se ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las lineas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les lama *largo, ancho* y *grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes*.

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig, 1); *punto de interseccion*, que es el lugar en que se encuentran dos ó más líneas, como C (fig. 2); *puntos de concurso,* que son aquellos donde se reunen dos ó más rectas, como el D en la fig. 3; y *puntos de contacto,* que son aquellos donde dos ó más líneas se tocan, como el E en la fig. 4.

Figura I.

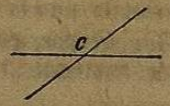

Figura 2.

Figura 3.

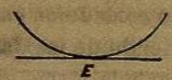

Figura 4.

Careciendo los puntos de magnitud, todos son iguales, y por lo mismo, se concibe que si se sobrepusieran, coincidirian.

361.—LINEAS.—*Se llama línea toda extension en longitud sin ninguna latitud ni profundidad.* Puede concebirse una línea como engendrada por la interseccion de dos superficies, ó como el trazo ó huella que dejaria un punto en su movimiento.

Las líneas pueden ser *rectas, quebradas, curvas* y *mixtas.*

362.—*Línea recta es aquella cuyos puntos todos están en la misma direccion.* De esto resulta que es el camino más corto entre dos puntos.

La interseccion C de dos rectas (fig. 2) es un punto.

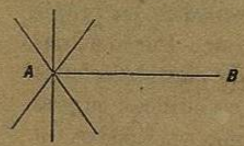

Figura 5.

Por un punto A (fig. 5) pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una direccion, queda fijada la posicion de la recta A B.

Así pues, *dos puntos fijan la posicion de una recta, y si son éstos los extremos determinarán su magnitud.—Para que dos rectas coincidan es necesario y basta que coincidan dos puntos de una con dos puntos de la otra; y para que dos rectas tengan la misma longitud, es preciso que puedan coincidir los extremos de una con los de la otra.*

363.—La distancia entre dos puntos se estima por la magnitud de la línea recta que los une. Para medir la longitud de una recta es preciso determinar la relacion que existe con la longitud de otra recta tomada por unidad. Así cuando se dice, por ejemplo, que la altura de una torre es de 50 metros, esto significa que cincuenta veces está contenida la longitud de la unidad lineal llamada metro, en la altura de esa torre.

Dos rectas están en la razon, por ejemplo, de 3 á 5 cuando una tercera recta, tomada como unidad, está contenida tres veces en la primera y 5 en la última. La determinacion de la relacion de dos rectas exige,

pues, que se busque otra recta que esté contenida un número cabal de veces en una y en otra, para que sea la comun medida de ambas.

Si estando dadas dos rectas A B y C D (fig. 6) se quiere determinar su mayor medida comun, ó por lo ménos la razon aproximada de una á otra, tendremos que proceder como sigue:

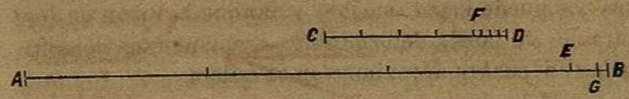

Figura 6.

Se llevará la más pequeña C D sobre la mayor, cuantas veces se pueda: se encontrará tres veces desde A hasta E y quedará una resta ó parte menor que C D de E á B; por lo que se tendrá:

$$A\,B=3\,C\,D+E\,B$$

En seguida se llevará la resta E B sobre C D, y se encontrará que está contenida 4 veces con una segunda resta F D, lo que dá:

$$C\,D=4\,E\,B+F\,D$$

Se llevará esta segunda resta sobre E B y como solo está contenida una vez de E á G, con una tercera resta G B, se tiene:

$$E\,B=F\,D+G\,B$$

Por último, llevando G B sobre F D, se encuentra que

$$F\,D=4\,G\,B$$

Sustituyendo sucesivamente el valor de F D en el de E B, éste en el de C D, y por último el de C D en el de A B, se tendrá:

$$F\,D=4\,G\,B,\ E\,B=5\,G\,B,\ C\,D=24\,G\,B,\ \text{y}\ AB=77\,G\,B.$$

Resulta, pues, que la última resta G B está contenida 24 veces en C D y 77 en A B, por lo que estas dos rectas están en la razon de 24 á 77.

El procedimiento empleado es análogo á la operacion que sirve para encontrar el máximo comun divisor de dos números, y se termina como aquel cuando la resta encontrada es nula. Un raciocinio semejante al que hicimos en aritmética, (110) probaria que así se encuentra no solo una medida comun para ambas líneas, sino la *mayor* de las medidas comunes, que pueden tener.

Se dice que dos rectas son *conmensurables* entre sí, cuando tienen una medida comun, y que son *inconmensurables* en el caso contrario.

Cuando dos rectas son inconmensurables, el procedimiento que acabamos de indicar no puede conducir á una resta nula; pero como las restas sucesivas van decreciendo, llegan á tal grado de pequeñez, que pueden considerarse como nulas. Que ciertas líneas son inconmensurables, es un hecho que la teoría nos da á conocer, pero que ninguna operacion mecánica nos puede hacer sensible, y aunque la razon de dos líneas inconmensurables no pueda determinarse exactamente, siempre es posible expresarla con cuanta aproximacion se quiera.

En efecto, sean A y B dos líneas, ó más generalmente dos magnitudes de la misma especie. Imaginémonos que B esté dividida en 1000 partes por ejemplo, y que llevando una de éstas sobre A se encuentre que la contiene 3257 veces y que quede una resta. La magnitud A estará comprendida entre $\frac{B}{1000}\times3257$ y $\frac{B}{1000}\times3258$, ó lo que es lo mismo, entre $B\times3'257$ y $B\times3'258$. Estos números $3'257$ y $3'258$ serán los valores de la razon $\frac{A}{B}$ con una aproximacion de ménos de $\frac{B}{1000}$, el primero por defecto y el segundo por exceso. Si en lugar de dividir B en 1000 partes iguales se hubiera dividido en 10000, la aproximacion habria sido 10 veces mayor, y si se hubiera dividido B en 100000 partes, la aproxmacion habria sido 100 veces mayor que la obtenida, y así se concibe que prescindiendo de la dificultad material que la division en mayor número de partes presenta en la práctica, siempre se podrán representar las magnitudes de la misma especie por números, ya sea exactamente, ya con la aproximacion que se desée ó que exija la naturaleza de la cuestion.

364.—Para trazar una línea recta sobre un plano nos valemos de la regla y del lápiz ó grafio. La regla es una barra de madera ó de metal construida con la condicion de que todos los puntos de uno de sus bordes estén en la misma direccion, como lo representa la fig. 7. El grafio ó tira-líneas sirve para trazar las rectas con tinta apoyando dos puntos de la regla A y B sobre los dos puntos dados A' B' y haciéndolo resbalar contra el borde de la regla al mismo tiempo que se apoya sobre el papel.

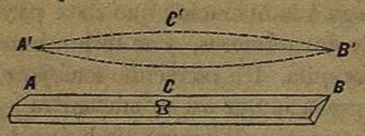

Figura 7.

Para asegurarse de la buena construccion de la regla, á lo cual se llama *rectificarla*, se marca una recta, como se ha explicado, haciendo coincidir el punto A con A' y el punto B con B'. En seguida se invierte la regla teniendo cuidado de hacer coincidir el punto A con B', y el punto B con A', y se traza una nueva línea. Si la regla está bien

construida las dos marcas se confundirán, supuesto que por dos puntos solo puede pasar una recta. Si la regla está mala resultarán dos trazas como son A' C' B' y A' C B'.

Como la falta de exactitud en las construcciones geométricas resulta á veces de que las líneas que se marcan, tienen una anchura más ó ménos considerable y los puntos son pequeñas superficies, debe procurarse que las líneas sean lo más finas posibles, y que los puntos estén determinados por líneas que se corten bajo ángulos casi rectos.

Cuando se quiere fijar no solo la direccion, sino tambien la magnitud de una recta, debe trazarse sobre la regla únicamente hasta los puntos extremos, y para medir su longitud, nos servimos de la escala y del compás.

La escala es una regla de madera, de marfil ó de metal (fig. 8) en la que se han marcado divisiones iguales referidas á una unidad de longitud como el metro, la vara, la yarda, etc.

Figura 8.

El compás es un instrumento regularmente de metal (fig. 9) compuesto de dos piernas de igual longitud A B y A C, que pueden girar al rededor de un eje A. Cuando sirve para medir la longitud de las líneas sus puntas son fijas, y cuando se usa para trazar círculos, una de sus puntas debe reemplazarse por un lápiz ó un grafio. Si la recta que se trata de medir tiene ménos longitud que la escala y ésta tiene hecho su borde en bisel, basta poner la escala junto á la recta haciendo coincidir su cero con uno de los extremos, y leer la division en que toca el otro extremo de la recta. En caso contrario se toma con el compás un cierto número de unidades de la escala, (20 por ejemplo), y se llevan sobre la línea el número de veces que es posible, (supongamos que hayan sido 3), hasta que quede una parte menor. En seguida se mide esta resta con el compás, cuya abertura llevada sobre la escala indicará cuánto se debe agregar á las primeras medidas. Si la resta tenia 5 divisiones, toda la línea tendria 65 milímetros por ejemplo. En todos los casos el grado de aproximacion depende de la igualdad y finura de las divisiones de la

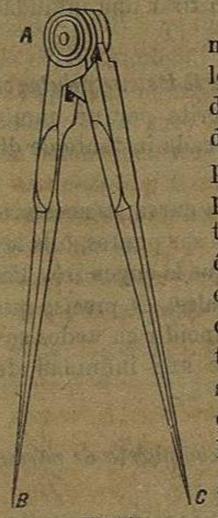

Figura 9.

escala así como del menor grueso que se pueda dar á las líneas y á las puntas del compás.

365.—Cuando se quieren sumar dos rectas B C y D E (fig. 10) se lleva una D E sobre la prolongacion C A de la otra B C y la recta B A será igual á B C + D E. Si las líneas B C y D E fueran iguales, la recta B A seria doble de una de ellas y así se concibe el modo de duplicar, triplicar y en general de multiplicar una recta por un número.

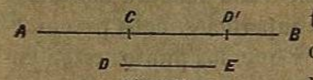

Figura 10.

Para restar DE de BC bastaria llevar DE de C á D', y se tendria BD'=BC—DE.

366.—*Se llama línea quebrada* (fig. 11) *la que está compuesta de líneas rectas que no quedan en la misma direccion.*

Para fijar la posicion de una línea quebrada, es preciso conocer los puntos extremos A, B, C, D, E, F, de las partes que la forman; y para que dos líneas quebradas sean iguales, es necesario que en el caso de que se sobrepusieran coincidiesen los expresados puntos A, B, C. D, E y F. Entre dos puntos, A y F, se pueden tirar una infinidad de líneas quebradas.

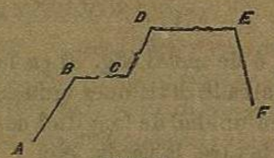

Figura 11.

367.—*Se llama línea curva* (fig. 12), *la que tiene todos sus puntos en diferente direccion.* Puede concebirse como descrita por un punto que se mueve cambiando por grados insensibles á cada instante de direccion.

Para fijar la forma de una curva, es necesario conocer la posicion de todos sus puntos, ó la ley del movimiento del punto que la engendró. Para que dos curvas sean iguales, es preciso que sobreponiéndose puedan coincidir en todos sus puntos. Entre dos puntos, A y B, puede tirarse una infinidad de curvas.

Figura 12.

368.—*Se llama línea mixta* (fig. 13) *la que está compuesta de partes rectas y de partes curvas.*

Para determinar una línea mixta es preciso poder fijar las partes de que se compone, siendo necesario que estas partes sean iguales para que dos líneas mixtas lo sean.

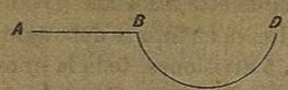

Figura 13.

369.—*Se llama circunferencia de círculo una curva* (fig. 14) *plana,*

cerrada, cuyos puntos todos están á igual distancia de otro C *interior, llamado centro.*

Círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.

Suele aplicarse, aunque indebidamente, la palabra círculo á la circunferencia; pero como lo indican las definiciones respectivas, *la circunferencia es una línea*, miéntras que *el círculo es una superficie.*

Se llama *radio toda recta,* C A, *que va del centro á la circunferencia,* y como esta curva tiene todos sus puntos equidistantes del centro, resulta que *todos los radios son iguales.*

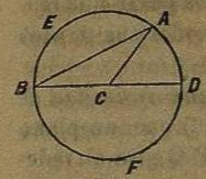

Figura 14.

La posicion de un círculo queda fijada cuando se conoce su centro y el radio, por lo que *dos círculos serán iguales cuando lo sean sus radios.*

Se llama *diámetro toda recta,* B D, *que pasando por el centro, termina en la circunferencia.* Como todo diámetro se compone de dos radios y éstos son iguales, se infiere que *todos los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

Se llama *arco una parte,* A D, *de la circunferencia.*

Cuerda es una recta, B A, *que va de un punto á otro de la circunferencia.* Se dice que la cuerda B A subtende al arco B E A, y aunque toda cuerda subtende dos arcos B E A y B F A, comunmente se aplica esta expresion al arco menor. Recíprocamente se dice que la línea B A se subtensa del arco B E A.

Se llama *segmento la porcion de superficie* B A E B *comprendida entre una cuerda y el arco que subtende.*

Sector es la porcion de superficie A C D A *comprendida entre dos radios y un arco.*

Secante es una recta A B (fig. 15) *que corta la circunferencia en dos puntos, y tiene parte dentro y parte fuera del círculo.*

Tangente es una recta F G *que toca á la circunferencia en un solo punto* H.

Se llama sagita ó flecha la parte L M *de un radio comprendida entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco que subtende.*

Cuadrante es el arco J M I *equivalente á la cuarta parte de la circunferencia.*

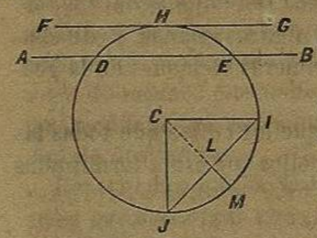

Figura 15.

370.—Las *superficies* pueden ser planas, curvas y mixtas.

Se llama *plano, ó superficie plana, aquella á la que se puede aplicar* *una línea recta en cualquiera direccion, tocándola en todos sus puntos.* La superficie tranquila del agua, cuando no tiene una gran extension, es plana.

La interseccion comun de dos planos es una línea recta; pues si tomamos dos puntos en la interseccion y por ellos hacemos pasar una recta, por la definicion de plano esta recta deberá tener todos sus puntos en ambos planos.

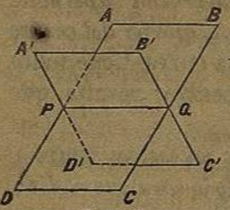

Figura 16.

Por una recta pueden pasar una infinidad de planos. Basta imaginarse (fig. 16) que un plano A B C D que pasa por la recta P Q gira al rededor de ella, para comprender que puede tomar una multitud de posiciones como A' B' C' D' conteniendo todos los planos á la recta P Q.

Por tres puntos no se puede hacer pasar más de un solo plano. Si á la condicion de pasar el plano por los dos puntos de la recta P Q se une la de que pase por un tercer punto A, se comprende fácilmente que si se hace pasar un plano por P Q y nos imaginamos que gire al rededor de esta recta, entre la multitud de planos que nos es dado concebir, solo uno tendrá la propiedad de pasar al mismo tiempo por el punto A.

De esto resulta que *la posicion de un plano queda enteramente fijada por tres puntos que no están en línea recta ó por dos rectas que se cortan en un punto.*

Para fijar la extension de un plano (fig. 16) *es preciso conocer la situacion de los puntos extremos* A B C D *que lo limitan.*

Dos planos coincidirán siempre que coincidan tres puntos de uno de ellos, con tres puntos del otro.

Para que dos planos sean iguales en extension, es necesario que puedan coincidir todos los puntos extremos que los limitan.

Figuras planas son aquellas que pueden estar contenidas en un plano. El círculo y el triángulo son, por ejemplo, figuras planas, y de ellas nos ocuparemos especialmente en las dos primeras secciones de la geometría.

371.—En los *volúmenes* distinguiremos aquellos en los que todas las superficies que los limitan son planas, y aquellos que están terminados por superficies curvas.

Axiomas, métodos de demostracion y definiciones.

372.—Axiomas.—Al tratar de los fundamentos del cálculo, hemos establecido (32 y 242) los siguientes axiomas:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Una cantidad es igual á la reunion de sus partes.

Los cuales como se refieren á las cantidades, son aplicables en geometría á la extension; pero por la naturaleza ú objeto de esta ciencia tenemos que agregar el siguiente que es de un uso frecuente:

Las líneas, superficies ó volúmenes que aplicados unos encima de otros coinciden en todos sus puntos, son iguales.

De este corto número de axiomas y de las *definiciones,* que además de explicar una palabra constituyen *la asercion de un hecho ó de una propiedad fundamental geométrica,* por un riguroso raciocinio se van sucesivamente infiriendo nuevas verdades de las que á su vez nos servimos para deducir y establecer principios desconocidos.

Así, por ejemplo, la definicion de *círculo* además de explicar esta palabra señala, ó si se quiere, enseña la propiedad de esta curva de tener sus puntos equidistantes del centro, de la cual deducimos que los radios son iguales, lo mismo que los diámetros, y otro gran número de teoremas, como que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, que es la mayor de todas las cuerdas, etc., etc.

373.—Métodos de demostracion.—En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la *demostracion positiva* [27] y la *negativa;* pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy preceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de *sobreposicion* para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetiremos que la *demostracion positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.* Unas veces de una propiedad general se deduce otra particular ó ménos general, y otras de lo explícito de una proposicion se deduce lo que en ella hay implícito.

Demostracion negativa es la que nos hace ver, que de no ser cierto el principio que trata de demostrarse, resultaria cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostracion por sobreposicion, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras debe coincidir.

Para dar á comprender mejor estas definiciones, pondremos un ejemplo de estas diferentes clases de demostracion.

Demostracion directa sin sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Vamos á demostrar que el diámetro A B [fig. 17] es mayor que la cuerda A D. Si tiramos el radio C D, tendremos que por ser A D línea recta, y A C D quebrada; y por ser la línea recta el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

$$A\,C\,D > A\,D$$

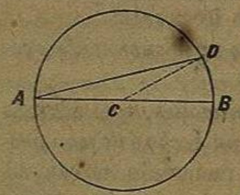

Figura 17.

pero como A C D consta de dos radios, y el diámetro A B es igual tambien á dos radios, se tiene que A C D=A B, luego

$$A\,B > A\,D.$$

Y como el raciocinio hecho con *A D* puede aplicarse á otra cuerda cualquiera, se infiere la verdad del teorema en toda su generalidad.

Ejemplo de demostracion directa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

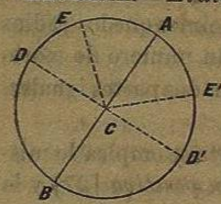

Figura 18.

Si suponemos que la figura 18 se doblara por el diámetro A B quedando fija la parte A E D B y girando al rededor de A B la parte A D' B, es claro que la recta A B es comun á las dos parte en la figura, y en virtud de que todos los radios son iguales, el extremo D' deberá coincidir con algun otro punto como D equidistante de C; el punto E' por la misma razon deberá coincidir con algun otro punto como E, y así sucesivamente debiendo coincidir todos los puntos de la circunferencia que quedan á la derecha del diámetro con los que están á su izquierda, se infiere que estas dos partes determinadas por el diámetro son iguales.

Como se vé en este ejemplo hay una cosa conocida: que la recta A B es comun á las dos partes, cuya igualdad se va á demostrar, y de esto que sabemos y de un principio cierto, que los radios son iguales, se deduce el teorema. Así, pues, es preciso en todos los casos dar el fundamento ó la razon en virtud de la que coincidiendo una parte de dos figuras deberán coincidir todas las demás.

Ejemplo de demostracion negativa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

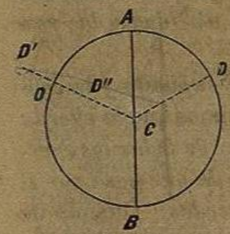

Figura 19.

Si suponemos que las dos partes determinadas por el diámetro son desiguales, al doblar la figura [fig. 19] por A B, el punto D caeria en D' fuera de la circunferencia si la parte de la derecha era la mayor. En este caso tendriamos

$$C\,D = C\,D'$$

pero $\quad C\,D' > C\,O$

luego $\quad C\,D > C\,O$

esto es, seria preciso que los radios fueran desiguales, lo que no es admisible.

Si suponemos que la parte de la derecha sea la menor, al doblar la figura D caeria dentro del círculo y tendriamos:

por una parte $\quad C\,D = C\,D''$

por otra $\quad C\,D'' < C\,O$

luego $\quad C\,D < C\,O$

esto es, que los radios serian desiguales, lo que es imposible.

Luego si la parte A D B no puede ser mayor, ni tampoco menor que la parte A O B, tendrá que ser igual á ella, que es lo que se queria demostrar.

Este ejemplo pone de manifiesto que es preciso completar la demostracion negativa haciendo ver que en cualquiera otro supuesto que no sea el del teorema, forzosamente resulta un absurdo. Si la parte de la derecha no puede ser mayor ni menor que la de la izquierda, tendrá que ser igual á ella, que es lo que establece el teorema.

En geometría, el método de demostracion indirecta, llamado tambien de *reduccion al absurdo*, se usa á menudo para demostrar los teoremas que se llaman *recíprocos*. [374]

374.—DEFINICIONES.—Hay dos vicios de raciocinio que los estudiantes deben evitar en geometría. El uno llamado *peticion de principio, consiste en pretender tomar como fundamento de la demostracion el teorema que debe demostrarse.* Para excusarlo, no hay más que tener presente que el teorema por demostrar debe resultar como consecuencia *de otras* verdades ya conocidas. El otro vicio se llama *círculo vicioso, y consiste en tomar como fundamento de la demostracion un teorema que todavía no se ha demostrado, y que para hacerlo seria necesario apoyarse en el teorema que trata de demostrarse.*

Lema es una proposicion fundamental que sirve de preparacion á varios teoremas ó á la resolucion de una série de ploblemas.

Corolario, es la consecuencia de una proposicion.

Escolio es una observacion relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extension, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusion*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, ó bien el diámetro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusion es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusion* como *supuesto*, y éste como conclusion, resulta una proposicion que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusion del teorema primitivo conviene á otros casos no comprendidos en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extension. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolucion y de demostracion.

ANGULOS.

375.—Definiciones.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, [fig. 20], *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinacion de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinacion de dos rectas.

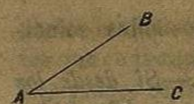

Figura 20.

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta D C cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí [fig. 21], se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

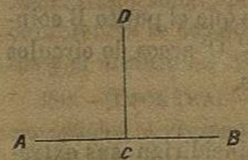

Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto D C B, se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

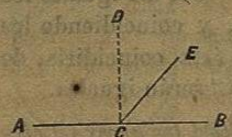

Figura 22.

Cuando dos ángulos como E C B y E C A valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman ángulos adyacentes los que forma una recta [fig. 23]. *C D que cae sobre otra A B.* Los ángulos A D C y C D B son adyacentes.

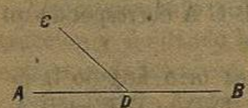

Figura 23.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice, los que están formados por dos rectas* [fig. 24] *A B y C D que se cortan en un punto O y tienen la expresada posicion,* como los ángulos A O C y B O D.

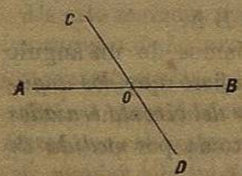

Figura 24.

376.—Para que dos ángulos sean iguales, es necesario que la inclinacion respectiva de las dos rectas que forman cada uno, sea la misma; esto se prueba haciendo coincidir el vértice A [fig. 25] con el A' y el lado A C con el A' C', y si el otro lado A B coincide con A' B' los dos ángulos serán iguales.

Por tanto, siempre que dos ángulos sean iguales, estamos seguros de que si hiciéramos coincidir sus vértices y uno de sus lados, en el otro