manifiesta el grabado que aparece en la página precedente.

Por medio de este instrumento pueden hacerse muchos ejercicios sobre sumas y combinación de números; y las rectas verticales pueden ser útiles para explicar el principio de nuestra numeración, y la necesidad de formar en columnas las centenas, las decenas y las unidades.

X

LA ARITMÉTICA COMO CIENCIA

Después de haber establecido las reglas que deben guiar al maestro en su tarea de hacer que el arte de calcular y de medir vengan á formar parte de la educación, se hace necesario considerar más detenidamente el lado científico de la aritmética y las razones para enseñarla como disciplina intelectual aun con preferencia á lo que se merece por su utilidad práctica.

Ciencia.—Debemos convenir en que uno de los fines principales de nuestra vida intelectual es la adquisición de la verdad, y en que á una de las cosas á que vamos á la escuela es á aprender á adquirirla. La mera acumulación de hechos y de informes no es bastante á satisfacernos. La diferencia entre el sabio y el que no lo es consiste menos en las cosas que sabe que en el modo de saberlas. Llamamos ciencia á la aritmética, y ciencia, puede decirse, significa conocimiento; pero hay un gran número de conocimientos que no constituyen ciencia. La ciencia propiamente dicha viene á ser los conocimientos ordenados; el conocimiento de las cosas, de los hechos y de los acontecimientos en su verdadera relación y coordinación, sus antecedentes y consecuencias; el conocimiento de cada fenómeno separado en el variable panorama de la vida como ilustración de algún principio ó ley, más vasto, más elevado y más duradero que él

Srita. Prof. Josefa de la Garza

mismo. Un conjunto de aforismos ó de hechos aprendidos de memoria no hacen al hombre pensador ni le prestan mucho servicio intelectual. Cada hecho particular digno de ser conocido está en relación con una verdad general, y la ciencia consiste principalmente en establecer la conexión y la colocación de las verdades particulares y separadas con las generales y permanentes. El aprenderse un hecho histórico no es de ningún valor si no se descubre ó se sabe la relación que tiene con alguna ley política, económica ó moral, y hemos visto ya que una regla gramatical tiene escasamente uso ó valor para nosotros á menos que se la considere como parte de la ciencia del lenguaje. Esta distinción debe establecerse en todos los conocimientos sólidos y fecundos, y los maestros deben no olvidarla. Debemos aprender á ver los hechos especiales y las lecciones de la experiencia á la luz de las más amplias generalizaciones que rigen al mundo y tienen unidos unos á otros sus componentes. Nuestra enseñanza debe tender á desarrollar el espíritu investigador é indagador, el amor á la verdad, y el hábito de razonar exactamente. Y si la enseñanza de la aritmética puede hacerse servir á tal objeto, tendrá un valor que sobrepase al que parece tener por su objeto inmediato, y que se extenderá no sólo á las nociones sobre los números, sino también á todos aquellos asuntos que se relacionan con el entendimiento.

Inducción y deducción.—Parece oportuno entrar á tratar aquí de una distinción que hacen los libros de educación, y de la cual he dicho poco ó nada hasta ahora; es á saber: la distinción entre el razonamiento inductivo y deductivo. Al estudiar ciertos asuntos, el aprendiz comienza por conocer hechos separados, y luego va aprendiendo á agruparlos, á ver sus semejanzas, y llega al fin á algunas relaciones de hechos que los abraza y

comprende todos. Este procedimiento es llamado "inducción," y es el método científico ó procedimiento con el que se identifica generalmente el nombre de Bacon, aunque es preciso decir que el procedimiento es tan viejo como la misma inteligencia humana. Bacon solamente insistió sobre su importancia, y ayudó á formularlo como instrumento para descubrir la verdad. Por otra parte, hay varios asuntos de estudio en los cuales se principia con la verdad universal, y se procede después á deducir de ella diversas inferencias especiales y detalladas. Se dice que este modo de estudiar es deductivo. Según el primer proceder, el pensamiento va de la percepción de las particularidades al reconocimiento de la ley general; según el último, de la relación de lo general al conocimiento de lo particular. Uno ve que su vecino se ha muerto, recuerda la muerte de sus padres ó amigos, lee la historia de lo pasado y reuniendo estas inferencias llega inductivamente á la conclusión de que todos los hombres son mortales. Acepta esta proposición, medita sobre ella, ve que él es también hombre y concluye diciendo: luego yo soy mortal. El procedimiento es aquí deductivo. Al estudiar usan algunos un procedimiento, y otros emplean otro. Una parte importante de la educación consiste en adiestrar las facultades de tal modo que los resultados sean exactos cualquiera que sea el procedimiento adoptado, que tengan valor y profundidad nuestras generalizaciones, que sean verdaderas y no apresuradas é ilegítimas las inferencias de los hechos que tengamos á la vista.

La aritmética y las matemáticas son en lo general, aunque no completamente, ciencias deductivas.—La aritmética y la geometría consideradas como ciencias ofrecen ejemplos de estos dos géneros de estudio. Si después de resolver un problema por el método experimental, y de haber visto cómo se obtiene la respuesta, se llega á la conclusión de cuál método es el mejor, se ha alcanzado este resultado por el método de análisis ó de inducción; pero si se parte de axiomas y definiciones, y después se aplican éstas á la solución de los problemas, el método es de deducción. Pero este método es, después de todo, el modo característico de los procedimientos aritméticos como el de los otros ramos de las ciencias matemáticas. Veremos después que las ciencias físicas suministran el mejor ejercicio del razonamiento inductivo, porque allí no hay axiomas ó verdades de donde partir, y se debe en todos casos principiar por la observación de fenómenos y la aplicación de la experiencia. Las verdades elementales acerca del número y del espacio, que son respectivamente la base de la geometría y de la aritmética, tienen la gran ventaja de ser muy sencillos y muy evidentes. Están completamente fuera del dominio de la contingencia ó de la controversia, y suministran así una base mejor, para la lógica puramente deductiva ó sintética, que otra clase cualquiera de materias en las cuales los mismos datos de que nos valemos son frecuentemente disputados ó al menos disputables.

Las matemáticas como enseñanza de lógica.—Si tomamos un axioma geométrico, una verdad elemental concerniente á las propiedades del espacio—"dos líneas rectas no cierran espacio,"—ó un axioma aritmético, una verdad elemental relativa á las propiedades de los números—"el factor de dos números, es factor de su producto"—y observamos que en el momento en que lo enunciamos descubrimos la verdad que encierra, no hay lugar á duda ó á discusión, pues entender tales afirmaciones es tanto como aceptarlas. Lo mismo sucede con todos los demás axiomas fundamentales de la geometría ó de la aritmética. Cualesquiera hechos reconocidamente contenidos en estas verdades generales ó universales deben ser verdaderos, y estamos ciertos de ellos cuanto es posible estarlo de las cosas.

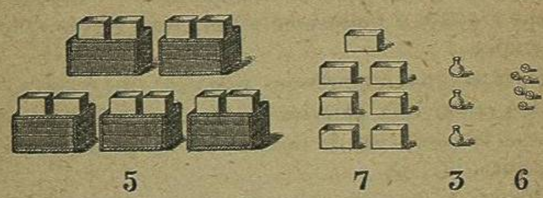
Supongamos que necesito ejercitarme en el arte de razonar; supongamos que quiero estar fuera del campo de la conjetura ó de la probabilidad, estar libre de la difícil tarea de pesar la evidencia, reunir ejemplos para llegar á proposiciones generales, y que deseo simplemente saber cómo proceder con las proposiciones generales cuando llegue á ellas, y cómo deducir exactas inferencias. Es claro que obtendré mejor esta clase de disciplina en aquellos ramos del pensamiento en que los primeros principios son de incuestionable verdad; porque si pensando llegamos á conclusiones erróneas, dependerá ó de que aceptamos premisas falsas, caso en el cual aunque sea bueno nuestro razonamiento no quedamos exentos de error, ó de que razonamos mal, y entonces pueden ser exactos los principios de que partimos y, sin embargo, ser falsas nuestras conclusiones. Pero en las ciencias matemáticas ó puras—la geometría, la aritmética, el álgebra, la trigonometría, el cálculo de las variaciones ó de las curvas—sabemos que no hay ni puede haber error en nuestros primitivos principios, y podemos consagrar toda nuestra atención á los procedimientos. De tal suerte, estas ciencias, basadas según lo están en verdades primarias relativas al espacio y al número, han sido siempre, como meros ejercicios de lógica, consideradas como propias para suministrar una excelente disciplina. Cuando Platón escribió en la portada de su escuela "se prohibe la entrada á quien no sepa geometría," no quiso decir que los discípulos debieran ocuparse en cuestiones de líneas y de superficies; por el contrario, los asuntos á que dirigía su atención eran algunos de los problemas más profundos, sociales, políticos y morales, en los que pudiera ejercitarse la inteligencia. Platón y sus discípulos trataron de llegar á conclusiones acerca del ser, del deber, del destino del hombre y de la relación en que éste estaba con los dioses y con el mundo invisible. ¿Qué tiene que ver la geometría con estas cosas? Simplemente esto: que el hombre cuyo entendimiento no había sido educado sistemáticamente y con todo el rigor lógico para pensar, y en el arte de hacer inferencias legítimas de premisas, era incapaz para entrar en la discusión de estos elevados principios; y que el estudio de la geometría, la única ciencia matemática que había sido formulada y reducida á sistema en tiempo de Platón, era el más aparente para obtener el género de disciplina lógica que él necesitaba.

La aritmética como matemáticas de la escuela.— Lo que los estudiantes de la universidad pueden alcanzar por medio del estudio de las matemáticas, también lo conseguirán los niños de las escuelas con el de la aritmética, siempre que ésta se enseñe desmostrativamente. Él educa el razonamiento, y particularmente el deductivo; sirve para dar al pensamiento solidez y continuidad; revela la naturaleza de lo falso, é impide que se aprovechen afirmaciones no probadas. La aritmética es uno de los ramos de estudios escolares en los cuales el espíritu escéptico é inquisitivo tiene el campo más legítimo y en el que la autoridad no entra para nada. En otros ramos de enseñanza se tiene el derecho de acudir á la confianza del alumno, y esperar que él acepte muchas cosas con el testimonio del maestro, en la inteligencia de que serán explicadas y probadas después; pero sobre ésto se puede decir al escolar: "cree solamente lo que puedas entender; no aceptes nada por concesión." En resumen, el verdadero oficio de la aritmética es servir como educación elemental en lógica. Que el maestro no olvide nunca la diferencia fundamental entre conocimiento y pensamiento, y que es relativamente más importante para la salud de la vida intelectual el hábito de pensar que la facultad de conocer ó aun la facilidad de llegar á resultados visibles. Este principio tiene aquí significación especial. Ninguna otra materia puede enseñar á pensar á los escolares consecutiva, sólida y lógicamente con tanto efecto como la aritmética.

Haré algunas sugestiones prácticas con respecto á la manera como este principio, una vez reconocido, dominaría en la enseñanza de la aritmética y determinaría sus métodos.

Numeración convencional.—Téngase cuidado antes de todo de que nuestro sistema aritmético — según se demostrará—es arbitrario y convencional, y debe no confundírselo con aquella parte de la aritmética que es permanentemente verdadera y se funda en las propiedades de los números. Hemos adoptado, por ejemplo, el número diez como base de nuestra numeración, pero en la ciencia de los números no hay nada que sugiera esto. Cualquiera otro número—doce ú ocho— podría haber servido para el mismo objeto aunque no con la misma comodidad. En la numeración arábiga cambia el valor de la cifra según el lugar que ocupa; v. g. en 643, el 6 vale 6 decenas de decenas y el 4, vale 4 decenas, por el lugar que ocupan. Podría haberse adoptado otro modo de arreglar las cifras que correspondiera al mismo objeto, como, por ejemplo, el romano que se le puede comparar con ventaja, y que tiene menos inconvenientes prácticos para ejecutar una suma que aquél. Dicho número sería representado, según el sistema romano, así: DCXLIII.

Ilustración del sistema de numeración decimal.—Las siguientes ilustraciones tomadas de un ingenioso libro francés le servirán mucho al maestro cuando haya de explicar el carácter decimal de nuestra aritmética, el medio de distinguir la significación de los varios múltiplos de diez y de las potencias de diez, por sus lugares y aproximaciones á la unidad, y el uso del cero.

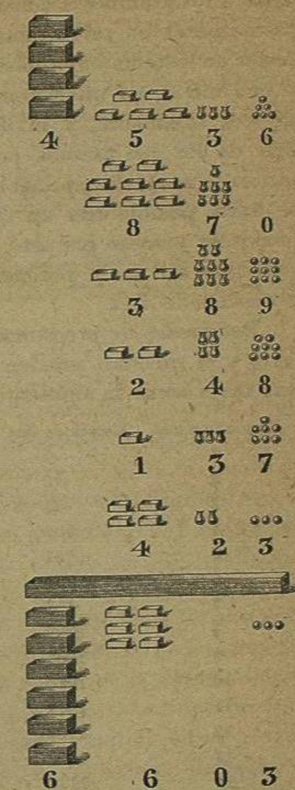


Las bolitas sirven para representar las unidades, los saquitos que contienen diez de ellos representan las decenas, las cajas que contienen diez de esos saquitos, representan centenas, y los cestos que contienen diez cajas, los millares. Hecho esto se puede ilustrar la naturaleza de la numeración con una cuenta de sumar, así:

Explíquese oralmente la numeración de cada línea, llamando especial atención á la necesidad y uso especial del cero en la segunda línea. Se verá que la primera columna suma 33 y que 30 de estos pueden ser echados en tres saquitos y sobran 3. La adición de la línea siguiente da 30, lo que indica la necesidad de que se ponga un signo que señale el lugar vacante y haga ver que no hay decenas. Se notará después que las 26 centenas consisten de dos cestos llenos que contienen 10 cajas cada una, y de 6 cajas ó centenas restantes. Estos dos cestos agregados á los cuatro representan seis millares.

El alumno verá así con toda claridad las partes fun-

damentales de nuestro sistema de numeración; el cambio de lugar, el modo de contar por decenas, el uso del cero y la necesidad de llevar cada sobrante á la siguiente columna.



Hay otras muchas maneras de explicar el sistema, pero lo mejor es que el maestro se ejercite en buscar por sí mismo la mejor, pero recordando el proceder ya recomendado. Cuando ya se ha explicado el asunto suficientemente por medio de un juego de cubos, ó del abaco, de pinturas numéricas y diagramas que representan colecciones de centenas, es preciso prescindir ya de todas estas cosas. La aritmética es una ciencia abstracta, y es mejor que los alumnos vean sus verdades en una forma abstracta y pura tan pronto como puedan. No es falta poco común entre los maestros que siguen á Pestalozzi emplear los métodos llamados intuitivos mucho tiempo después de que han conseguido el objeto principal y cuando el alumno está en disposición de entender las reglas abstractas.

Otros sistemas de numeración.—Otra manera efectiva de hacer clara la notación decimal es tomar otros números distintos de 10 como base del sistema de notación, é invitar á los alumnos á considerar cómo se representarían los números en tal sistema. Se puede mostrar que así como un sistema cuya base es 10 requiere nueve dígitos y una cifra, así un sistema *cuaternario* requeriría tres dígitos solamente, y el *undecimal*, exigiría un dígito más de los que usamos, por ejemplo *x*, y un sistema *binario* de notación aplicable á los números más elevados se haría posible con un dígito y un cero, por cuanto cualquier número por alto que fuese podría quedar comprendido en *dos* y potencias de dos, en vez de *diez* y potencias de diez.

Por medio de preguntas y sugestiones á los alumnos, estos y el meestro pueden ir formando en el encerado una tabla como la siguiente:

Escala decimal.	Escala de dos.	Escala de seis.	Escala de once.
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	10	6
7	111	11	7
8	1000	12	8
9	1001	13	9
10	1010	14	x
11	1011	15	10
12	1100	20	11
13	1101	21	12
14	1110	22	13
15	1111	23	14
16	10000	24	15
17	10001	25	16
18	10010	30	17
19	10011	31	18
20	10100	32	19

Con algunos problemas arreglados de acuerdo con estas escalas, y comprobándolos después por conversión á números ordinarios, se dará á los alumnos una idea clara del carácter arbitrario de la numeración decimal.

Lecciones sobre el sistema métrico.—Antes de presentar á los alumnos tablas sobre pesos y medidas para que aprendan de memoria, es preciso explicarles la formación del sistema métrico. El hecho de que necesitamos fijar unidades de longitud, de peso y de capacidad para que sirvan como de base del cálculo, y el más curioso aun de que la naturaleza no suple por un solo objeto una unidad determinada é inalterable de peso ó medida, dará en parte cuenta del medio extraño é irregular de que se han valido de tiempo en tiempo los ingleses, por ejemplo, para tomar por base para sus cálculos los granos de cebada, las vibraciones del péndulo ó la longitud del brazo de Enrique I. Se puede mostrar por medio de un buen diagrama, cómo la unidad de longitud, el *metro*, que forma la base del sistema métrico, se ha obtenido midiendo una parte definida del meridiano de la tierra; cómo cuadrando esta unidad se obtiene la de superficie, el *área;* cómo la misma unidad cúbica da las unidades de volumen y de capacidad, el *litro* y el *metro cúbico;* cómo un volumen de agua destilada medida así da la unidad de peso, el *gramo;* cómo cierto peso de plata da la unidad monetaria, el *franco;* y cómo todas estas unidades, designadas por una nomenclatura sencilla, se prestan á multiplicarse y subdividirse. Sólo viendo en sus detalles un sistema como este tan sencillo y científico, que puede ser explicado y aprendido en una lección de media hora, se puede comprender bien lo confuso y anómalo de los demás sistemas.

Toda regla debe ser demostrada antes de ser aprendida.—Antes de enseñar una regla cualquiera debe darse sobre ella una lección oral. El método de experimentación é inducción le permitirá al maestro llegar á la regla y demostrar su necesidad. La regla de substracción es la que primero sirve para hacer ver la diferencia que hay entre un maestro hábil y otro rutinario. Se ofrece, v. g., restar 479 de 853, y se explica el método que ha de seguirse de la siguiente manera :

853
479
374

"De 3 no puedo quitar 9 ; *agrego* 10, que sumados á 3 dan 13 ; de 9 á 13, 4, y escribo este número.

"Llevo 1, que añado al 7, y suman 8; 8 de 5 no puedo quitar ; tomo 10, que agrego al 5 ; de 8 á 15 van 7, cifra que pongo.

"Llevo 1 al 4, y hacen 5 ; de 5 á 8 van 3."

Substracción.—Si el objeto propuesto es obtener la respuesta exacta, 374 es el número que se busca ; pero como ejercicio intelectual no tiene valor alguno el método indicado. Se pone la palabra *tomo* ó *agrego* en boca de los niños, y no se dice por qué, dejando al alumno á oscuras de todo. Es insultar al entendimiento de un niño, emplear un lenguaje que simula explicación y que le es ininteligible, y sería mejor decirle que el procedimiento es un misterio, en vez de emplear palabras que no explican nada aunque parezcan explicar algo.

Método por descomposición.—Hay dos maneras de hacer clara esta regla, con poco trabajo, aun á los niños de menos edad de la clase. Así :

853 =	7 centenas +	14 decenas +	13
479 =	4 " +	7 " +	9
	3	7	4

"9 no puede restarse de 3 ; entonces se pide prestada una de las decenas de las 5, que vale 10 unidades y agregando éstas al 3 dan 13 ; quitando 9 de 13, quedan 4.

"7 decenas no pueden ser restadas de 4 decenas ; se pide entonces una centena de las 8, que forma 10 decenas y con las 4 hacen 14 ; de 7 á 14 van 7.

"De 4 centenas á 7 centenas van 3 centenas ; número que se escribe."

No se ha hecho más que resolver el minuendo 800 + 50 + 3 en la forma 700 + 140 + 13, y el substraendo ha quedado intacto. Aunque no sea este tal vez el mejor modo de proceder, sí es el más fácil de explicar.

Método por adiciones iguales.—El segundo método es un poco más difícil de explicar, pero más sencillo en el procedimiento, y es el más adoptado en las escuelas. Antes de poner el problema debe explicarse á los alumnos el principio de que "la diferencia entre cantidades desiguales no se altera si se les agregan cantidades iguales." Si tengo 4 pesos en un bolsillo y 9 en otro, la diferencia entre las dos cantidades es 5, y si se ponen dos pesos más en cada bolsillo la diferencia resultante es la misma ($9 - 4 = 5$; $9 + 2 - 4 + 2 = 5$). Con sencillos ejemplos de este género se puede hacer entender á los alumnos que si necesitamos agregar un mismo número á dos cuya diferencia buscamos, esta no se altera con aquella agregación. Explicado esto se puede entrar en el procedimiento :

853 + 100 + 10	8 centenas, 15 decenas	13
479 + 100 + 10	5 centenas, 8 decenas	9
374	3 centenas, 7 decenas	4

"No puede restarse 9 de 3, y entonces agrego 10 al número de la línea superior. De 9 á 13 van 4, y escribo esta cifra. Por haber agregado 10 á la línea superior, agrego 10 unidades ó 1 centena á la inferior. De 8 á 5 no puede ser ; agrego entonces 10 á la línea superior ; y digo : de 8 á 15 van 7, y lo anoto. Habiendo agre-