Liquidación de Cuentas.

428. Hállese el saldo debido de las cuentas siguientes el 10 de Septiembre de 1896, computando el interés al 6% sobre cada artículo desde su fecha hasta el día de la liquidación, calculando el tiempo en días:

1896.		DEBE.	INT.	1896.		HABER.	INT.
Junio 29.	A Te,	$250	$3.04	Julio 3.	Por Efectivo,	$200	$2.30
Julio 13.	"	400	3.93	" 17.	"	125	1.15
" 27.	"	500	3.75	" 31.	"	350	2.39
				Sept.e 10.	Sld.o á ct.a	475	
Liq.do Sept.e 10 de 1896				" 10.	" por int.		4.88
		$1150	$10.72			$1150	$10.72

Por lo tanto, el saldo en efectivo es $475 + $4.88, ó $479.88.

NOTA. Cuando el saldo á cuenta y el saldo por interés se encuentran en lados *opuestos*, el saldo en efectivo es su *diferencia*.

EJERCICIO 168. — ESCRITO.

Hállese el saldo en efectivo Sept.e 10 de 1896, de las cuentas siguientes, calculando el interés al 6%:

1.

1896.		DEBE.	1896.		HABER.
Mayo 12.	A Te.	$250.00	Mayo 26.	Por Efectivo.	$200.00
" 28.	"	610.00	Junio 22.	"	500.00
Junio 16.	"	300.00	" 30.	"	400.00

2.

1896.		DEBE.	1896.		HABER.
Marzo 7.	A Café.	$350.00	Abril 3.	Por Efectivo.	$150.00
Abril 10.	"	98.50	Mayo 2.	"	150.00
Mayo 25.	"	300.00	Junio 4.	"	200.00

3.

1896.		DEBE.	1896.		HABER.
Mayo 8.	A Azúcar.	$250.00	Junio 22.	Por Efectivo.	$200.00
Junio 5.	"	670.00	Julio 21.	"	500.00
Julio 3.	"	200.00	Ag.to 19.	"	300.00

CAPÍTULO XIV.

POTENCIAS Y RAÍCES.

429. El **cuadrado** de un número es el producto de *dos* factores, cada uno igual al número.

De modo que los cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
son 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

430. La **raíz cuadrada** de un número es uno de los *dos factores iguales* del número.

De modo que las raíces cuadradas de 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

431. La raíz cuadrada de un número se indica con el *signo radical* $\sqrt{\ }$, ó por el quebrado $\frac{1}{2}$ escrito encima y á la derecha del número.

Por ejemplo, $\sqrt{27}$, ó $27^{\frac{1}{2}}$, significa la raíz cuadrada de 27.

432. Puesto que $35 = 30 + 5$, el cuadrado de 35 puede obtenerse como sigue:

$$\begin{array}{l} 30 + 5 \\ \underline{30 + 5} \\ 30^2 + (30 \times 5) \\ \underline{\quad + (30 \times 5) + 5^2} \\ 30^2 + 2(30 \times 5) + 5^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30^2 = 900 \\ 2(30 \times 5) = 300 \\ 5^2 = \underline{\ \ 25} \\ 35^2 = 1225 \end{array}$$

433. Por lo tanto, puesto que todo número formado por dos ó más guarismos puede considerarse como compuesto de decenas y unidades,

El cuadrado de un número contendrá el cuadrado de las decenas + dos veces las decenas × las unidades + el cuadrado de las unidades.

Raíz Cuadrada.

434. El primer paso para extraer la raíz cuadrada de un número es separar los guarismos del número en grupos.

Puesto que $1 = 1^2$, $100 = 10^2$, $10,000 = 100^2$, y así sucesivamente, la raíz cuadrada de cualquier número entero expresado por *uno* ó *dos* guarismos es un número de *un* guarismo; si está expresado por *tres* ó *cuatro* guarismos es un número de *dos* guarismos, etc.

Por lo tanto, si un número entero se divide en grupos de dos guarismos cada uno, de derecha á izquierda, el número de guarismos en la raíz será igual al número de grupos de guarismos. La última división de la izquierda puede tener uno ó dos guarismos.

Hállese la raíz cuadrada de 1225.

Solución. El primer grupo, 12, contiene el cuadrado del número de las decenas de la raíz.

El mayor cuadrado contenido en 12 es 9, y la raíz cuadrada de 9 es 3. De modo que 3 es el guarismo de las decenas de la raíz.

```
    12 25(35
     9
65) 3 25
    3 25
```

Se resta el cuadrado de las decenas, y el residuo contiene dos veces las decenas $\times$ las unidades $+$ el cuadrado de las unidades. Dos veces 3 decenas son 6 decenas, y las 6 decenas están contenidas en las 32 decenas del residuo 5 veces. De aquí que 5 es el guarismo de las unidades de la raíz. Puesto que dos veces las decenas $\times$ las unidades $+$ el cuadrado de las unidades es igual á (dos veces las decenas $+$ las unidades) $\times$ las unidades, las 5 unidades se agregan á las 6 decenas, y el resultado, 65, se multiplica por 5.

435. El mismo método se aplica á los números de más de dos grupos de guarismos, considerando *la parte de la raíz ya hallada como tantas decenas con respecto al guarismo inmediato de la raíz.*

Extráigase la raíz cuadrada de 7,890,481.

```
       7 89 04 81(2809
       4
  48)  3 89
       3 84
5609)  5 04 81
       5 04 81
```

Solución. Cuando se ha bajado el tercer grupo, 04, y se ha hallado el divisor, 56, el guarismo inmediato de la raíz es 0, porque 56 no está contenido en 50. Por lo tanto, 0 se pone en la raíz y en el divisor, y se bajan los dos guarismos inmediatos, 81.

436. Si la raíz cuadrada de un número tiene lugares decimales, el número los tendrá *dobles.*

Por ejemplo, si 0.11 es la raíz cuadrada de un cierto número, el número será $(0.11)^2 = 0.11 \times 0.11 = 0.0121$. De modo que, si un número dado contiene un decimal, se divide en grupos de dos guarismos cada uno, principiando en el punto decimal y marcando hacia la izquierda para el número entero, y hacia la derecha para el decimal. El último grupo del decimal debe tener *dos* guarismos; se agrega un cero si fuese necesario.

Extráigase la raíz cuadrada de 52.2729.

```
      52.27 29(7.23
      49
142)   3 27
       2 84
1443)    43 29
         43 29
```

Solución. Se puede ver por los grupos de guarismos que la raíz tendrá un lugar entero y dos lugares decimales.

437. Si un número no es un cuadrado exacto, se pueden agregar ceros y se halla un valor *aproximado* de la raíz.

Extráigase la raíz cuadrada de 19 hasta seis lugares decimales.

```
       19.00 00 00(4.358899
       16
  83)   3 00
        2 49
 865)     51 00
          43 25
8708)      7 75 00
           6 96 64
8716)        78 360
             69 728
              8 6320
              7 8444
                78760
```

Solución. En este ejemplo, después de hallar los cuatro guarismos de la raíz, se hallan los otros tres por la división ordinaria. La regla en tales casos es que un guarismo menos que el número de guarismos ya obtenido puede hallarse sin error por la división, siendo el divisor que se debe usar dos veces la parte de la raíz ya hallada.

438. La raíz cuadrada de un quebrado común se halla extrayendo la raíz cuadrada del numerador y del denominador, ó reduciendo el quebrado á fracción decimal y después extrayendo la raíz.

439. REGLA PARA HALLAR LA RAÍZ CUADRADA. *Se separa el número en grupos de dos guarismos cada uno, principiando por las unidades.*

Se halla el mayor cuadrado contenido en el grupo de la izquierda y se escribe su raíz como primer guarismo de la raíz pedida.

Se eleva al cuadrado esta raíz, se resta el resultado del grupo de la izquierda, y al residuo se agrega el grupo inmediato para dividendo.

Para hallar el divisor parcial, se duplica la raíz ya hallada, considerada como decenas, y se divide el dividendo por ella. El cociente (ó el cociente disminuido) será el guarismo inmediato de la raíz.

Se añade á este divisor parcial el último guarismo de la raíz para hallar el divisor completo. Se multiplica este divisor completo por el último guarismo de la raíz, se resta el producto del dividendo, y al residuo se agrega el grupo inmediato para hallar el nuevo dividendo.

Se procede de este modo hasta que todos los grupos hayan sido agregados. El producto será la raíz cuadrada pedida.

NOTA 1. Cuando el número no es un cuadrado exacto, se agregan grupos de ceros y se continúa la operación.

NOTA 2. Si un número dado contiene decimales, se divide en grupos de dos guarismos cada uno, principiando en el punto decimal y marcando hacia la izquierda para el número entero y hacia la derecha para el número decimal.

Cuídese de que el último grupo á la derecha del punto decimal tenga dos guarismos, agregando un cero cuando sea necesario.

EJERCICIO 169. — ESCRITO.

Hállese la raíz cuadrada de:

1. 190,969.	**5.** 43.267.	**9.** $\frac{729}{961}$.
2. 743,044.	**6.** 872.6783.	**10.** $\frac{225}{4489}$.
3. 401,956.	**7.** 0.00755.	**11.** $\frac{1849}{3249}$.
4. 1075.84.	**8.** 1272.9.	**12.** $\frac{1}{5}$.

Raíz Cúbica.

440. El **cubo** de un número es el producto de *tres* factores, cada uno igual al número.

Por ejemplo, los cubos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
son 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

441. La **raíz cúbica** de un número es uno de los *tres factores iguales* del número.

Por ejemplo, las raíces cúbicas de 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

442. La raíz cúbica de un número se indica con el signo radical, $\sqrt[3]{\ }$, ó por el quebrado $\frac{1}{3}$ escrito encima y á la derecha del número.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{343}$, ó $343^{\frac{1}{3}}$, significa la raíz cúbica de 343.

443. Puesto que $35 = 30 + 5$, el cubo de 35 puede obtenerse como sigue:

$$\begin{array}{l}
30 + 5 \\
\underline{30 + 5} \\
30^2 + (30 \times 5) \\
\underline{\quad + (30 \times 5) + 5^2} \\
30^2 + 2(30 \times 5) + 5^2 \\
\underline{30 + 5} \\
30^3 + 2(30^2 \times 5) + (30 \times 5^2) \\
\underline{\quad + (30^2 \times 5) + 2(30 \times 5^2) + 5^3} \\
30^3 + 3(30^2 \times 5) + 3(30 \times 5^2) + 5^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
30^3 = & 27,000 \\
3(30^2 \times 5) = & 13,500 \\
3(30 \times 5^2) = & 2,250 \\
5^3 = & \underline{125} \\
35^3 = & 42,875
\end{array}$$

Por lo tanto, el cubo de cualquier número compuesto de decenas y de unidades contiene cuatro partes:

I. *El cubo de las decenas.*

II. *Tres veces el producto del cuadrado de las decenas por las unidades.*

III. *Tres veces el producto de las decenas por el cuadrado de las unidades.*

IV. *El cubo de las unidades.*

444. El primer paso para extraer la raíz cúbica de un número es separar los guarismos del número en grupos.

Puesto que $1 = 1^3$, $1000 = 10^3$, $1{,}000{,}000 = 100^3$, y así sucesivamente, la raíz cúbica de cualquier número entero que tiene *uno, dos ó tres* guarismos es un número de *un* guarismo; y la raíz cúbica de cualquier número entero que tiene *cuatro, cinco ó seis* guarismos, es un número de *dos* guarismos, etc.

Por lo tanto, si un número entero se divide en grupos de tres guarismos cada uno, de derecha á izquierda, el número de guarismos en la raíz será igual al número de grupos. La última división á la izquierda puede tener uno, dos ó tres guarismos.

Extráigase la raíz cúbica de 42,875.

Solución. Puesto que 42,875 consta de dos grupos, la raíz cúbica constará de dos guarismos.

El primer grupo, 42, contiene la raíz cúbica del número de las decenas de la raíz.

El mayor cubo contenido en 42 es 27, y la raíz cúbica de 27 es 3. De modo que 3 es el guarismo de las decenas de la raíz.

$$\begin{array}{r|l}
 & 42\,875\,(35 \\
 & 27 \\ \hline
3 \times 30^2 = 2700 & 15\,875 \\
3 \times (30 \times 5) = 450 & \\
5^2 = 25 & \\ \hline
3175 & 15\,875
\end{array}$$

El residuo que resulta al restar el cubo de las decenas contendrá tres veces el producto del cuadrado de las decenas por las unidades + tres veces el producto de las decenas por el cuadrado de las unidades + el cubo de las unidades.

Cada una de estas tres partes contiene el número de las unidades como factor.

Por lo tanto, 15,875 consta de dos factores, uno de los cuales es el número de las unidades de la raíz; y el otro factor es tres veces el cuadrado de las decenas + tres veces el producto de las decenas multiplicadas por las unidades + el cuadrado de las unidades. La parte mayor de este segundo factor es tres veces el cuadrado de las decenas.

Y, si las 158 centenas del residuo se dividen por $3 \times 30^2 = 27$ centenas, el cociente será el número de las unidades de la raíz.

Se puede entonces completar el segundo factor añadiendo á los 2700 $3 \times (30 \times 5) = 450$ y $5^2 = 25$.

445. El mismo método se aplica á los números de más de dos grupos, considerando *la parte de la raíz ya hallada como tantas decenas con respecto al guarismo inmediato de la raíz.*

Extráigase la raíz cúbica de 57,512,456.

$$\begin{array}{r|l}
 & 57\;512\;456\,(386 \\
 & 27 \\ \hline
3 \times 30^2 = 2700 & 30\;512 \\
3 \times (30 \times 8) = 720 & \\
8^2 = 64 & \\ \hline
3484 & 27\;872 \\ \hline
 & 2\;640\;456 \\
3 \times 380^2 = 433200 & \\
3 \times (380 \times 6) = 6840 & \\
6^2 = 36 & \\ \hline
440076 & 2\;640\;456
\end{array}$$

446. Si la raíz cúbica de un número tiene lugares decimales, el número los tendrá *triples.*

De modo que si 0.11 es la raíz cúbica de un número, el número es $0.11 \times 0.11 \times 0.11 = 0.001331$. Por consiguiente, si un número dado contiene un decimal, se dividen los guarismos del número en grupos de tres guarismos cada uno, principiando en el punto decimal y marcando hacia la izquierda para el número entero, y hacia la derecha para el decimal. Se debe cuidar que el último grupo á la derecha del punto decimal contenga *tres* guarismos, agregando ceros cuando sea necesario.

Extráigase la raíz cúbica de 187.149248.

$$\begin{array}{r|l}
 & 187.149\;248\,(5.72 \\
 & 125 \\ \hline
3 \times 50^2 = 7500 & 62\;149 \\
3 \times (50 \times 7) = 1050 & \\
7^2 = 49 & \\ \hline
8599 & 60\;193 \\ \hline
 & 1\;956\;248 \\
3 \times 570^2 = 974700 & \\
3 \times (570 \times 2) = 3420 & \\
2^2 = 4 & \\ \hline
978124 & 1\;956\;248
\end{array}$$

447. Si el número dado no es un cubo exacto, se le pueden agregar ceros, y se puede hallar un valor de la raíz tan inmediato al valor *verdadero* como se quiera.

Extráigase la raíz cúbica de 1250.6894.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & 1\ 250.689\ 400\,(10.77 \\
 & & 1 \\
3 \times 10^2 = & 300 & 250
\end{array}
$$

Puesto que 300 no está contenido en 250, el próximo guarismo de la raíz es 0.

$$
\begin{array}{rr|l}
3 \times 100^2 = & 30000 & 250\ 689 \\
3 \times (100 \times 7) = & 2100 & \\
7^2 = & 49 & \\
 & 32149 & 225\ 043 \\
 & & 25\ 646\ 400 \\
3 \times 1070^2 = & 3434700 & \\
3 \times (1070 \times 7) = & 22470 & \\
7^2 = & 49 & \\
 & 3457219 & 24\ 200\ 533 \\
 & & 1\ 445\ 867
\end{array}
$$

448. El siguiente método se llama método corto ó simplificado.

Extráigase la raíz cúbica de 5 hasta cinco lugares decimales.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 5.000\,(1.70997 \\
 & & 1 \\
3 \times 10^2 = & 300 & 4\ 000 \\
3\,(10 \times 7) = & 210 & \\
7^2 = & 49 & \\
 & 559 & 3\ 913 \\
 & 259 & 87\ 000\ 000 \\
3 \times 1700^2 = & 8670000 & \\
3\,(1700 \times 9) = & 45900 & \\
9^2 = & 81 & \\
 & 8715981 & 78\ 443\ 829 \\
 & 45981 & 8\ 556\ 1710 \\
3 \times 1709^2 = & 8762043 & 7\ 885\ 8387 \\
 & & 670\ 33230 \\
 & & 613\ 34301
\end{array}
$$

Después que se han hallado los dos primeros guarismos de la raíz, se obtiene el próximo divisor de tanteo bajando la suma de 210 y 49 obtenida al completar el divisor precedente, después se suman los tres números unidos por el corchete, y se agregan dos ceros al resultado.

Se ve de una ojeada que cuando el divisor de tanteo está aumentado por 3 veces las 17 decenas de la raíz, será mayor que 87,000; de modo que se pone 0 en la raíz, y 3×1700^2 se obtiene agregando dos ceros á los 86,700. Además: se obtiene el divisor de tanteo bajando la suma de 45,900 y 81, que se obtuvo completando el divisor precedente, después se suman los tres números unidos por el corchete, y se agregan dos ceros al resultado.

Se hallan por la división los dos últimos guarismos de la raíz. La regla en tales casos es que dos guarismos menos que el número de guarismos ya obtenido se pueden hallar sin error por la división, siendo el divisor que se emplee tres veces el cuadrado de la parte de la raíz ya hallada.

449. La raíz cúbica de un quebrado común se halla tomando la raíz cúbica del numerador y del denominador, ó reduciendo el quebrado á fracción decimal y después extrayendo la raíz.

450. Regla para la Raíz Cúbica. *Se separa el número en grupos de á tres guarismos, principiando por las unidades.*

Se halla el mayor cubo contenido en el grupo de la izquierda y se escribe su raíz para el primer guarismo de la raíz pedida.

Se cubica esta raíz, se resta el resultado del grupo de la izquierda y se agrega al residuo el grupo inmediato para obtener el dividendo.

Para divisor parcial se toma tres veces el cuadrado de la raíz ya hallada, considerada como decenas, y se divide el dividendo por aquél. El cociente (ó el cociente disminuido) será el segundo guarismo de la raíz.

A este divisor parcial se añade tres veces el producto del primer guarismo de la raíz considerado como decenas multiplicado por el segundo guarismo, y también el cuadrado del segundo guarismo. Esta suma será el divisor completo.

Se multiplica el divisor completo por el segundo guarismo de la raíz, se resta el producto del dividendo, y se agrega al residuo el inmediato grupo para tener un nuevo dividendo.

Se procede de este modo hasta que se hayan agregado todos los grupos. El resultado será la raíz cúbica pedida.

Ejercicio 170. — Escrito.

Hállese la raíz cúbica de:

1. 636,056.	7. 71.296.	13. $\frac{2197}{4913}$.
2. 2,048,383.	8. 643.25.	14. $\frac{6859}{12167}$.
3. 47.832147.	9. 7.1296.	15. $\frac{1}{2}$.
4. 11.390625.	10. 0.75475.	16. $\frac{5}{8}$.
5. 87,528.384.	11. 1,127,632.	17. 2.
6. 0.000912673.	12. 21.782.	18. 3.

Representación Geométrica de las Raíces Cuadradas y Cúbicas.

El cuadrado de $(30+5) = 30^2 + 2(30 \times 5) + 5^2$. § 432.

El 30^2 puede representarse por un cuadrado de 30^{mm} de lado.

El $2(30 \times 5)$ puede representarse por dos fajas de 30^{mm} de largo y 5^{mm} de ancho, de la figura 2, que están agregadas á los lados contiguos de la figura 1.

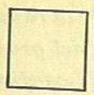


Fig. 1.

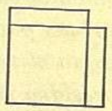


Fig. 2.

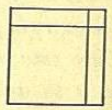


Fig. 3.

El 5^2 puede representarse por el pequeño cuadrado de la figura 3 necesario para hacer un cuadrado completo de la figura 2.

Al extraer la raíz cuadrada de 1225, el cuadrado grande, que tiene 30^{mm} por lado, se quita primero, y queda una superficie de 325^{mmc}.

Esta superficie consta de dos rectángulos iguales, cada uno de 30^{mm} de largo, y de un pequeño cuadrado cuyo lado es igual al ancho de los rectángulos.

El ancho de los rectángulos se halla dividiendo los 325^{mmc} por la suma de sus largos, es decir, por 60^{mm}, lo que da 5^{mm}.

Por lo tanto, todo el largo de las superficies sumadas es $30^{mm} + 30^{mm} + 5^{mm} = 65^{mm}$, y el ancho es 5^{mm}.

Entonces, el área total es $(5 \times 65)^{mmc} = 325^{mmc}$.

El cubo de $(30+5) = 30^3 + 3(30^2 \times 5) + 3(30 \times 5^2) + 5^3$. § 443.

El 30^3 puede representarse por un cubo cuya arista es 30^{mm}.

El $3(30^2 \times 5)$ puede representarse por tres cuerpos rectangulares iguales, cada uno de 30^{mm} de largo, 30^{mm} de ancho y 5^{mm} de espesor, que se añaden á las tres caras contiguas de la figura 1.

El $3(30 \times 5^2)$ puede representarse por tres cuerpos rectangulares iguales, 30^{mm} de largo, 5^{mm} de ancho y 5^{mm} de espesor, que se añaden á la figura 2.

El 5^3 puede representarse por el pequeño cubo necesario para completar el cubo de la figura 3.

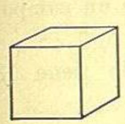


Fig. 1.

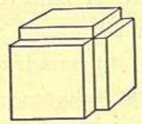


Fig. 2.

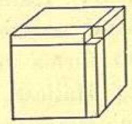


Fig. 3.

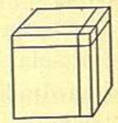


Fig. 4.

Al extraer la raíz cúbica de 42,875, el cubo grande (véase la figura 1), cuya arista es de 30^{mm}, se quita primero.

Quedan entonces $(42,875 - 27,000)^{mmcb} = 15,875^{mmcb}$.

La mayor parte de esto está contenida en los tres cuerpos rectangulares que se añaden á la figura 1, y los que tienen 30^{mm} de largo y 30^{mm} de ancho.

El espesor de estos cuerpos se halla dividiendo los $15,875^{mmcb}$ por la suma de las tres caras, cada una de las cuales es 30^{mm} de lado, es decir, por 2700^{mmc}. El resultado es 5^{mm}.

Hay también los tres cuerpos rectangulares que se añaden á la figura 2, y que tienen 30^{mm} de largo y 5^{mm} de ancho; y un cubo que se añade á la figura 3, y que tiene 5^{mm} de largo y 5^{mm} de ancho.

Por lo tanto, la suma de los productos de las dos dimensiones de todos estos cuerpos es

Para los mayores cuerpos rectangulares,	$3(30 \times 30^{mmc})$ =	2700^{mmc}.
Para los menores cuerpos rectangulares,	$3(30 \times 5^{mmc})$ =	450^{mmc}.
Para el pequeño cubo,	(5×5^{mmc}) =	25^{mmc}.
		3175^{mmc}.

Este número multiplicado por la tercera dimensión da (5×3175) milímetros cúbicos = 15,875 milímetros cúbicos.

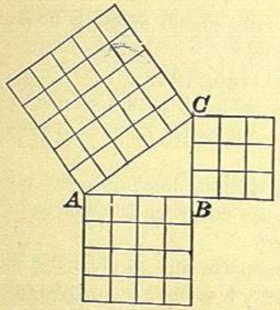
Ejercicio 171. — Escrito.

Aplicaciones de las Raíces Cuadradas y Cúbicas.

451. *Se halla la longitud de un lado de un cuadrado extrayendo la raíz cuadrada de su área.*

1. Hállese en metros la longitud del lado de un campo cuadrado que tiene 4 hectáreas.
2. Hállese en metros la longitud del lado de un pedazo cuadrado de monte que tiene 4624 hectáreas.
3. Un campo rectangular tiene 945 metros de largo y 420 metros de ancho. Hállese el lado de un campo cuadrado que tiene la misma área.
4. Un solar en forma de un cuadrado tiene 13,225 metros cuadrados. Hállese su lado.

Un triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo; el lado opuesto al ángulo recto se llama la hipotenusa; y los otros dos lados se llaman catetos.



En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (AC) es igual á la suma de los cuadrados de los catetos. Por lo tanto, la hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos; y uno cualquiera de los catetos es igual á la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

5. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 82 metros y el otro 35 metros. Hállese la hipotenusa.
6. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 52 metros y la hipotenusa 65 metros. Hállese el otro cateto.

7. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 72 metros y la hipotenusa 75 metros. Hállese el otro cateto.
8. Hállese la longitud de la línea recta más larga que se puede trazar en el suelo de un cuarto de 15 metros cuadrados.

452. *El área de cualquier triángulo es igual á la raíz cuadrada de la mitad de la suma de los lados multiplicados sucesivamente por los tres residuos obtenidos substrayendo cada lado separadamente de la mitad de dicha suma.*

9. Hállese el área de un triángulo cuyos lados tienen respectivamente 5^{cm}, 6^{cm} y 7^{cm}.

La mitad de la suma de los lados es $\frac{5+6+7}{2}$, ó 9.

$$9-5=4, \qquad 9-6=3, \qquad 9-7=2.$$

$$\sqrt{9\times 4\times 3\times 2}=\sqrt{216}=14.696+$$

14.696^{cmc}. *Respuesta.*

10. Hállese el área en metros cuadrados de un triángulo cuyos lados tienen respectivamente 22^m, 28^m y 34^m.
11. Hállese el área de un triángulo cuyos lados tienen respectivamente 3 pulgadas, 4 pulgadas y 6 pulgadas.
12. ¿Cuál es el área de un campo triangular cuyos lados tienen respectivamente 360^m, 385^m y 315^m?
13. Hállese el área de un campo triangular cuyos lados tienen respectivamente 450^m, 500^m y 550^m.

453. *La arista de un cubo es igual á la raíz cúbica del volumen.*

14. Hállese la arista de un cubo que tiene 1728 pulgadas cúbicas.
15. Hállese la arista de un cubo cuyo volumen es igual al volumen de un cuerpo rectangular de 16 pies de largo, 2 pies de ancho y 2 pies de altura.
16. Hállese la arista de un aljibe cúbico que contenga tantos pies cúbicos como un aljibe rectangular de 12 pies de largo, 8 pies de ancho y $5\frac{1}{2}$ pies de altura.

454. Figuras semejantes son las que tienen la misma forma.

455. *Las áreas de figuras semejantes son unas á otras como los cuadrados de sus correspondientes dimensiones, y sus volúmenes son unos á otros como los cubos de sus correspondientes dimensiones.*

Las dimensiones correspondientes de figuras semejantes son unas á otras como las raíces cuadradas de sus áreas, ó como las raíces cúbicas de sus volúmenes.

EJERCICIO 172. — ESCRITO.

1. La arista de un cubo es de 2 pulgadas, y la arista de otro cubo es de 4 pulgadas. ¿Cuántas veces la superficie total del más pequeño es la superficie total del más grande? ¿Cuántas veces el volumen del más pequeño es el volumen del más grande?

2. El volumen de un cuerpo rectangular es de 1728 pulgadas cúbicas, y el volumen de un cuerpo semejante es de 13,824 pulgadas cúbicas. ¿Cuántas veces una dimensión del cuerpo más pequeño es la dimensión correspondiente del más grande?

3. ¿Cuántas manzanas de 1 pulgada de diámetro son equivalentes á una manzana de 2 pulgadas de diámetro si las manzanas son de la misma forma y especie?

4. Las superficies de dos montones exactamente de la misma forma son como 36:9. Hállese la razón de sus alturas.

5. Un lote rectangular de terreno tiene 160^{m} de frente y vale $1000. Hállese el valor de un lote semejante que tiene dos veces el frente y dos veces el fondo de aquél.

6. Hállese el diámetro de una bola de hierro que pesa 27 veces más que una bola de hierro de 2 pulgadas de diámetro.

7. Los pesos de dos cilindros de hierro de la misma forma son como 8 á 27. Hállese la razón de sus alturas.

CAPÍTULO XV.

PROGRESIONES.

Progresión Aritmética.

456. Una **progresión aritmética** es una serie de números que aumentan ó disminuyen según una diferencia común.

Por ejemplo, los números 6, 9, 12, 15 forman una progresión aritmética con una diferencia común de 3.

Los diversos números de una progresión se llaman sus **términos.**

457. Para hallar cualquier término de una progresión aritmética.

En la progresión aritmética

$$\overset{1.^{o}}{4},\ \overset{2.^{o}}{7},\ \overset{3.^{o}}{10},\ \overset{4.^{o}}{13},\ \overset{5.^{o}}{16},\ \overset{6.^{o}}{19},$$

cualquier término, por ejemplo el 6.°, se halla añadiendo al primer término el producto de la diferencia común por un número menor en una unidad que el número del término: $4 + (3 \times 5)$, ó 19.

Si la serie es una serie decreciente, se resta del primer término el producto de la diferencia común por un número menor en una unidad que el número del término. Por ejemplo, el término 12.° de la serie 50, 47, 44, 41, etc., es $50 - (3 \times 11)$, ó 17.

Por lo tanto, tenemos la regla siguiente para hallar cualquier término de una progresión aritmética:

458. *Se multiplica la diferencia común por un número que sea menor en una unidad que el número del término pedido. Se añade este producto al primer término si la serie es una serie creciente; se resta este producto del primer término si la serie es una serie decreciente.*

EJERCICIO 173. — ESCRITO.

1. Hállese el 10.° término de 2, 6, 10, 14, etc.
2. Hállese el 6.° término de 63, 58, 53, 48, etc.
3. Hállese el 8.° término de 2, 9, 16, 23, etc.
4. Hállese el 9.° término de 1, 8, 15, 22, etc.
5. Hállese el 7.° término de 100, 92, 84, 76, etc.
6. Hállese el 18.° término de 9, 13, 17, 21, etc.

459. Para hallar la suma de los términos de una progresión aritmética.

La suma de siete términos de la serie 1, 3, 5, etc., es

$$1+3+5+7+9+11+13$$

en orden invertido es $\quad 13+11+9+7+5+3+1$

Entonces, *dos veces la suma es* $\quad 14+14+14+14+14+14+14,$

$$=7\times 14.$$

Por lo tanto, la *suma* es $\quad \frac{1}{2}(7\times 14)$, ó 49.

Aquí 7 es el *número de los términos*, y 14 es la *suma del primero y del último términos*. Tenemos, pues, la regla siguiente para hallar la suma de una progresión aritmética:

460. *Se toma la mitad del producto del número de los términos por la suma del primero y del último términos.*

Hállese la suma de nueve términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y cuyo último término 41.

$$\frac{9\times(3+41)}{2}=198. \quad \textit{Respuesta.}$$

EJERCICIO 174. — ESCRITO.

Hállese la suma de:

1. 3, 6, 9, 12, hasta 8 términos.
2. 7, 9, 11, 13, hasta 15 términos.
3. 5, 14, 23, 32, hasta 7 términos.
4. 1, 7, 13, 19, hasta 6 términos.
5. ¿Cuántas campanadas por día da un reloj que toca solamente las horas?

6. Un cuerpo al caer recorre un espacio de 4.9^{m} en el primer segundo de su caída, y en cada segundo sucesivo 9.8^{m} más que en el segundo inmediato anterior. Una piedra soltada de un globo tardó 42 segundos en llegar á tierra. ¿A qué altura se hallaba el globo?

Progresión Geométrica.

461. Una **progresión geométrica** es una serie de números en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término precedente por un multiplicador constante llamado *razón* de la progresión.

Por ejemplo, los números 2, 6, 18, 54, etc., forman una progresión geométrica, puesto que cada término después del primero es tres veces el término precedente; y los números 27, 9, 3, 1, etc., forman una progresión geométrica, puesto que cada término después del primero es un tercio del término precedente.

462. Para hallar cualquier término de una progresión geométrica.

	1.°	2.°	3.°	4.°
En la progresión geométrica	2,	6,	18,	54, etc.,

el segundo término es 2×3; el tercer término es 2×3^2; el cuarto término es 2×3^3; etc. Por lo tanto, para hallar cualquier término de una progresión geométrica:

463. *Se eleva la razón á una potencia que es menor en una unidad que el número del término pedido, y se multiplica el resultado por el primer término.*

EJERCICIO 175. — ESCRITO.

1. Hállese el 6.° término de 1, 2, 4, etc.
2. Hállese el 5.° término de 2, 8, 32, etc.
3. Hállese el 7.° término de 5, 15, 45, etc.
4. Hállese el 5.° término de 7, 35, 175, etc.
5. Hállese el 6.° término de 6, 36, 216, etc.
6. Hállese el 6.° término de 64, 32, 16, etc.

464. Para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica.

En la progresión geométrica 2, 6, 18, 54, 162, etc., la suma de los cinco términos es $2+6+18+54+162$.

Si multiplicamos esta suma por la razón 3, y del producto restamos la suma de los cinco términos, tenemos:

$$\begin{array}{l} \quad 6+18+54+162+486 \\ \underline{2+6+18+54+162} \\ 486-2, \text{ ó tres veces la suma menos la suma.} \end{array}$$

Es decir, *dos veces* la suma $= 486 - 2$.

Por lo tanto, la suma $= \dfrac{486-2}{2} = 242$.

El numerador del quebrado es la diferencia entre el producto del último término por la razón y el primer término; el denominador es la diferencia entre la razón y 1.

Tenemos, pues, la regla siguiente para hallar la suma de una progresión geométrica dada:

465. *Se multiplica el último término por la razón, y se resta del producto el primer término. Se divide el residuo por la razón menos 1.*

Si la razón es menor que 1,

Se multiplica el último término por la razón y se resta el producto del primer término. Se divide el residuo por 1 menos la razón.

Ejercicio 176. — Escrito.

Hállese la suma de:

1. 2, 4, 8, hasta 8 términos.
2. 1, 3, 9, hasta 6 términos.
3. 3, 12, 48, hasta 7 términos.
4. 64, 32, 16, hasta 8 términos.
5. Una persona ahorró en un año $36, y en cada año sucesivo durante 6 años más $1\frac{1}{2}$ veces tanto como en el año precedente. Hállese el importe total ahorrado.
6. Hállese la suma de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{45}$, hasta 5 términos.

CAPÍTULO XVI.

Problemas para Repaso.

Números Enteros.

Ejercicio 177. — Oral.

1. Un tablero de damas tiene 8 hileras de cuadros y 8 cuadros por hilera. ¿Cuántos cuadros hay en todo?
2. ¿Qué costarán 11 kilogramos de azúcar á 12 centavos el kilogramo?
3. Si 6 hombres hacen un trabajo en 9 días, ¿en cuántos días lo puede hacer un hombre?
4. Si 6 hombres ganan $72 en 6 días, ¿cuánto gana por día cada hombre?
5. Si 3 manzanas valen 7 naranjas, ¿cuántas naranjas valdrán 12 manzanas?
6. Si se venden 6 manzanas por 18 centavos, y se ganan 6 centavos, ¿cuál era el costo de cada manzana?
7. Un hombre gana $9 mientras un muchacho gana $5. ¿Cuántos pesos ganó el muchacho mientras el hombre ganó $36?
8. ¿Cuántos hombres pueden hacer en 4 días un trabajo que requiere 3 hombres para hacerlo en 12 días?
9. Si una alondra destruye diariamente 500 insectos, ¿cuántos destruirá en 12 días?
10. Doce docenas hacen una gruesa. ¿Cuántas plumas de acero hay en una gruesa?
11. Un comerciante de sal envasa 1500 libras de sal en cajas de á 20 libras cada una. ¿Cuántas cajas tiene?
12. Un frutero vendió 240 manzanas con una ganancia de 5 centavos por docena. ¿Cuál fué su ganancia total?