le type mollusque.