CAPÍTULO VIII.

Factores, Divisores, Múltiplos.

102. Factores de un número. Los *factores* de un número son los números cuyo producto es aquel número.

103. Números primos. *Número primo* es un número que *no tiene por factores números enteros*, exceptuándose él mismo y el número 1.

De modo que 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 son números primos.

104. Números compuestos. *Número compuesto* es un número formado por el producto de dos ó más factores enteros.

De modo que 10, 21, 143 son números compuestos, porque 10 es 2×5; 21 es 3×7; 143 es 11×13.

Nota. Cuando se habla de factores enteros de un número se excluyen el número mismo y 1.

105. Factores primos. *Factor primo* es un factor que es un número primo.

106. *Un número compuesto no puede tener más de un grupo de factores primos.*

De modo que 12 no puede expresarse como el producto de cualquier *grupo de factores primos* excepto $2 \times 2 \times 3$. 12 es el producto de 2×6, y 3×4, pero uno de los factores de 2×6 y uno de los de 3×4 es *compuesto*.

107. Un número que se puede dividir por otro *sin dejar residuo* se dice que es *exactamente divisible* por otro número; y al divisor se le llama un *divisor exacto*.

108. Números pares. *Número par* es un número que se puede dividir exactamente por 2.

109. Números impares. *Número impar* es un número que *no* se puede dividir exactamente por 2.

110. *Para hallar los factores primos de un número,* se divide el número por uno de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11, etc., en el orden mencionado, hasta que se halla un número primo que pueda dividir exactamente el número dado; se repite la misma operación con el cociente obtenido, y así sucesivamente hasta que el cociente sea un número primo.

Nota. No se debe tomar 2 por divisor á menos que el último dígito sea 0, 2, 4, 6 ó 8.

Tampoco se debe tomar 3 á menos que la suma de los dígitos del número sea exactamente divisible por 3.

Es inútil tomar 5 á menos que el último dígito del número sea 0 ó 5.

1. Hállense los factores primos de 144.

$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Esto es, $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$.

Nota. Se divide *tantas veces como sea posible* por el *menor* número primo que divida exactamente al número dado, antes de tomar por divisor el número primo inmediato superior.

2. Hállense los factores primos de 233.

El último dígito no es 0, 2, 4, 6 ni 8; luego 2 no es un factor. La suma de los dígitos no es exactamente divisible por 3; 3 por lo tanto no es factor. El último dígito no es ni 0 ni 5; luego 5 no es factor. No se deben probar, pues, 2, 3 ó 5 como divisores. Se ve por el ensayo que 7, 11, 13 ó 17 no es factor. No se debe tampoco probar con ningún otro número primo mayor, puesto que el cociente, cuando se ensaya con 17, es *menor* que 17. Por lo tanto, ningún número primo mayor que 17 puede ser factor; y se halló en el ensayo que ningún número primo menor que 17 es factor. Entonces, 233 es número primo.

111. De los dos ejemplos precedentes deducimos la siguiente

REGLA. *Se divide el número dado por cualquier número primo que lo divida exactamente; el cociente por cualquier número primo que lo divida exactamente; y así sucesivamente hasta que el cociente sea él mismo un número primo. Los diversos divisores y el último cociente son los factores primos.*

Si no se halla factor primo antes de que el cociente llegue á ser igual ó menor que el divisor, el número es número primo.

112. Exponentes. Para evitar la necesidad de escribir largas filas de factores iguales, se escribe á la derecha de un número un guarismo pequeño, que se llama *exponente*, para señalar el número de veces que se ha de tomar por factor.

De modo que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ se escribe $2^4 \times 3^2$.

113. Potencias. La expresión 2^3 se llama *tercera potencia ó cubo* de 2, ó sea 2 *elevado al cubo*; y 3^2 se llama *segunda potencia ó cuadrado* de 3, ó sea 3 *elevado al cuadrado*.

EJERCICIO 53. — ORAL.

Hállense los factores primos de :

1. 6.	**7.** 15.	**13.** 25.	**19.** 33.
2. 9.	**8.** 16.	**14.** 26.	**20.** 36.
3. 8.	**9.** 18.	**15.** 27.	**21.** 38.
4. 10.	**10.** 20.	**16.** 28.	**22.** 39.
5. 12.	**11.** 21.	**17.** 30.	**23.** 40.
6. 14.	**12.** 22.	**18.** 24.	**24.** 42.

EJERCICIO 54. — ESCRITO.

Hállense los factores primos de :

1. 112.	**4.** 117.	**7.** 555.
2. 121.	**5.** 495.	**8.** 324.
3. 132.	**6.** 520.	**9.** 539.

10. 289.	**19.** 1575.	**28.** 1170.
11. 860.	**20.** 3318.	**29.** 4260.
12. 437.	**21.** 6480.	**30.** 1001.
13. 1155.	**22.** 1017.	**31.** 3650.
14. 1220.	**23.** 2135.	**32.** 1760.
15. 6006.	**24.** 1932.	**33.** 1365.
16. 1435.	**25.** 3432.	**34.** 5070.
17. 2520.	**26.** 1144.	**35.** 1830.
18. 1084.	**27.** 1690.	**36.** 8175.

114. Divisores de un número. Los *divisores* de un número son los *divisores exactos* del número.

Así es que un hombre con billetes de cinco pesos cada uno puede hacer una suma de $20, pero no de $18. Un hombre con una balanza y una pesa de cuatro onzas puede pesar 16 onzas de te, pero no 22 onzas. Un hombre con una medida de cuatro litros puede medir 4, 8 ó 12 litros de melaza, pero no 5, 6 ó 7 litros.

115. Comunes divisores. El común divisor de dos ó más números es un número que divide exactamente *cada uno* de ellos.

De modo que $5 es un común divisor de $35 y $40, por estar exactamente contenido 7 veces en $35 y 8 veces en $40. 3 litros es un común divisor de 21 litros, 15 litros y 12 litros. 1 metro es un común divisor de 2 metros, 3 metros y 5 metros. 4 es un común divisor de 12, 16 y 20.

116. Máximo común divisor. El máximo común divisor de dos ó más números es *el número mayor* que divide exactamente á cada uno de ellos.

De modo que los divisores de 84 son 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, y los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.

Se ve por las dos series de divisores que 1, 2, 3, 4, 6, 12 son los únicos divisores de 84 y 36, y que 12 es el máximo; entonces, 12 es el máximo común divisor de 84 y 36.

Las letras M. C. D. significan Máximo Común Divisor.

117. Si los números enteros no tienen común divisor excepto 1, se les llama *primos entre sí.*

De modo que 27 y 32 son primos entre sí, aunque ambos son números compuestos.

118. 1. Hállese el M. C. D. de 84, 126, 210.

Descompóngase cada uno de los números en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 84 \\ 2 & 42 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 210 \\ 3 & 105 \\ 5 & 35 \\ & 7 \end{array}$$

$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$ $126 = 2 \times 3^2 \times 7.$ $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$

El factor 2 se encuentra una vez en todos los números.
El factor 3 se encuentra una vez en todos los números.
El factor 7 se encuentra una vez en todos los números.
Ningún otro factor se encuentra en *todos* los otros números.
Entonces, el M. C. D. es $2 \times 3 \times 7 = 42$.

2. Hállese el M. C. D. de 40 y de 72.

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5.$ $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$

Por consiguiente, 2 se presenta *tres* veces como factor en 40 y *tres* veces como factor en 72. Ningún otro factor es común á 40 y 72. Así es que $2 \times 2 \times 2 = 8$, que es el M. C. D. Por lo tanto

119. Para hallar el M. C. D. de dos ó más números se tiene la siguiente

REGLA. *Se descomponen los números en sus factores primos, y se halla el producto de los factores primos que son comunes á todos los números.*

Los factores comunes de dos ó más números pueden hallarse también del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 84 & 126 & 210 \\ \hline 3 & 42 & 63 & 105 \\ \hline 7 & 14 & 21 & 35 \\ \hline & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

Como todos los números son *pares*, 2 es común factor. Como 3 es divisor exacto de 42, 63 y 105, 3 es común factor.
Como 7 es divisor exacto de 14, 21 y 35, 7 es factor común.
Los cocientes 2, 3 y 5 no tienen factor común. Por lo tanto, los únicos factores *comunes* son 2, 3 y 7; y el M. C. D. es $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Ejercicio 55. — Escrito.

Hállese el M. C. D. de:

1. 9, 12, 18.
2. 24, 30, 36.
3. 12, 18, 24.
4. 24, 80, 96.
5. 28, 42, 56.
6. 42, 84, 126.
7. 44, 77, 110.
8. 25, 35, 110.
9. 21, 28, 77.
10. 60, 120, 150.
11. 32, 48, 128.
12. 45, 72, 81.
13. 51, 105, 243.
14. 36, 84, 132.
15. 36, 81, 135.
16. 42, 54, 60.
17. 75, 300, 450.
18. 144, 576, 720.
19. 13, 91, 143.
20. 14, 98, 112.

120. Hállese el M. C. D. de 115 y 161.

```
115) 161 (1
     115
      46) 115 (2
           92
           23) 46 (2
               46
```

SOLUCIÓN. Se divide el número mayor por el menor, y el último divisor por el último residuo, y así sucesivamente hasta que no haya residuo ninguno. El último divisor es el máximo común divisor.

Se puede emplear este método de hallar el M. C. D. cuando no se pueden separar fácilmente los números en sus factores primos.

EJERCICIO 56. — ESCRITO.

Hállese el M. C. D. de :

1. 374 y 2295.
2. 334 y 592.
3. 820 y 697.
4. 1086 y 905.
5. 1220 y 2013.
6. 6004 y 3318.
7. 2871 y 4234.
8. 1820 y 3367.
9. 315 y 2268.
10. 6870 y 8473.

EJERCICIO 57. — ESCRITO.

1. Un hombre tiene dos árboles que quiere cortar en tozas de *iguales longitudes*. Si los árboles tienen 84 pies y 96 pies de longitud y se les corta en tozas lo más largas posible, ¿cuál será la longitud de los trozos?

2. Un hombre tiene 152 libras de jabón y 140 libras de velas que quiere envasar, poniendo en cada caja el mismo número de libras y el mayor número posible. ¿Cuántas libras puede poner en cada caja?

3. ¿Cuál será la longitud de la cadena más larga que mida exactamente el largo y la anchura de un campo que tenga 484 metros de largo y 420 metros de ancho?

4. Un hombre tiene dos rollos de billetes de banco de la misma denominación. En un rollo tiene $280 y en otro $275. ¿Cuál es la denominación de los billetes si son de la mayor posible?

5. Una caja de te contenía 70 libras y otra caja 72 libras. El te fué dividido en paquetes iguales del mismo peso. Hállese el peso de cada paquete si se ha puesto el te en los mayores paquetes posibles.

6. Un pulpero tiene 1314 libras de azúcar blanco y 1533 libras de azúcar terciado. Quiere poner este azúcar en barriles sin mezclar el azúcar, el mismo número de libras y el mayor número de ellas en cada uno de los barriles.

¿Cuántas libras puede poner en cada barril, y cuántos barriles de azúcar tendría?

7. Un hombre avanza más de 20 pulgadas y menos de 30 pulgadas en cada paso. Da un número exacto de pasos andando 203 pulgadas y un número exacto andando 261 pulgadas. ¿Cuál es el largo de sus pasos?

8. De un paquete de municiones que pesa 6015 granos se toma una parte que pesa 1650 granos. Hállese el peso máximo que puede tener cada munición.

121. Múltiplos. Si se multiplica un número por un entero, el producto es un *múltiplo* del número.

De modo que $20 es múltiplo de $5, puesto que 4 veces $5 hacen $20; 18 metros es múltiplo de 3 metros, puesto que 6 veces 3 metros hacen 18 metros.

122. Se halla una serie de múltiplos de un número multiplicando el número por los enteros 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Puesto que un número compuesto es el producto de *un solo grupo* de números primos (§ 106), cada múltiplo de un número *contiene todos los factores primos del número.*

123. Común múltiplo. Se llama al múltiplo de dos ó más números *común múltiplo* de los números.

De modo que 6 × $2 = $12; 4 × $3 = $12; 3 × $4 = $12; 2 × $6 = $12. Entonces $12 es el común múltiplo de $2, $3, $4 y $6.

124. Mínimo común múltiplo. Se llama al *menor* común múltiplo de dos ó más números *mínimo común múltiplo;* y es el menor número que es divisible exactamente por todos ellos.

De modo que los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, etc.; y los múltiplos de 4 son 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, etc. Los múltiplos comunes de 3 y 4 son 12, 24 y 36, etc.; y el menor de éstos es 12. Entonces, el mínimo común múltiplo de 3 y de 4 es 12.

Las letras M. C. M. significan Mínimo Común Múltiplo.

125. El M. C. M. de dos ó más números contiene *todos los factores primos* de cada uno de estos números. Cada factor primo debe, por lo tanto, encontrarse en el M. C. M. el *mayor número de veces* que se halla como factor *en cualquier uno* de ellos.

No se necesita, sin embargo, *repetir* un factor primo de *uno* de los números dados, porque se encuentre en *otro* de los números dados.

De modo que: $\$20 = 2 \times 2 \times 5 \times \$1,$
y $\$30 = 2 \times 3 \times 5 \times \$1.$

El M. C. M. se halla tomando como factores 2 *dos veces*, 3 *una vez* y 5 *una vez*, y por lo tanto es $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times \$1 = \$60$.

126. Hállese el M. C. M. de 84, 168, 252 y 420.

Resuélvase cada uno de los números en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 84 \\ 2 & 42 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 168 \\ 2 & 84 \\ 2 & 42 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 420 \\ 2 & 210 \\ 3 & 105 \\ 5 & 35 \\ & 7 \end{array}$$

Se halla el factor 2 *tres* veces en 168; el factor 3 se halla *dos* veces en 252; el factor 5 se halla *una vez* en 420; y el factor 7 se halla *una vez* en todos los números dados. Así es que el M. C. M. es $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520$. Por lo tanto,

127. Para hallar el M. C. M. de dos ó más números se tiene la siguiente

Regla. *Se separa cada número en sus factores primos; y se halla el producto de estos factores, tomando cada factor el mayor número de veces que se halla en cualquiera de los números dados.*

1. Hállese el M. C. M. de 18, 24, 27, 45.

Dispónganse los números en una línea, y divídase por el menor factor primo que divida *dos* ó más de los números.

$$\begin{array}{r|llll} 2 & 18 & 24 & 27 & 45 \\ \hline 3 & \cancel{9} & 12 & 27 & 45 \\ \hline 3 & & 4 & 9 & 15 \\ \hline & & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

Se divide primero por 2, y se escriben los cocientes y los números que no han sido divididos en una línea debajo. En la primera línea de los cocientes se tacha el 9, puesto que es un divisor exacto de 27, y, por lo tanto, 27 contiene todos los factores de 9. Después se divide por 3, y los cocientes por 3, y se obtienen en la última línea los números 4, 3 y 5. Ninguno de *dos* de los números 4, 3 y 5 tienen factor común. Por lo tanto, el M. C. M. es $2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 3 \times 5 = 1080$.

2. Hállese el M. C. M. de 3, 9, 27, 54.

$$\cancel{3}, \quad \cancel{9}, \quad \cancel{27}, \quad 54.$$

Se tacha el 3, que está contenido en 9; después el 9, que está contenido en 27; en seguida 27, que está contenido en 54, y se tiene 54 por el M. C. M. de los números.

3. Hállese el M. C. M. de 13, 15, 26, 39.

$$\begin{array}{r|llll} 3 & \cancel{13} & 15 & 26 & 39 \\ \hline & & 5 & 26 & \cancel{13} \end{array}$$

Se tacha el 13, que está contenido en 26 y se divide por 3, obteniendo 5, 26, 13. Se tacha el 13 de esta línea, que está contenido en 26, y se tiene por M. C. M. $3 \times 5 \times 26 = 390$.

Ejercicio 58. — Escrito.

Hállese el M. C. M. de:

1. 5, 10, 15.
2. 9, 12, 18.
3. 24, 30, 36.
4. 9, 24, 40.
5. 2, 3, 5, 7.
6. 2, 5, 13, 26.
7. 5, 20, 25, 100.
8. 2, 19, 38, 76.
9. 3, 9, 27, 81.
10. 3, 9, 36, 45.
11. 13, 26, 39, 52.
12. 7, 13, 21, 26.
13. 6, 18, 54, 108.
14. 5, 9, 12, 15.
15. 12, 15, 18, 24.
16. 12, 18, 30, 45.
17. 9, 12, 22, 33.
18. 8, 21, 28, 35.
19. 6, 7, 8, 9.
20. 36, 45, 54, 63.
21. 13, 26, 39, 169.
22. 8, 12, 18, 20.
23. 11, 44, 132, 198.
24. 11, 22, 55, 110.
25. 14, 18, 20, 21.
26. 20, 28, 56, 70.
27. 17, 34, 51, 85.
28. 45, 50, 60, 63, 84.
29. 9, 10, 14, 15, 18.
30. 21, 24, 26, 28, 30.

EJERCICIO 59. — ESCRITO.

1. Hállese la menor distancia que se puede exactamente medir con una regla de tres pies, de cuatro pies, ó con un palo de diez pies.

2. Hállese la menor cantidad de dinero que se puede contar en piezas de cinco centavos, de diez centavos ó de veinticinco centavos.

3. ¿ Cuál es el menor número de metros de alfombra en un rollo que se puede cortar en pedazos de 12 metros, 15 metros ó 20 metros ?

4. ¿ Cuál es el menor número de naranjas que se puede dividir igualmente entre 21, 24 ó 30 niños ?

5. Hállese el menor número de áreas de una hacienda que se puede dividir exactamente en lotes de 12, 15 ó 18 áreas.

6. ¿ Cuál es la menor cantidad de leche que se puede medir exactamente con una medida de dos litros, de cuatro litros, de seis litros ó de ocho litros ?

7. Tengo bastante dinero para comprar un número entero de docenas de naranjas á 40 centavos docena, ó un número entero de canastas de melocotones á $1.25 canasta. ¿ Cuánto tengo ?

8. Hállese la capacidad del aljibe más pequeño que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de dos caños, uno que arroje 36 decalitros y otro 42 decalitros por minuto.

9. Hállese la capacidad del aljibe más pequeño que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de dos caños, ó ambos juntos, uno que arroje 30 decalitros y otro 20 decalitros por minuto.

10. Hállese el menor número de naranjas arregladas en grupos de 6, 7, 8 ó 9 que tenga cinco de sobra en cada caso.

ADVERTENCIA. Añádase 5 al M. C. M. de 6, 7, 8, 9.

128. Eliminación. Eliminación es la operación de abreviar el trabajo en la división quitando ó *eliminando* factores iguales del dividendo y del divisor.

Divídase 9 × 18 × 24 entre 3 × 6 × 12.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{3}{\cancel{18}} \times \overset{2}{\cancel{24}}}{\cancel{3} \times \cancel{6} \times \cancel{12}} = \frac{3 \times 3 \times 2}{1 \times 1 \times 1} = 18.$$

Se elimina el factor 3 en el divisor, y 3 las veces que está en 9 en el dividendo. Se elimina el factor 6 en el divisor, y 6 las veces que está en 18 en el dividendo. Se elimina el factor 12 en el divisor, y 12 las veces que está en 24 en el dividendo. El dividendo que resulta es 3 × 3 × 2, y el divisor es 1 × 1 × 1. El cociente, por lo tanto, es 18.

EJERCICIO 60. — ESCRITO.

Hállese el cociente de :

1. $\frac{7 \times 6 \times 16}{3 \times 8 \times 14}$.
2. $\frac{11 \times 27 \times 30}{9 \times 15 \times 3}$.
3. $\frac{32 \times 35 \times 9}{3 \times 16 \times 7}$.
4. $\frac{9 \times 14 \times 39}{13 \times 7 \times 18}$.
5. $\frac{625 \times 3 \times 54}{75 \times 5 \times 18}$.
6. $\frac{1728 \times 3 \times 7}{12 \times 12 \times 12}$.
7. $\frac{29 \times 15 \times 6}{87 \times 6 \times 5}$.
8. $\frac{84 \times 13 \times 5}{91 \times 4 \times 15}$.

9. Si un agricultor vende 25 fanegas de trigo á 96 centavos fanega y toma en pago paño á 64 centavos el metro, ¿ cuántos metros de paño recibe ?

10. Tres piezas de paño de 20 metros cada una, á $5 el metro, fueron cambiadas por 5 piezas de paño de 40 metros cada una. ¿ Cuál era el valor de la segunda clase de paño por metro ?

11. Luis Pastor cambió 9 cuñetes de mantequilla con un peso de 28 libras cada uno, á 50 centavos la libra, por rollos de estera de 40 metros cada uno, valiendo 15 centavos el metro. ¿ Cuántos rollos completos recibió ?