

ronds que fait une pierre en tombant dans l'eau; à l'occasion de ces cercles, l'esprit conçoit la vraie figure circulaire, celle dont tous les points extérieurs sont à égale distance d'un point intérieur; et enfin, se demandant par quel procédé il pourrait construire le cercle ainsi conçu, l'esprit voit que ce cercle est engendré par la révolution d'une droite autour d'un point. Expriment alors cette loi de construction, on a la définition du cercle, non pas seulement descriptive, mais explicative, ou, comme disent les géomètres, par *génération*: le cercle est une figure courbe plane, engendré par la révolution d'une droite autour d'un point. » (*Loc. cit.*, XII^e leçon.)

Rôle et place des définitions. — De tous ces caractères des définitions mathématiques, on peut facilement déduire leur rôle. Elles sont le point de départ et le point d'appui de la démonstration¹. Puisqu'elles disent l'essence et la loi génératrice de leur objet, les poser, c'est poser du même coup les propriétés secondaires qui sont l'objet des théorèmes. De la définition du triangle découle la science de toutes ses propriétés et, en particulier, la trigonométrie rectiligne. C'est parce que les définitions sont le *point de départ* des sciences *déductives* et qu'elles servent de prémisses à la démonstration qu'on les place au commencement des traités; au contraire, dans les sciences *inductives*, elles sont le *but*, et leur place est à la fin. « Les définitions géométriques sont des *principes de connaissance*; les définitions empiriques ne sont que des *résumés*. Les unes et les autres contiennent la science à l'état virtuel, mais avec cette différence que les premières en précèdent le développement et que les secondes les suivent. » (LIARD.)

Règles de Pascal pour les définitions. — Définitions de mots: 1^o définir tout mot obscur ou équivoque; 2^o n'employer dans les définitions que des mots bien connus et déjà définis.

Ainsi, on emploie souvent et à tort, en mathématiques, les mots *petit*, *grand*, qui ne sont pas nettement définis. A quel moment une quantité commence-t-elle à devenir petite ou grande? — De même la locution *l'infini* est souvent employée en mathématiques sans répondre d'une manière adéquate à l'idée d'infini. Le nombre infini serait un nombre arrivé au moment où il ne pourrait plus croître; or un tel nombre ne peut être conçu; l'esprit se refuse à l'admettre. En mathématiques on ne doit jamais entendre, par quantité *infinie*, qu'une *quantité variable qui croît de manière à surpasser toute limite*.

On peut ajouter: ne pas changer sans raison le sens des mots reçus; et si l'on est obligé de créer un mot nouveau pour exprimer une idée nouvelle, il faut qu'il soit clair et conforme aux règles de l'analogie.

Actuellement, pour lire certaines publications scientifiques, il faudrait un glossaire particulier à chaque auteur. — Il importe de ne pas prendre des mots nouveaux pour des idées nouvelles. Les philosophes allemands surtout ont abusé de la création de mots nouveaux. Schopenhauer a dit de Kant: « L'obscurité qu'il mit parfois en son exposition fut surtout fâcheuse par le mauvais exemple qu'elle donna. » Aussi Taine a-t-il pu dire avec esprit: « Un Français peut conclure qu'un philosophe commence à se tromper, lorsqu'il introduit dans le français des mots allemands. »

Définitions de choses: n'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait pas de terme plus clair pour les expliquer.

¹ Dans la démonstration d'un théorème, il faut, à tout moment, s'en référer à la définition.

Limites de la définition. — L'*individuel* et l'*universel absolu* ne peuvent être définis, parce que, dans le premier cas, la compréhension, et dans le second l'extension, sont sans limites. L'idée d'*être*, par exemple, ne peut rentrer dans un genre plus étendu, et l'*individu*, par le nombre infini de ses attributs, échappe à toute compréhension qui puisse l'embrasser.

La définition doit donc évoluer entre la réalité individuelle et l'idée d'être la plus générale de toutes.

Caractères d'une bonne définition. — Elle doit être:

1^o *Complète* ou *universelle*, c'est-à-dire convenir à *tout le défini*, l'embrasser tout entier;

2^o *Être propre*, convenir au *seul défini*¹; — quand une définition est à la fois universelle et propre, on dit qu'elle est *adéquate*, c'est-à-dire qu'elle égale l'objet;

3^o *Réciproque* ou *convertible*: rester vraie, si l'ordre des termes est renversé. C'est un moyen de vérification.

4^o *Positive*: on ne définit pas par une négation.

Voilà pour le fond; quant à la forme, elle doit être *claire*, sinon elle manquerait son but; *concise* et *portative*, sans quoi l'esprit ne peut facilement l'embrasser d'un regard, et elle fatigue la mémoire.

Ces caractères étant connus, il est facile de *critiquer* les *définitions défectueuses*, qui peuvent être: trop *larges* (convenir plus qu'au seul défini); trop *étroites* (ne pas embrasser tout le défini); *surabondantes* (disant plus qu'il n'est nécessaire); *tautologiques* (répétant le terme à définir); *métaphoriques* ou *poétiques* (faites au moyen de comparaisons); *négatives* (disant ce que n'est pas la chose, non ce qu'elle est).

On a déjà vu (*Psychol.*, p. 30) la critique de quelques définitions de l'homme. — On a défini la reconnaissance: *mémoire du cœur*. Cette définition manque des deux caractères essentiels de toute bonne définition: elle n'est pas *universelle*: il y a autre chose dans la reconnaissance que la mémoire du cœur; elle n'est pas *propre*: la mémoire du cœur, c'est aussi bien la haine, l'amitié, l'amour du pays, que la reconnaissance. Enfin elle n'est pas *convertible*.

Lamartine a dit:

Borné dans sa nature, infini dans ses vœux,
L'homme est un dieu tombé qui se souvient des cieux.

La Fontaine:

Je définis la cour un pays où les gens,
Tristes, gais, prêts à tout, à tout indifférents,
Sont ce qu'il plaît au prince, ou s'ils ne peuvent l'être,
Tâchent au moins de le paraître.

La Bruyère:

« Un homme qui sait la cour (le *courtisan*) est maître de son geste, de ses yeux, de son visage; il est profond, impénétrable; il sourit à ses ennemis, contraint son humeur, déguise ses passions, dément son cœur, parle et agit contre ses sentiments. »

Ce sont là des définitions oratoires, ou poétiques, ou descriptives; ce ne sont pas des définitions logiques.

¹ Ces deux caractères répondent au *genre prochain* et à la *différence spécifique*.

Avantages de la définition. — L'usage de la définition fait contracter à l'esprit l'habitude de l'ordre et de la méthode, donne le goût de l'exactitude, de la clarté, de la propriété dans les termes. On est moins exposé à se payer de mots ou de sophismes, quand on s'est fait une nécessité de voir clair dans le sens de tous les termes employés dans le raisonnement.

« La définition éclaire et seconde l'exercice de la volonté. L'homme qui voit clair dans sa pensée est, par là même, en état de mieux apprécier les motifs et les mobiles qui le sollicitent; il se détermine avec plus de promptitude; il fait de meilleurs choix; il agit résolument, et, comme on dit, en pleine connaissance de cause. Il perçoit vite les vrais rapports des idées entre elles, et, par suite, il juge bien; il saisit vite les vrais rapports des jugements entre eux, et, par suite, il raisonne juste. Or, bien juger, bien raisonner, ne sont-ce pas là les qualités essentielles et toujours et partout nécessaires? Les autres qualités de l'esprit, l'imagination, le goût, la mémoire, sont belles sans doute et précieuses; elles font les poètes, les inventeurs, les artistes, les savants; mais le jugement, le raisonnement, sont les qualités indispensables, les qualités régulatrices de la conduite et de la vie; ce sont donc celles qu'il faut avant tout développer... Elles doivent être comme le fondement et la charpente de l'esprit, que les autres servent à meubler et à embellir. On peut, à la rigueur et sans trop de préjudice, manquer de goût, de mémoire ou d'imagination, mais non de sens et de raison; tandis que sans le jugement, sans le raisonnement, le goût fait des délicats, la mémoire des sots, et l'imagination des fous. » (VESSIOT, *l'Instituteur*, 20 janvier 1885.)

— Au point de vue de la classification, voir leçon suivante, p. 438.

IV. — DÉMONSTRATION

Définition. — On appelle *démonstration*, en général, *tout raisonnement qui prouve avec évidence*.

La démonstration, au sens propre du mot, consiste à *montrer qu'une vérité particulière est renfermée, à titre de conséquence, dans un principe nécessaire, évident ou déjà démontré*. C'est le syllogisme du nécessaire.

« Le syllogisme, dit saint Thomas, part de l'évidence des premiers principes, comme le mouvement part d'un point immobile, et, comme lui, il se termine au repos, après avoir rattaché les conclusions à quelque principe évident et immuable. » Il n'y a pas de démonstration sans arrêt, sans principes assez évidents pour se suffire à eux-mêmes et pour affermir les conséquences auxquelles ils servent d'appui. Le démontrable suppose l'indémontrable. On ne peut admettre, avec Pascal, que « le véritable ordre consiste à tout définir et à tout prouver ». L'obligation de tout démontrer ferait de chaque raisonnement une série toujours ouverte, dans laquelle toutes les affirmations seraient sans appui définitif. Dans cette régression de vérité démontrée à vérité démontrée, il faut nécessairement s'arrêter quelque part, et admettre, comme le fait Pascal lui-même dans un autre endroit, « qu'il y a des principes qui n'ont pas besoin d'être démontrés. » Est-il, par exemple, nécessaire de définir la ligne droite? Est-il nécessaire de démontrer que la partie est plus petite que le tout? Faut-il démontrer qu'un corps ne peut se mettre en mouvement sans cause?

La démonstration se fait par le raisonnement déductif, mais il ne faut pas la confondre avec lui. On *déduit* toutes les fois qu'on tire les conséquences d'une vérité générale; mais il n'y a proprement *démonstration* que quand on part d'une vérité nécessaire ou regardée comme telle, et qu'on aboutit à une vérité nécessaire.

La démonstration s'appuie sur deux sortes de principes : les principes communs ou *axiomes*, et les principes propres ou *définitions*. (Voir ce qui en a été dit en Psychologie, page 158.)

Diverses sortes de démonstration. — On distingue la démonstration *directe* et la démonstration *indirecte* ou réduction à l'absurde.

a) **Démonstration directe.** — La démonstration *directe* est celle qui fait voir la raison pour laquelle une proposition est vraie. C'est la seule vraiment philosophique. « Notre esprit n'est point satisfait s'il ne sait, non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est. » (PORT-ROYAL.)

La démonstration directe comprend :

1° La démonstration à *posteriori*, *ascendante* ou *analytique*, qui se tire des conséquences ou des effets. Elle consiste à remonter d'une proposition ou d'une vérité particulière à ses antécédents, c'est-à-dire à des vérités plus simples et plus générales, déjà démontrées, ou aux principes sur lesquels elle repose directement. On remonte d'une proposition douteuse à celle qui doit la rendre évidente.

Prenons un exemple simple : *Inscrire un hexagone régulier dans une circonférence donnée*. On suppose le problème résolu et l'on tire une corde qui est, par hypothèse, le côté de l'hexagone demandé. On joint au centre les extrémités de cette corde par des rayons, et l'on a un triangle équiangle, et par conséquent équilatéral, et l'on voit que le côté de l'hexagone est égal au rayon. Pour inscrire un hexagone dans une circonférence donnée, il suffit donc de porter six fois le rayon sur la circonférence. Voilà une démonstration analytique.

Autre exemple, pris en dehors des mathématiques : La création du monde, où l'on ne voit que des êtres contingents, ne peut s'expliquer que par une cause nécessaire; donc cette cause nécessaire existe. — Le remords punit le coupable, et le témoignage de la conscience récompense le juste; donc il existe une loi morale ou obligation pour l'homme de faire ce qui est bien et d'éviter ce qui est mal.

2° La démonstration à *priori*, *descendante* ou *synthétique*, qui se tire des principes, des causes ou de la nature même de la chose à prouver. On va d'une proposition incontestée à une proposition douteuse qu'on veut établir. De la proposition reconnue vraie on déduit une conséquence, puis d'autres, jusqu'à ce qu'on arrive au théorème ou à la proposition à démontrer.

Soit à recommencer synthétiquement le problème ci-dessus, qui sera trans-

formé en théorème comme suit : *Le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon*. Le dernier mot de la démonstration analytique devient le premier mot de la démonstration synthétique. On prend une corde égale, par construction, au rayon; cette corde sera le côté cherché de l'hexagone régulier inscrit. On joint les extrémités au centre, et l'on a un triangle équilatéral, par conséquent équiangle; chaque angle vaut donc 60° , sixième partie de quatre droits, et l'arc que sous-tend la corde est la sixième partie de la circonférence. Cette corde est donc le côté de l'hexagone régulier inscrit. — Quand on dit : Il n'y a pas de fait sans cause; donc, tout ce qui n'a pas en soi la cause de son existence, c'est-à-dire sa raison d'être, vient d'un autre, — on fait aussi une démonstration *à priori*.

b) *Démonstration indirecte*. — La démonstration *indirecte* ou *réduction à l'absurde*, ou encore *démonstration par l'impossible*, prouve une vérité en faisant voir l'absurdité de l'hypothèse contraire, en énumérant les conséquences fausses ou inadmissibles qu'entraînerait la négation de la proposition affirmée. — Ainsi on démontre par l'absurde que par un point pris hors d'une droite on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite. De même on démontre la liberté en disant que si l'homme n'est pas libre, il n'y a plus ni bien ni mal, ni vice ni vertu, et l'on ne comprend rien au langage et aux institutions des hommes, qui impliquent la liberté.

La démonstration indirecte peut convaincre l'esprit, elle ne l'éclaire pas, ne le développe pas; elle n'atteint pas le but de la démonstration, qui est de donner les raisons, de faire connaître le pourquoi et le comment des choses. Il ne faut donc l'employer en mathématiques que lorsque toute autre démonstration est impossible. On s'en sert utilement en philosophie pour réfuter les systèmes qui ont des conséquences opposées au sens commun.

REMARQUE. — Tirer les conséquences d'un principe est un moyen expéditif de s'assurer de sa vérité ou de sa fausseté. Le faux ne peut naître que du faux, le vrai du vrai. Bossuet fait remarquer que « les raisonnements par l'absurde sont fondés sur cette proposition : *tout ce d'où il résulte quelque chose de faux est faux*, parce qu'en effet la vérité se soutient elle-même dans toutes ses conséquences ».

Règles pour la démonstration. — La Logique de Port-Royal les résume ainsi, d'après Pascal : « 1° N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes par elles-mêmes, qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver; 2° Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées; 3° Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints, » c'est-à-dire avoir toujours devant les yeux la définition.

Il faut se rappeler que le syllogisme ne garantit pas la vérité des prémisses d'où sort la conclusion, et qu'il faut, avant tout, s'assurer de l'exactitude de ces prémisses; — ne pas mettre dans la conclusion plus que dans les prémisses; pour cela, conserver aux termes, dans tout le cours des raisonnements, une signification identique et nettement définie.

V. — CARACTÈRES DES LOIS ET RÔLE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Caractères des lois mathématiques; comment elles diffèrent des lois physiques et naturelles. — Les théorèmes démontrés sont des lois mathématiques. Ces lois expriment les rapports *nécessaires* qui dérivent ou de la nature des nombres (*arithmétique*), ou de celle de l'étendue (*géométrie*), ou de celle des mouvements (*mécanique*). Ainsi, c'est une loi, que tout nombre qui en divise plusieurs autres divise leur somme; que le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés faits sur les deux autres côtés du triangle; que le mouvement d'un corps soumis à l'action d'une force constante est un mouvement uniformément varié.

Les lois mathématiques sont les lois de l'idéal, de l'abstrait; elles sont établies par le raisonnement déductif et non découvertes par l'expérience, comme les lois des sciences physiques et naturelles. « Quoique, historiquement, beaucoup de vérités mathématiques aient été suggérées par l'expérience, c'est en dehors de l'expérience et d'une autre preuve que l'expérience qu'elles ont reçu cette consécration immuable et définitive, qui leur a conféré l'*exactitude*, l'*universalité*, la *nécessité* absolues. » (RABIER, *Logique*, ch. xv.)

Les vérités mathématiques sont *nécessaires* d'une nécessité absolue: le contraire est impossible; les lois physiques sont *contingentes*: elles n'impliquent pas l'impossibilité du contraire. Les premières n'admettent ni exceptions ni conditions restrictives possibles: c'est ce qui résulte de leur caractère *analytique*; on ne saurait empêcher le même d'être le même, pendant qu'il est le même; les secondes, au contraire, sont toujours *conditionnelles*: un même antécédent détermine un même conséquent, pourvu que rien n'intervienne entre l'antécédent et le conséquent, qui sont deux faits distincts et successifs.

Les vérités mathématiques, tout au moins des mathématiques *pures*, sont *analytiques*; elles sont fondées sur la comparaison des idées, et il y a entre le sujet et l'attribut un lien d'identité. Les lois physiques sont *synthétiques*; elles sont fondées sur la comparaison, non des idées, mais des faits; le lien entre le sujet et l'attribut résulte de l'observation ou de l'expérience.

Les premières sont obtenues par un travail purement intellectuel ou idéal, où les figures sensibles, nécessairement imparfaites, bien qu'on ne puisse s'en passer, ne sont qu'accessoires et ne servent pas à découvrir la vérité; elles ne dépendent donc nullement, quant à leur certitude, de l'exactitude des figures qui servent à représenter leurs hypothèses ou leurs conclusions¹. Les secondes sont découvertes par une observation rigoureusement exacte des faits sensibles et dépendent absolument de l'exactitude des expériences. Toute erreur d'observation sur le fait particulier réagit sur la loi générale.

Les vérités mathématiques, étant *absolues*, sont supérieures aux faits et ne peuvent jamais être démontrées par eux, ce qui permet de déclarer fausse *à priori* toute expérience contraire; les lois physiques, étant *conditionnelles*, sont toujours soumises à la vérification des faits; leur *certitude* est contrôlée, et au besoin limitée, par les nouvelles observations.

Ce qui fait que les mathématiques sont des sciences exactes et certaines par excellence, c'est que, construisant leurs objets de toutes pièces, elles savent toutes les propriétés qu'elles y ont mises; au contraire, les sciences de la nature, trouvant leurs objets dans la réalité, ne sont jamais assurées de les connaître à fond et définitivement. Dans les mathématiques ou sciences de démonstration, ce qui est acquis, étant déduit rigoureusement de principes nécessaires ou regardés comme tels, est parfait et définitif; dans les sciences d'observation, au contraire, il est indéfiniment perfectible.

¹ On a souvent dit que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites.

Est-ce à dire que la certitude des mathématiques soit, en elle-même, supérieure à la certitude des sciences naturelles? Non, sans doute; car la certitude complète est absolue et, partant, égale à elle-même. Si cependant nous considérons une vérité scientifique, telle que la circulation du sang, et une vérité mathématique, telle que le rapport de l'hypoténuse aux autres côtés d'un triangle rectangle, nous trouverons cette différence: que la première peut nous être mieux connue, tandis que la seconde est marquée d'un tel caractère de nécessité, qu'une fois connue, elle ne saurait l'être mieux.

Rôle des sciences mathématiques dans les autres sciences. — Les mathématiques ont des applications dans toutes les sciences; elles servent à leur donner le caractère de précision qu'elles réclament pour être de vraies sciences. Ainsi la chimie emploie les formules chimiques, les équivalents; elle a fait un grand pas, quand Lavoisier y a introduit la balance. Pour l'électricité, on a longtemps cherché une unité de mesure; en 1881, le Congrès des électriciens, tenu à Paris, a adopté l'unité de résistance sous le nom d'*ohm*; celle de force électromotrice, sous le nom de *volt*; celle d'intensité de courants, sous le nom d'*ampère*, etc.

Pour la quantité de chaleur développée ou absorbée par les corps dans les phénomènes calorifiques, l'unité de mesure est la *calorie*. La météorologie a des *baromètres* pour mesurer la pression de l'atmosphère, des *hygromètres* et des *thermomètres* pour en mesurer l'humidité et la chaleur, des *anémomètres* pour noter la direction et l'intensité des vents, des *pluviomètres* pour savoir la quantité de pluie tombée dans telle région donnée.

En *physiologie*, on peut noter l'application de l'optique mathématique à la théorie de l'œil, de l'acoustique mathématique à l'étude de l'audition, etc. — L'éducation physique elle-même emprunte aux mathématiques leurs méthodes. Un éminent physiologiste de Turin, M. Mosso, a inauguré, il y a peu de temps, des recherches sur les effets des différents exercices physiques. Il existe des instruments pour mesurer les résultats. Le *dynamomètre* permet d'évaluer l'augmentation de force des muscles; le *spiromètre*, l'augmentation de l'ampleur des mouvements respiratoires; le *thoracomètre*, l'augmentation du thorax; la *balance* même peut donner des renseignements utiles.

En *sociologie*, ce sont les *statistiques* ou tableau comparatifs des faits sociaux qui marquent l'intervention des mathématiques. En *criminologie*, c'est par des statistiques et par des moyennes qu'on essaye de dégager des indications générales, des lois¹. De même dans le *commerce* et l'*industrie*. En *botanique*, pour les maladies de la vigne, par exemple, on a de nombreux champs d'expérience, et c'est par des statistiques qu'on en synthétise les résultats.

En *biologie*, on mesure les phénomènes physico-chimiques par lesquels se manifeste la vie; en *psychologie*, ceux qui accompagnent les états de conscience ou en sont les conditions; mais on ne saurait mesurer ni ces états eux-mêmes, ni la vie, ni la pensée, qui ne sont pas réductibles à la quantité.

Avantages et abus de la méthode géométrique. — Après avoir fait le procès des sciences mathématiques au point de vue éducatif, Hamilton se pose les questions suivantes: « Les mathématiques n'ont-elles donc aucune valeur comme instrument de culture intellectuelle? Bien plus, ne sont-elles bonnes qu'à fausser l'esprit? A cela nous répondrons (ajoute-t-il) que cette étude, poursuivie

¹ L'anthropologie criminelle, dont la tendance générale est de ne voir, dans la pensée, les sentiments, les aptitudes, l'honnêteté morale, le talent ou le génie, qu'une résultante de l'organisme, s'est constituée, en quelques années, tout un système d'instruments perfectionnés de mensuration humaine. On peut citer notamment l'anthropomètre d'Anfosso, qui fournit, en une seule opération, la taille d'un individu, le diamètre maximum occipito-frontal et le diamètre transversal de la tête, l'angle frontal, la longueur du nez, la grande envergure (distance d'un doigt médius à l'autre dans le plus grand écartement des bras étendus en croix), la longueur du médius droit de la main, les longueurs extérieure et inférieure du pied, etc.

avec modération et efficacement contrebalancée, peut être utile pour corriger un défaut et développer la qualité correspondante. Ce défaut est l'habitude de la distraction; la qualité, l'habitude de l'attention soutenue. »

Cette phrase d'Hamilton n'indique pas tous les avantages de l'étude des mathématiques; on peut ajouter les suivants: 1° la démonstration des théorèmes exerce l'esprit à ranger ses pensées en ordre et à faire des raisonnements rigoureux; 2° la recherche des problèmes donne l'habitude de l'analyse et apprend à distinguer clairement, dans une question posée, toutes les données et toutes les inconnues.

Nombre de savants ont protesté contre l'abus de la méthode des mathématiques, entre autres Pascal et d'Alembert: « Quelques philosophes, dit celui-ci, trouvant cet appareil propre à en imposer, sans doute parce qu'il les avait séduits eux-mêmes, l'ont appliqué indifféremment à toutes sortes de sujets; ils ont cru que raisonner en forme, c'était raisonner juste; mais ils ont montré par leurs erreurs qu'entre les mains d'un esprit faux ou de mauvaise foi, cet extérieur mathématique n'est qu'un moyen de se tromper plus aisément soi-même et les autres. » Cuvier dit que « les premiers éléments des sciences n'exercent pas assez la logique, précisément parce qu'ils sont trop évidents, et c'est en s'occupant des matières délicates de la morale et du goût qu'on acquiert cette finesse de tact qui conduit seule aux hautes découvertes. » Et Biot, qui a joint l'exemple au précepte, comme Cuvier et Pascal, du reste: « Appliquez-vous d'abord à exercer, assouplir, perfectionner les ressorts de votre esprit par l'étude des lettres. N'écoutez pas ceux qui les dédaignent; on n'a jamais eu lieu de s'apercevoir qu'ils fussent plus savants pour être moins lettrés. »

L'esprit géométrique est une espèce particulière de l'esprit scientifique, mais il n'est que cela; vouloir l'appliquer dans tous les ordres de vérités, c'est s'exposer aux plus graves erreurs, ou, tout au moins, se borner à une seule branche de vérités et laisser de côté les vérités morales, ce qui conduit fatalement au positivisme. Dans les sciences de l'abstrait ou de l'idéal, comme les mathématiques, il suffit, pour être dans le vrai, que l'esprit reste d'accord avec lui-même et qu'il tire logiquement les conséquences des principes posés. Dans les sciences du réel et du concret, il faut de plus qu'il s'accorde avec la nature, et c'est ce que ne fait pas facilement l'esprit géométrique, habitué à rester indépendant des faits d'expérience et à fonder uniquement la science sur des données rationnelles. « Toutes les utopies antisociales, dit Aug. Comte, ont trouvé de nombreux et actifs partisans chez les élèves les mieux dominés par une éducation mathématique. »

TABLEAU ANALYTIQUE

MÉTHODE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES	Définition.	— Les sciences mathématiques sont celles qui ont pour objet les nombres, les figures et les mouvements. A. Comte les définit: « sciences ayant pour objet la mesure des grandeurs. » On les appelle sciences <i>abstraites</i> , parce qu'elles considèrent les rapports, abstraction faite de la réalité, et <i>exactes</i> , parce que, partant de principes admis et de conventions faites, on en tire, par une méthode sûre, des conclusions rigoureuses.
	Division.	Elles comprennent: 1° Les <i>mathématiques pures</i> , arithmétique, algèbre, géométrie; 2° Les <i>mathématiques appliquées</i> , mécanique, astronomie, physique dite mathématique.
	Méthode.	Les mathématiques emploient la méthode <i>déductive</i> , le raisonnement déductif, dont la forme-type est le syllogisme. Dans les mathématiques, on part de <i>principes nécessaires</i> ou regardés comme tels, et l'on aboutit à des conséquences également nécessaires, au moyen de la <i>démonstration</i> .

- Méthode.** (Suite.) — La démonstration se fait par le raisonnement déductif, mais il ne faut pas le confondre avec lui : *déduire*, c'est simplement tirer les conséquences d'une vérité générale ; *démontrer*, c'est prouver avec évidence.
- La démonstration, au sens propre du mot, consiste à montrer qu'une vérité particulière est renfermée, à titre de conséquence, dans un principe *nécessaire, évident, ou déjà démontré*. Elle s'appuie sur deux sortes de principes : les principes communs ou *axiomes*, et les principes propres ou *définitions*.
- Axiomes.** — **Définition.** — Un axiome est une vérité nécessaire, évidente par elle-même, et qui sert à démontrer d'autres vérités. Les axiomes servent de base à toutes les sciences.
- Ne pas confondre l'axiome :** 1° Avec la *vérité générale*, qui est une vérité démontrée ; 2° Avec le *théorème*, qui est l'énoncé d'une proposition à démontrer ; 3° Avec le *postulat*, qui est une proposition non évidente, mais que l'on regarde comme vraie pour les besoins du raisonnement.
- Règles de Pascal.** — 1° N'admettre aucun principe nécessaire sans avoir demandé si on l'accorde en axiome, quelque clair et évident qu'il puisse être. 2° Ne demander en axiomes que les choses parfaitement évidentes.
- Définition.** — La définition est une proposition qui détermine d'une manière précise le sens d'un mot ou la nature d'une chose. — C'est une proposition dont l'attribut développe toute la compréhension du sujet. — On définit par le *genre prochain* et la *différence spécifique*.
- Deux sortes de définitions :** 1° Définition de *mots*, qui consiste à déterminer le sens des mots ; 2° Définition de *choses*, qui est l'explication de la nature et des propriétés des choses.
- La première est *arbitraire* et *variable*, et par conséquent de nulle valeur pour la démonstration ; la seconde n'est point *arbitraire*, et elle sert de base à la démonstration.
- Définitions empiriques et définitions rationnelles.** — Les premières sont *inductives, propres aux sciences d'observation*, n'ont qu'une valeur *relative*, sont *progressives* et *provisoires* ; les deuxièmes sont *déductives ou à priori, propres aux sciences exactes, parfaites du premier coup, immuables*. Elles sont de plus *nécessaires* et *universelles*.
- Les unes sont le point d'arrivée de la science (inductives) ; les autres, le point de départ (déductives).
- Règles de Pascal.** — a) **Définition de mots.** 1° Définir tout mot obscur ou équivoque ; 2° N'employer dans les définitions que des mots bien connus et déjà définis. — Ajoutons : ne pas changer sans raison le sens des mots. b) **Définition de choses.** — N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait pas de terme plus clair pour les expliquer.
- Limites de la définition.** — L'*universel* et l'*individuel* ne peuvent être définis ; dans le premier cas, l'*extension*, dans le second, la *compréhension*, sont sans limites.
- Caractères d'une bonne définition.** — 1° Elle doit être *complète* ou *universelle*, c'est-à-dire convenir à tout le défini ; 2° *Propre*, convenir au seul défini ; 3° *Réciproque* ou *convertible*, c'est-à-dire rester vraie, si l'ordre des termes est renversé.
- Voilà pour le fond ; pour la forme, elle doit être *claire, concise* et, autant que possible, *portative*.
- Avantages des définitions.** — Elles font contracter à l'esprit l'habitude de l'ordre, de la méthode ; donnent le goût de l'exactitude, de la clarté, de la propriété des termes ; elles éclairent et secondent l'exercice de la volonté.

Démonstration.

Diverses sortes de démonstration. — On distingue la démonstration *directe* et la démonstration *indirecte*.

Démonstration directe. — C'est celle qui fait voir pourquoi une proposition est vraie.

Elle comprend : 1° La démonstration *à postertori, ascendante* ou *analytique*, qui se tire des conséquences ou des faits. — On remonte d'une proposition douteuse à celle qui la rend évidente. 2° La démonstration *à priori, descendante* ou *synthétique*, qui se tire des principes, des causes ou de la nature même de la chose à prouver.

Démonstration indirecte. — La démonstration indirecte ou *réduction à l'absurde* prouve une vérité en faisant voir l'impossibilité, l'absurdité de l'hypothèse contraire. — Elle est fondée sur ce principe : « Tout ce d'où il résulte quelque chose de faux est faux. » (BOSSUET.)

La démonstration indirecte peut convaincre l'esprit, elle ne l'éclaire pas ; elle n'est pas *probante*, suivant le langage de l'École.

Règles de la démonstration, d'après Pascal. — 1° N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes par elles-mêmes, qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver ; 2° Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées ; 3° Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis.

Caractères des lois mathématiques ; différence avec les lois physiques. — 1° Les lois mathématiques expriment des rapports *nécessaires*, qui dérivent de la nature des nombres, de l'étendue ou du mouvement ;

2° Elles sont établies par le *raisonnement déductif* et non par l'expérience, comme les lois des sciences de la nature ;

3° Elles sont *nécessaires, d'une nécessité absolue, universelles* et *certaines*, tandis que les lois physiques sont *contingentes, conditionnelles* et *sujettes à l'erreur* ;

4° Les vérités mathématiques sont *analytiques* ; les lois physiques sont *synthétiques*.

Est-ce à dire que la certitude mathématique soit supérieure à la certitude physique ? Non, seulement elle ne se démontre pas de la même manière.

Rôle des sciences mathématiques dans les autres sciences. — Les mathématiques ont des applications dans toutes les sciences : elles leur communiquent le caractère de précision par le calcul et la mesure. Voilà pourquoi la physique, la chimie, l'histoire naturelle, la sociologie, la biologie, font appel à la mathématique pour établir des moyennes par les statistiques et les mensurations.

Avantages et abus de la méthode géométrique. — Poursuivie avec modération, l'étude des mathématiques fait acquérir à l'esprit l'habitude de l'attention, de l'ordre ; la recherche et la solution des problèmes sont d'excellents exercices d'analyse qui obligent à suivre ses pensées et à observer une question sous toutes ses formes.

Il faut bien se garder cependant de vouloir appliquer la méthode rigoureuse des mathématiques et du raisonnement déductif à tous les sujets ; cela exposerait aux plus graves erreurs. La plupart des vérités concrètes échappent au calcul, et les faits moraux y échappent complètement.