personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 23 de 1878)

Señores redactores de *La Libertad:*

Agradeceremos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad:*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el Ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier,* director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode,* socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz,* director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza,* director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

GEOMETRIA.

INTRODUCCION.

Al emprender el estudio de la geometría, parece conveniente dar una idea del espíritu de esta importante parte de las matemáticas, así como lo hicimos al tratar del álgebra.

El objeto de nuestros trabajos en aritmética ha sido encontrar un valor numérico que satisfaga determinadas condiciones, y en álgebra los trabajos analíticos casi siempre han tenido por mira descubrir un modo de formacion de una cantidad desconocida en funcion de las conocidas. Como el fin de la geometría es la medida de la extension, tenemos que comenzar por conocer algunas de las propiedades fundamentales de lo que llamamos extension, para poder en seguida por un método rigurosamente deductivo, ir averiguando relaciones nuevas que sirvan para satisfacer las necesidades prácticas y científicas.

En geometría, así como en las demás ciencias, hay ciertos principios fundamentales que no pueden ser adquiridos sino por la observacion ó la experiencia. Así es como sabemos lo que es la longitud, la direccion, la línea recta, etc., y no por una explicacion verbal; siendo difícil definir éstas y otras voces semejantes por la simplicidad misma de los hechos observados, que no pueden descomponerse en otros más sencillos. Otro tanto pasa con los fundamentos de lo que llamamos axiomas. Cuando se reflexiona sobre la manera con que se han adquirido, se encuentra que ha sido por la contínua observacion y por experiencias repetidas multitud de veces.

La geometría toma por base de sus deducciones las definiciones y los axiomas. Las definiciones, como veremos más adelante, no son otra cosa sino *la expresion del conjunto de atributos que hay necesidad de presuponer en una figura dada, para que las demostraciones que á ella se refieren sean rigorosamente exactas* (Barreda). Los axiomas son verdades fundamentales de las que tenemos multitud de pruebas.

Siendo como es la geometría una ciencia eminentemente deductiva, debería procurarse que el número de los principios fundamentales tomados de la observacion fuese el menor posible; pero para facilitar el estudio se exponen á veces como axiomas fundamentales los que inmediatamente se derivan de éstos. Por ejemplo, el principio de que si á cantidades iguales se quitan iguales los resultados tambien lo serán, puede inferirse del axioma fundamental de que las sumas de cantidades iguales son iguales; pero para facilitar los raciocinios se considera tambien el primero como axioma fundamental.

Habiendo explicado, aunque ligeramente, cuál es la fuente de los fundamentos de las deducciones geométricas, volveremos sobre el objeto de esta ciencia que, en último análisis, es la medida indirecta de la extension.

Toda medida es la valuacion de la relacion que existe entre magnitudes homogéneas. En geometría esta valuacion puede hacerse de una manera directa en las líneas rectas y en algunas superficies planas sobreponiendo la unidad una ó más veces sobre la extension que se quiere medir; pero como en la mayor parte de los casos no es posible ó no es fácil hacer esta superposicion, y como la medida de las curvas, la rectificacion de los perímetros y la determinacion de las superficies y de los volúmenes tiene que verificarse por métodos científicos indirectos, hay necesidad de ocuparse de éstos, procurando sustituir á la comparacion entre figuras cualesquiera, la comparacion de líneas rectas, como única operacion que por regla general puede efectuarse directamente. En cada forma que se considera se buscan las líneas rectas que la fijan ó determinan, y en seguida se procura deducir de la posicion y magnitud de estas rectas la medida de dicha forma. Por ejemplo, una esfera quedará completamente determinada conociendo su centro y su rádio, y el estudio de las propiedades de la esfera lleva por principal mira, llegar á expresar la superficie de la esfera, su volúmen, etc., en funcion del rádio ó de otras rectas constantes. De la necesidad de reducir la medida de cualquiera forma á la medida de líneas rectas, y reemplazar la comparacion de superficies y de volúmenes por relaciones entre líneas rectas, nace la necesidad de dar un gran desarrollo á las investigaciones geométricas.

La extension es una propiedad inherente á cualquier cuerpo, pero en geometría no la consideramos en los cuerpos mismos, sino en el espacio que éstos ocupan. Esta sencilla concepcion facilita sobremanera nuestras investigaciones, no teniendo que preocuparnos con los fenómenos complexos de los cuerpos en los que podriamos estudiar la extension. Estas abstracciones son, por lo demás, sumamente frecuentes. Cuando comparamos, por ejemplo, el color de dos cosas, prescindimos de la sustancia de que están formadas y de sus demás propiedades para no complicar el estudio relativo á la cualidad de que tratamos; pues bien, en geometría, para hacer completa abstraccion de las demás propiedades de los cuerpos y facilitar nuestras investigaciones sobre la extension, suponemos ésta en el espacio ocupado por los cuerpos, como si desapareciendo éstos hubiesen dejado en él una impresion ó molde de su forma.

Otra abstraccion semejante es aquella por medio de la cual concebimos las superficies, las líneas y los puntos, prescindiendo de una, de dos y aun de las tres dimensiones de los cuerpos. Todos los que conocemos tienen largo, ancho y grueso. La extension en estas tres dimensiones se llama volúmen; pero si hacemos abstraccion del grueso y solo consideramos el ancho y el largo, obtendremos la extension en superficie; si en seguida hacemos abstraccion del ancho, nos quedará la línea ó extension puramente en longitud; y si por último, prescindimos de lo largo y solo consideramos la situacion, tendremos nocion de lo que llamamos punto. Por otra parte, las superficies son los límites de los cuerpos, las líneas lo son de las superficies y los puntos son los extremos de las líneas. Así es que siendo un cuerpo sólido ó volúmen un hecho concreto, las nociones de superficies, líneas y puntos no son sino abstracciones sumamente últiles para simplificar nuestras investigaciones; pues por una parte hay cuestiones prácticas que, no refiriéndose á las tres dimensiones, seria inútil y embarazoso ocuparse de todas ellas; por otra parte, se concibe que el conocimiento de las propiedades de las líneas, es un preliminar indispensable para tratar las cuestiones de superficies, así como el estudio de éstas sirve de base á los problemas de volúmenes.

Considerar la extension en el espacio é independientemente de los cuerpos, presenta además la ventaja de no limitar nuestros estudios á las formas reales, lo cual contribuye á dar más generalidad y desarrollo á nuestros ejercicios intelectuales, y á hacer más ámplios los conocimientos que deben servir de base para satisfacer las necesidades prácticas.

Las cuestiones geométricas pueden tratarse de dos maneras esencialmente diferentes, y de esto resulta su division en geometría especial y geometría general. Considerada esta ciencia en su conjunto, debe ocuparse del estudio de todas las formas imaginables, y debe tambien conocer las propiedades de cada forma. Si agrupamos las cuestiones geométricas con relacion á cada especie de figuras, estudiando sucesivamente las propiedades de cada forma, tendremos la geometría especial; y si por el contrario coordinamos las cuestiones con respecto á la semejanza de investigaciones, prescindiendo de las formas en particular, tendremos la geometría general. Por ejemplo, en la geometría especial estudiaremos las propiedades del triángulo, del círculo, etc., para poder deducir uno de los elementos de cada figura de los demás que la constituyen, y valuar su superficie, etc.; miéntras que en la geometría general se considerarán las cuestiones relativas á las superficies, á los volúmenes y otras muchas, en abstracto, para introducir despues en cada caso especial las condiciones específicas de determinada forma. El uso del cálculo es mucho más frecuente en la geometría general, pero no depende del empleo de este medio de deduccion, sino del género de la cuestion que se considere, la distincion entre una y otra parte de la geometría.

El cálculo, no siendo ni debiendo ser mas que un poderoso medio de deduccion, no puede servir para establecer los fundamentos de una ciencia, y se necesita que la geometría especial suministre los datos necesarios para fijar algunas ecuaciones, que sirvan de punto de partida á las deducciones analíticas, y cuyos datos, como hemos dicho, se expresan en las definiciones en su más alto grado de perfeccion ideal.

El objeto de este tratado es la geometría especial, considerándola como base é introduccion indispensable para el estudio de la general, cuyo principal artificio consiste en trasformar las consideraciones geométricas en consideraciones analíticas; valiéndose para esto de la notable concepcion de Descartes, que consiste á su vez en cambiar los problemas de forma en problemas de distancias, sujetos por su naturaleza al dominio del cálculo.

La geometría especial se divide en tres secciones principales: estudio de la línea recta y figuras planas; estudio de las superficies y estudio de los volúmenes.

Considerada como una operacion directa, la medida de las líneas rectas parece á primera vista muy sencilla, y por tanto cosa inútil ocuparse de su estudio; pero como no siempre es posible sobreponer la unidad lineal sobre la recta cuya longitud se trata de determinar, como sucede

cuando ésta es inaccesible, ó cuando, teniendo una magnitud considerable, en vez de estar en una posicion horizontal se encuentra vertical, es preciso conocer los procedimientos necesarios pora poder deducir la magnitud de una línea de las demás que constituyen una figura, pudiendo así llegarse á determinar indirectamente la dimension de una línea recta en cualquiera posicion en que se encuentre. Esto es tanto más esencial, cuanto que, como ya lo dijimos, la mayor parte de los trabajos geométricos llevan por mira reducir las cuestiones de superficies y de volúmenes á comparaciones entre líneas rectas, por lo cual hay que dar una gran extension á esta parte de la geometría, que debe servir de base á las siguientes. En las líneas curvas, el problema que generalmente se trata de resolver, es: averiguar las relaciones que ligan las curvas con las rectas, para poder efectuar por medio de éstas su medida, y sustituir á la relacion de las curvas otra equivalente entre líneas rectas.

Los problemas en geometría elemental admiten casi siempre una resolucion gráfica y otra numérica ó algebráica, y aunque la última es más perfecta, casi siempre tiene que apoyarse en la gráfica, que se ejecuta en una figura comunmente más pequeña, pero semejante á la real. Además, se procura sustituir á las construcciones en relieve las representaciones sobre un plano, lo cual constituye el método de las proyecciones.

La extension de la geometría es indefinida, tanto por la diversidad de cuestiones de que puede ocuparse, como por la infinidad de formas que pueden imaginarse sujetas á definiciones exactas. En efecto, las figuras planas pueden ser tantas como las combinaciones de las líneas que las limitan; las líneas curvas serán tan diversas como las leyes que se conciban para el movimiento de un punto; las superficies pueden variar por la forma de la línea que las engendra, y por la naturaleza del movimiento de ésta; los volúmenes varian por la diversidad de las superficies que los limitan ó que pueden engendrarlos. Por lo demas, es conveniente ocuparse de toda clase de formas, á fin de que las figuras reales que encontremos en la naturaleza, sean casos particulares de las que de antemano tengamos conocidas y estudiadas.

Habiendo señalado como objeto definitivo de la geometría la medida de la extension por medios indirectos, observaremos al hacer su estudio que pocas son en realidad las cuestiones que se refieren á determinar la longitud de las líneas, la superficie de las figuras y el volúmen de los cuerpos; pero al mismo tiempo notaremos que las investigaciones que no llevan por mira la medida de la extension, y que son las más, se ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las lineas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les lama *largo, ancho* y *grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes*.

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig, 1); *punto de interseccion*, que es el lu-