# CHAPITRE V

## SCIENCES MATHÉMATIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Depuis cent ans, la science européenne a pris un développement merveilleux, auquel rien ne saurait être comparé dans le passé; ceci est admis aujourd'hui comme un lieu commun, comme une vérité d'évidence banale. Mais, au rebours de ce que certains esprits chagrins voudraient croire ou faire croire, ce n'est pas seulement dans le champ des applications que le progrès s'est opéré; de grandes et belles théories se sont produites de notre temps qui ne le cèdent en rien à la théorie de la gravitation universelle, du calcul infinitésimal.

C'est ce que je vais essayer de prouver dans une revue rapide des sciences particulières, revue pour l'insuffisance et les omissions de laquelle je suis obligé de solliciter un surcroît d'indulgence.



### a. Mathématiques pures.

L'opération capitale de l'esprit humain, — on pourrait même dire de l'intelligence en général, humaine ou animale, — c'est la comparaison.

A travers les sensations qui nous le révèlent, nous percevons que des *changements* s'opèrent dans le monde extérieur à nous, et nous ne percevons même que ces changements [1].

Dans certains cas, l'appréciation de ces changements peut prendre un caractère particulier de précision qui en fait la *mesure*.

En adoptant un terme fixe, une *unité* invariable, de même nature que le phénomène dont il s'agit; en exprimant ces derniers en fonction de l'unité choisie, nous arrivons à trouver entre eux des relations et des formules qui s'imposent à nous avec la force d'une nécessité inéluctable.

Tout l'édifice des mathématiques repose sur cette opération de la mesure.

Les quantités se partagent en deux groupes principaux : les quantités *continues*, qui, croissant ou décroissant d'une valeur à une autre, passent par toutes les valeurs intermédiaires, et les quantités *discontinues*, qui procèdent par degrés disjoints.

1. Semper idem sentire aut nihil sentire idem est. (Hobbes.)

L'étendue, la durée, le poids, la plupart des phénomènes physiques sont des quantités continues.

La quantité discontinue par excellence, c'est le nombre.

Le nombre exprime le résultat d'une mesure, la répétition réalisée d'un acte particulier qui est le report de l'unité choisie sur la quantité à mesurer. Cet acte est ou n'est pas accompli, mais il ne peut être fractionné, scindé. De là cette conséquence que, par essence et par définition, tous les nombres sont *entiers*, et représentent une collection d'unités égales, indivisibles.

La nécessité qui s'impose en géométrie, en mécanique, en physique, en chimie même, de mesurer des quantités continues, et, par conséquent, d'appliquer à ces quantités les propriétés des nombres, a fait surgir des difficultés dans l'interprétation des résultats; quelques-unes de ces difficultés ne sont pas encore résolues d'une façon satisfaisante.

Il a été démontré, par exemple, en géométrie élémentaire, qu'on peut toujours construire le côté d'un carré équivalent à un rectangle donné.

Il existe donc certainement un carré équivalant à un rectangle de 5 mètres sur 9 mètres, ou 45 mètres carrés, et on peut le construire avec la règle et le compas. C'est une des conséquences de la continuité d'une surface qui croît d'une valeur à une autre, de 4 mètres carrés à 100 mètres carrés, par exemple, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Mais il est impossible de trouver un nombre qui mesure le côté de ce carré, parce que, le carré de 6 étant 36, le carré de 7 étant 49, il n'y a pas de nombre dont le carré soit 45. Pratiquement on peut tourner la difficulté en faisant choix d'une unité plus petite, et, par conséquent, en réduisant l'intervalle qui sépare les carrés de deux nombres consécutifs, mais jamais on ne peut arriver à un résultat exact.



On représente donc le côté du carré de 45 m. c. par le symbole $\sqrt{45}$, qui est dit *nombre incommensurable* ou *irrationnel*, mais qui n'existe pas en réalité.

De même, quand on cherche à exprimer numériquement les lois des quantités qui ont un *sens* de variation, par exemple la distance d'un point à une droite, le temps qui s'écoule entre deux phénomènes, on peut arriver à un nombre précédé du signe *moins*. Numériquement, cela ne veut rien dire; dans la série des nombres, il n'y en a aucun de ce genre. Cette question a beaucoup embarrassé jusqu'au jour où l'on s'est avisé que ce signe — s'appliquait au sens dans lequel la distance ou la durée devait être comptée. De ce moment le symbole de la quantité négative a pris une signification très bien définie, et a eu droit de cité dans les mathématiques; on a cherché et trouvé le moyen de combiner ces symboles soit entre eux, soit avec les quantités positives.

Mais ici encore a surgi une difficulté nouvelle. Il s'est rencontré des problèmes où l'on a été conduit à extraire la racine paire d'un symbole négatif, par exemple $\sqrt{-4}$. Or, d'après les règles précédemment adoptées, il n'existe aucune quantité positive ou négative qui, multipliée par elle-même, donne $-4$. Que représente donc ce symbole nouveau? Il a été impossible de le découvrir jusqu'ici, et l'on s'est borné à le qualifier d'*imaginaire*. On a trouvé des méthodes de calcul pour les symboles imaginaires, ou mieux on leur a appliqué les méthodes usitées pour les quantités déjà connues, et, chose curieuse, on est arrivé ainsi à une foule de résultats intéressants qui ont été reconnus parfaitement exacts. Néanmoins, en l'absence de définition, cette exactitude ne peut être vérifiée que d'une manière expérimentale en quelque sorte, qui répugne à l'essence des mathématiques, sciences de raisonnement pur [1].

1. Un des résultats les plus curieux de l'emploi des expressions imaginaires est la relation qui rattache le nombre $e$,



Un autre *mystère*, encore non expliqué, mais plus abordable peut-être des mathématiques, c'est la question des quantités *infinitésimales*. En étudiant les propriétés et en cherchant la définition exacte des tangentes aux courbes, Euclide et Archimède avaient été amenés à déterminer les lois qui régissent les variations simultanées des quantités continues. La grande découverte par laquelle Descartes eut l'idée de représenter algébriquement, c'est-à-dire en somme par des mesures numériques, les propriétés des courbes de la géométrie, rappela l'attention sur ces questions trop oubliées, et au XVIII[e] siècle Newton et Leibniz formulèrent en corps de doctrine, le premier sous le titre de *Théorie des fluxions*, le second sous le nom de *Calcul infinitésimal*, les lois qui régissent ces variations insensibles des quantités continues.

La tangente à une courbe fut définie la limite vers laquelle tend une sécante qui tourne autour d'un de ses points considéré comme fixe. Mais comment *mesurer* à la limite la distance qui sépare les deux points contigus définissant la tangente? On a dit que cette distance était *infini-*

base des logarithmes népériens, au nombre $\pi$, rapport de la circonférence au diamètre, et qui est exprimée par la formule $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$.

*ment* petite, c'est-à-dire plus petite que toute quantité donnée à l'avance. Cette expression est évidemment malheureuse, car, numériquement, il n'y a que la quantité *zéro* qui remplisse cette condition, et un infiniment petit est différent de zéro.

Supposons un mobile parcourant une droite sur laquelle il rencontre un point fixe. A l'instant où il y *passe*, sa distance à ce point fixe est certainement nulle, mais elle diffère du zéro ordinaire en ce qu'elle a, pour ainsi dire, une virtualité d'accroissement, une puissance de redevenir quelque chose que n'a point le zéro de l'arithmétique. C'est, si l'on peut ainsi parler, une quantité qui n'*est* point, mais qui *devient*. L'expression d'*infiniment petite* ne met pas ce caractère en évidence; celle d'*évanouissante* usitée à l'origine, et peut-être mieux encore de *devenante*, paraîtraient préférable [1].

Lagrange, un des plus grands mathématiciens du siècle, avait pris le parti de proscrire absolument de ses calculs la notion d'*infiniment petit;* il y suppléait par la méthode des *limites*, et définissait les dérivées (ou rapport fini de deux accroissements infiniment petits) comme des coefficients du développement des fonctions en séries.

Cette exclusion trop sévère n'a point prévalu

1. Cette interprétation a été donnée par Sully-Prudhomme dans un ouvrage encore inédit.



et cela s'explique. En géométrie, sur le terrain par excellence de la quantité continue, la notion d'accroissement insensible s'impose, et tous les efforts pour la masquer sous le nom de limite demeurent superflus et même nuisibles. On est obligé de démontrer, par des procédés d'une complication très laborieuse, des propositions qui apparaîtraient comme évidentes si l'on acceptait le principe de la continuité.

Depuis cent ans la théorie des fonctions, le calcul infinitésimal différentiel et intégral ont fait de grands progrès grâce aux Cauchy, aux Poisson, aux Fourrier, aux Stourm, aux Gauss, aux Jacobi, aux Abel, aux Bertrand, aux Jordan. Autant que j'en puis juger néanmoins, la philosophie des mathématiques a été relativement négligée par ces grands mathématiciens et leurs élèves, au moins dans le domaine de la science des nombres proprement dite [1].

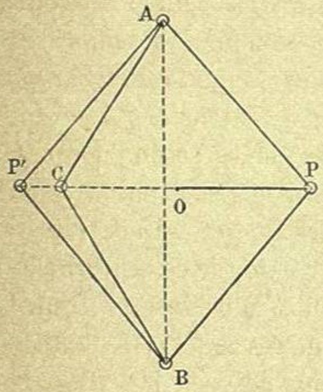
A côté de ces grands algébristes, une autre école s'est formée qui, par des constructions et des représentations géométriques, est arrivée à des résultats très intéressants et plus simplement obtenus. C'est l'école des Poncelet, des Poinsot, des Chasles, pour ne nommer que les

1. Signalons cependant ici les travaux de Montferrier, gendre de Wronski, et de Cournot comme ayant une grande valeur philosophique.

Français. Ne pouvant entrer ici dans de grands détails, je me bornerai à exposer une très remarquable découverte due au général Peaucellier, et encore ignorée après vingt-huit ans, même d'une grande partie du public spécial.

Au moyen d'un losange articulé, compliqué de trois tiges nouvelles venant s'ajouter aux quatre côtés de la figure, le général Peaucellier est parvenu à réaliser la transformation exacte d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

Soit un losange articulé APBP′ dont les sommets A et B sont reliés par des tiges AC et BC au centre C. Si l'on fait mouvoir l'un des sommets libres, P′ par exemple, il est facile de démontrer par la géométrie élémentaire que le produit des distances respectives de C à P et à P′ reste constant. Il s'ensuit que le point P décrit une courbe réciproque de P′ par rapport au point C. Si, entre autres, on fait parcourir au point P′ une circonférence passant par le point C (ce qui s'obtient en le reliant par une septième tige P′ au point O milieu de CP′), le






point P parcourt une droite perpendiculaire à PP′. S'il avait fallu résoudre le problème par l'algèbre on serait arrivé à des équations du *120e ordre!*

Mais, grâce à M. Sylvester, célèbre mathématicien anglais, la portée de la découverte du général Peaucellier s'est étendue beaucoup plus loin.

Si, en supprimant la septième tige, on fixe le point P, on rend libre le point C et on lui fait décrire une courbe quelconque, le point P′ en décrit une autre, qui présente avec la première une relation facile à établir. Si, en particulier, la courbe du point C est une circonférence passant par le point P devenu fixe, le point P′ décrira l'inverse d'une section conique. Si enfin l'on combine avec ce premier losange Peaucellier un second à six tiges faisant fonctions de *réciprocuteur*, l'un des sommets de ce second losange décrit exactement un arc d'ellipse, de parabole ou d'hyperbole. Ces courbes du second degré peuvent donc aujourd'hui être tracées comme un cercle par une sorte de compas à treize tiges. Entre autres conséquences intéressantes, la duplication du cube, ce problème posé par la Pythie de Delphes et infructueusement cherché depuis si longtemps, se trouve résolu, car on peut maintenant tracer l'intersection d'une parabole et d'un cercle. Il suffira de ce qui précède pour donner une idée de l'élégance et de la simplicité des solutions fournies par la géométrie pure.

Au point de vue spéculatif, je dois encore signaler ici une théorie très curieuse, très bizarre même, connue sous la dénomination de géométrie non euclidienne.

On connaît le *mystère* jusqu'ici resté impénétrable qui, dans la géométrie élémentaire, enveloppe la théorie des parallèles.

Dans l'impossibilité de déduire, des axiomes et premiers principes posés, le théorème qui veut que d'un point mené en dehors d'une droite on puisse mener une autre droite et une seule parallèle à la première, Euclide en fit un *postulatum*. La série logique des propositions de la géométrie se trouve ainsi interrompue et ne peut reprendre que sur une base qui n'est ni expérimentale, puisque la portion infiniment éloignée des droites échappe à la sensation directe, ni déductive, puisque par définition même le *postulatum* ne peut se rattacher aux axiomes primaires.

S'il était permis de risquer ici une opinion personnelle, je dirais que les différentes circonstances de ce mystère s'expliquent jusqu'à un certain point parce qu'à l'occasion des parallèles, la notion de l'infini fait sa première apparition dans la théorie géométrique. Je serais même



tenté de supposer qu'en abordant franchement la question des grandeurs géométriques infinies, en montrant par exemple que la surface comprise entre deux parallèles est, quoique infinie, négligeable par rapport à l'espace également infini compris entre les deux côtés d'un angle, il serait possible de résoudre le problème.

Quoi qu'il en soit, au commencement du siècle, deux élèves de Gauss, deux géomètres, l'un Russe, l'autre Transylvanien, Lobatchewski et Bolyai, entreprirent de déterminer ce que deviendrait la géométrie, si l'on faisait abstraction de la théorie des parallèles, du *postulatum* d'Euclide et de ce qui s'ensuit.

Comme problème de logique déductive pure, cette tentative était parfaitement légitime et très intéressante.

Pour résoudre la question, Lobatchewski dut remonter à cette définition de la ligne droite : « le plus court chemin d'un point à un autre », définition que d'Alembert qualifiait avec raison de « scandaleuse », puis, pour s'éclairer par analogie, soumit à une étude approfondie les surfaces où les lignes de plus courte distance, les lignes géodésiques, ne comportent point de parallélisme, la surface de la sphère par exemple. Un géomètre italien, Beltrami, imagina même une surface qu'il appela *pseudo-sphérique*, admettant une sorte de parallélisme *sui generis* entre ses lignes « les plus droites ». Les choses en étaient là quand, vers 1854, parut un mémoire de Riemann autre élève de Gauss, sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, mémoire sur lequel nous reviendrons plus bas. La théorie de Riemann, suggéra aux adeptes de la géométrie non euclidienne, fort nombreux en Allemagne et surtout en Angleterre, l'idée fort étrange que notre espaec se distingue d'autres espaces par un rayon de courbure nul; qu'il peut ne pas avoir les mêmes propriétés dans toute son étendue; qu'il est ou peut être non pas homaloïdal ou plat, mais courbe, sphérique ou pseudo-sphérique; que toute ligne, par conséquent, considérée jusqu'ici comme droite, pourrait, suffisamment prolongée, constituer une courbe fermée en raison de la courbure inhérente à l'espace, etc., etc.

Dans un opuscule très remarquable paru vers 1879, *Origine et signification des axiomes de la géométrie*, Helmholtz prêta à ces vues nouvelles l'appui de sa grande autorité.

En Angleterre, où la base du nouveau système cadrait avec la philosophie de J. Stuart Mill, cette théorie fut accueillie avec enthousiasme. On y vit au moins en germe l'explication de certains phénomènes inexpliqués, notamment du spiritisme. Le journal *Nature* publia, il y a



quelques années, une fantaisie anonyme dont l'auteur décrivait les conditions d'existence d'êtres vivant dans un espace à deux dimensions, dans un plan. L'apparition d'une sphère y causait un trouble extraordinaire; l'être nouveau pénétrait dans les demeures les mieux fermées sans prendre la peine d'ouvrir les portes. Il y dénouait comme les Davenport les nœuds les plus inextricables mis sous scellés. De sa description, l'auteur concluait que nous serions aussi désorientés par l'arrivée d'un être appartenant à un espace d'un ordre supérieur au nôtre, et que nous n'avons pas plus le droit de le nier que les imaginaires habitants du plan ne pourraient nier la sphère. Les lecteurs que la question pourrait intéresser trouveront une réfutation en règle du système non euclidien ou pangéométrique dans le livre si suggestif et si inquiétant de M. Stallo, *la Matière et la Physique moderne*. S'il m'était permis encore ici de risquer une opinion personnelle, je dirais qu'en comparant l'espace à la surface sphérique ou pseudo-sphérique, Lobatchewski et ses successeurs me semblent s'être laissés entraîner par une analogie fausse et incomplète. Même dans la région abstraite des figures géométriques, une surface quelconque oppose aux objets qui se déplacent sur elle une *résistance*, une *solidité*, qui dépend de sa courbure et sans laquelle elle n'aurait pas de forme définie. Or l'espace tel que nous le concevons implique contradiction avec toute idée de solidité, de résistance, de forme quelconque : lui assigner une courbure, un rayon de courbure, me paraît une idée absolument vide de sens. L'espace est ou une forme pure de notre esprit, ou une perception généralisée de toutes les sensations qui impliquent la notion d'étendue. Dans l'un et l'autre cas, il a, ce me semble, un caractère purement et exclusivement *subjectif*, qui me paraît répugner à toutes les spéculations de l'école non-euclidienne.

Un mot sur les idées de Riemann à propos des espaces à $n$ dimensions. Riemann paraît avoir aussi été trompé par une fausse analogie entre l'espace et les objets étendus. De ce que la position d'un point, d'un corps dans l'espace réclame, pour être définie, l'emploi de trois mesures coordonnées; de ce que la fonction de ces trois coordonnées varie d'une façon continue, quand le point ou le corps se déplace dans l'espace, le mathématicien allemand paraît avoir conclu que toute fonction continue de $n$ coordonnées, ce qu'il appelle une *Mannigfaltigkeit*, est de même nature que l'espace. Si ce raisonnement était acceptable, en coordonnant ensemble deux quantités continues de façon à



en former une fonction continue, par exemple la masse et la vitesse d'un mobile, la taille et l'âge d'un arbre, ou tout autre *Mannigfaltigkeit* à deux variables, on devrait avoir la notion d'un espace à deux dimensions ou d'une surface. Or cela n'est pas. Il y a donc dans le concept d'espace *quelque chose d'autre* que les relations mutuelles de trois variables continues, et l'on ne voit pas que ce *quelque chose* puisse prendre naissance par la coordination d'un nombre quelconque de variables.

En terminant cet exposé infiniment trop écourté du mouvement des mathématiques pures, il me sera permis d'exprimer un regret. C'est de ne voir figurer, dans la nomenclature bibliographique des ouvrages sur la géométrie non-euclidienne, le nom d'aucun auteur français, soit pour approuver, soit pour réfuter les théories nouvelles. Cette répugnance de nos savants à s'engager dans toute question où la philosophie est intéressée est due à l'influence stérilisante du positivisme. Si elle peut éviter au mathématicien le chagrin de tomber dans certaines erreurs, elle lui épargne en même temps la fatigue enviable de penser et la gloire de trouver. Ratatiné dans le terre-à-terre du tangible, l'esprit scientifique s'engourdit, se rouille, et devient peu à peu impropre à toute investigation.