Lema es una proposicion fundamental que sirve de preparacion á varios teoremas ó á la resolucion de una série de ploblemas.

Corolario, es la consecuencia de una proposicion.

Escolio es una observacion relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extension, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusion*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, ó bien el diámetro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusion es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusion* como *supuesto*, y éste como conclusion, resulta una proposicion que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusion del teorema primitivo conviene á otros casos no comprendidos en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extension. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolucion y de demostracion.

ANGULOS.

375.—DEFINICIONES.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, [fig. 20], *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinacion de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinacion de dos rectas.

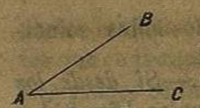

Figura 20.

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta D C cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí [fig. 21], se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

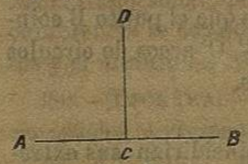

Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto D C B, se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

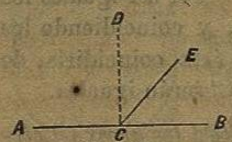

Figura 22.

Cuando dos ángulos como E C B y E C A valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman ángulos adyacentes los que forma una recta [fig. 23]. *C D que cae sobre otra A B.* Los ángulos A D C y C D B son adyacentes.

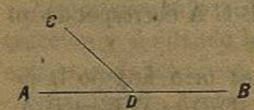

Figura 23.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice, los que están formados por dos rectas* [fig. 24] *A B y C D que se cortan en un punto O y tienen la expresada posicion,* como los ángulos A O C y B O D.

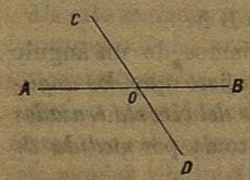

Figura 24.

376.—Para que dos ángulos sean iguales, es necesario que la inclinacion respectiva de las dos rectas que forman cada uno, sea la misma; esto se prueba haciendo coincidir el vértice A [fig. 25] con el A' y el lado A C con el A' C', y si el otro lado A B coincide con A' B' los dos ángulos serán iguales.

Por tanto, siempre que dos ángulos sean iguales, estamos seguros de que si hiciéramos coincidir sus vértices y uno de sus lados, en el otro lado tambien coincidirían; y recíprocamente cuando los lados coincidan los ángulos serán iguales.

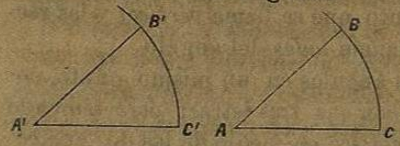

Figura 25.

377.— Teorema.—*Si desde los vértices de dos ángulos* [fig. 25] *y con el mismo radio se trazan arcos de círculo B C y B' C', á ángulos iguales corresponden arcos iguales, y recíprocamente.*

Por haber tomado el radio A C=A' C' y porque todas las líneas rectas pueden sobreponerse, si pusiéramos una sobre otra estas rectas, el punto A coincidiría con A' y el C con C'. Por ser iguales los dos ángulos [376], el lado A B tomaria la direccion A' B', y como estas dos rectas tienen igual longitud por ser rádios, resulta que el punto B coincidiría con B'; luego siendo los dos arcos B C y B' C' arcos de círculos iguales y coincidiendo sus extremos, serán iguales.

La recíproca se demostrará como sigue:

Si sobrepusiéramos las rectas A C y A' C', coincidirían sus extremos por haberlas tomado iguales por construccion. Por ser iguales los arcos B C y B' C', el punto B' coincidiría con B, y coincidiendo los dos extremos de la recta B A con los de la B' A' ésta coincidiría, de lo que resulta que los dos ángulos B A C y B' A' C' serán iguales.

378.—Teorema.—*Los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo descrito desde su vértice como centro.*

Si desde el vértice C [fig. 26] del ángulo B C A trazamos una circunferencia con el rádio C A, y al lado de este ángulo trazamos otro B C D igual á B C A, resulta que conforme al teorema anterior el arco B D=B A; luego al ángulo D C A doble de B C A corresponde un arco D A doble de B A.

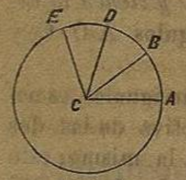

Figura 26.

Si al lado de D C B trazamos otro ángulo igual E C D, tendremos [377] que E D = D B = B A, luego al ángulo E C A que es triple de B C A, corresponde un arco E A triple de B A.

Y como lo mismo demostraríamos de un ángulo cuádruplo, quíntuplo, etc., se infiere que *los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo trazados desde su vértice como centro,* y por esta razon se toma por *medida de un ángulo el arco que sus lados abrazan.*

En efecto, de la magnitud del arco depende la inclinacion de los lados, y por tanto el valor del ángulo.

379.—Toda circunferencia de círculo se considera dividida en 360

partes iguales que se llaman grados, cada grado se subdivide en 60 partes que se llaman minutos, y cada minuto se subdivide en 60 segundos. Los grados se indican con un pequeño cero arriba del número que los representa, los minutos con una coma y los segundos con dos comas. Así $25°—30'—18''$ se lee 25 grados 30 minutos y 18 segundos.

Y como los arcos son la medida de los ángulos, éstos se estiman tambien en grados, minutos y segundos. Así, *un ángulo recto,* cuya medida es un cuadrante, *vale* 90°. *Dos ángulos suplementarios valen juntos* 180°. *Dos ángulos complementarios valen juntos* 90°. *Un ángulo agudo vale ménos de* 90°, *y uno obtuso vale más de* 90°.

Este sistema de division, que es el más generalmente adoptado, se llama *sexagesimal;* pero hay otro llamado *centesimal,* en el que la circunferencia se considera dividida en 400 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

380.—Teorema.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales, y recíprocamente.*

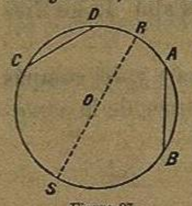

Figura 27.

Sea el arco A B = C D [fig. 27] del mismo círculo, y vamos á demostrar que las cuerdas A B y D C serán iguales. Tomemos el punto R en la mitad del arco D A y tiremos el diámetro R S. Si dobláramos la figura por la recta R S, la semicircunferencia R B S coincidiria con la R C S; [373] por haberse tomado R en el medio de D A, el punto A concidirá con D; y por ser el arco A B = D C el punto B coincidiría con C; y supuesto que los extremos de la cuerda A B coinciden respectivamente con los de la C D resulta que estas dos cuerdas serán iguales.

Recíprocamente si la cuerda A B = C D, haciendo la misma construccion y doblando la figura segun R S resulta que coincidirían los extremos de los arcos, por lo que serán iguales.

Si se tratara de dos círculos iguales comenzaríamos por sobreponerlos, y en seguida serian aplicables las demostraciones anteriores.

De este teorema resulta que *dos ángulos serán iguales cuando lo sean las cuerdas de los arcos descritos desde sus vértices con el mismo rádio, y recíprocamente.*

381.—Antes de ocuparnos de la resolucion de algunos problemas diremos que, al tratar de una demostracion, la figura tiene solo por objeto ayudar á la inteligencia del raciocinio que se funda en las relaciones que hay entre el enunciado y el objeto de la demostracion; por cuya razon esas figuras no tienen necesidad de ser trazadas con gran cuidado; no sucediendo otro tanto cuando el objeto es resolver un problema *gráfico*, en el que se trata de construir figuras que satisfagan determinadas condiciones, cuyo resultado depende de la exactitud con que se tracen las líneas, objeto de la cuestion. En la resolucion de los problemas gráficos importa que el papel esté restirado sobre un plano perfecto, que los instrumentos que se usen estén rectificados, que las líneas sean tan finas como sea posible, y por último, que los puntos tengan la menor extension que se pueda.

En cuanto á los problemas *numéricos*, que tienen por objeto determinar los valores numéricos de los elementos de una figura deduciéndolos de otros, son del resorte de la aritmética; la geometría solo interviene en ellos para hacer conocer las relaciones de extension que ligan los datos con las incógnitas, así como aquellos procedimientos por cuyo medio se determina la relacion de estos últimos con la unidad de su especie. Debe tenerse en cuenta la aproximacion que los instrumentos usados pueden dar para no llevar inútilmente los cálculos más allá de ese grado. Si, por ejemplo, la escala no indica sino medios milímetros, será inútil llevar la aproximacion en los cálculos más allá de los diez milímetros.

Además del lápiz, del grafio, de la regla, de la escala y del compás para la resolucion de los problemas gráficos, nos servimos de la *escuadra* y del *trasportador*.

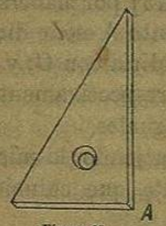

Figura 28.

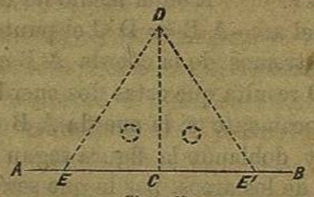

Figura 29.

La *escuadra* [fig. 28] es un triángulo de madera, de metal ó de marfil, en el que uno de sus ángulos A precisamente es recto. Sirve particularmente para trazar líneas perpendiculares y paralelas. Para cerciorarse de que está bien construida, por un punto C [fig. 29] de la recta A B se traza la perpendicular C D aplicando el borde E C de la escuadra contra ella. En seguida se voltea la escuadra aplicando contra el papel la cara que estaba para arriba y quedando el vértice E cerca de B en el punto E', se traza otra perpendicular por el mismo punto C. Si esta segunda perpendicular se confunde con la primera, es prueba de que la escuadra está buena, pues entónces el ángulo D C E será recto.

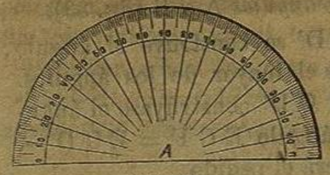

Figura 30.

El trasportador (fig. 30) es un semicírculo de metal ó de cuerno trasparente, en el que está marcado el centro A, y los grados y medios grados. Sirve para medir los ángulos ó para construirlos de determinado valor. Hay dos cosas que rectificar en este instrumento: que el punto marcado A sea el centro del semicírculo, y que los grados sean iguales entre sí. Para cerciorarse de la buena colocacion del centro, basta tomar con el compás la longitud del radio del trasportador y trazar una circunferencia: si en cualquiera posicion pueden hacerse coincidir el centro y la semicircunferencia del trasportador con el centro y circunferencia trazada, el centro del instrumento estará bien fijado. Para averiguar si está bien dividido, se toma con el compás la cuerda, por ejemplo, del arco de 15°, y se va llevando entre las divisiones de 1 y 16°, de 2 y 17°, de 3 y 18°, etc., cuyas distancias deben ser constantemente iguales, supuesto que á arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

382.—Problemas de angulos.—I.—*Sobre la recta* A B (fig. 31) *construir un ángulo igual al ángulo dado* D.

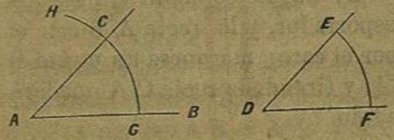

Figura 31.

Desde el vértice D, como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco E F; haciendo centro en A y con el mismo radio trácese el arco indefinido G H: tómese la cuerda E F y llévese desde G hasta C: y tirando la recta C A ésta formará un ángulo igual al dado.

El fundamento de esta construccion es que los arcos E F y C G, que miden estos ángulos, son iguales por pertenecer á círculos iguales y tener cuerdas iguales.

II.—*Construir un ángulo igual á la suma de dos ángulos dados.*

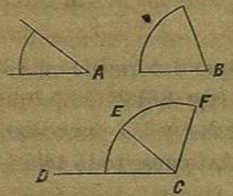

Figura 32.

Sean los ángulos dados A y B. Sobre la recta C D (fig. 32) y conforme á lo explicado en el problema anterior, se construye el ángulo D C E=A. En seguida sobre la recta C E y empleando el mismo método, se construye el ángulo E C F = B. El ángulo F C D será igual á A + B. Así puede construirse un ángulo doble, triple, etc, de otro.

III.—*Determinar la diferencia entre dos ángulos* A *y* B (fig. 33).

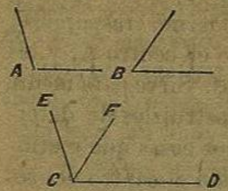

Figura 33.

Sobre la recta C D' se construye el ángulo D' C E = A, que es el mayor de los ángulos. Sobre el mismo lado C D' constrúyase el ángulo D' C F = B. El ángulo E C F = E C D' — D' C F = A — B será el pedido.

IV.—*Determinar el número de grados del ángulo* C A B (fig. 34) *por medio del trasportador.*

Figura 34.

Se colocará el trasportador sobre el ángulo C A B, teniendo cuidado de hacer coincidir el centro del instrumento con el vértice A del ángulo y la línea marcada con 0° y 180° con uno de los lados, con C A por ejemplo. Hecho esto, bastará ver el número de grados que marca el otro lado A B para conocer el valor del ángulo, que en este caso es de 37°—30'. Siempre que sea necesario se prolongarán los lados del ángulo.

V.—*Construir un ángulo de* $35°\frac{1}{2}$ *sirviéndose del trasportador.* (Fig. 35).

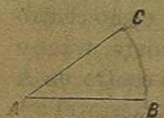

Figura 35.

Trácese la recta A B; hágase coincidir el punto A con el centro del trasportador, y la recta A B con el diámetro que pasa por el cero: márquese un punto C en la graduacion $35°\frac{1}{2}$; y tirando la recta C A quedará trazado el ángulo pedido.

Principales casos de igualdad en los triángulos.

383.—Se llama triángulo rectilíneo una figura que determina un espacio cerrado por tres líneas rectas, como A B C (fig. 36).

Las rectas que limitan el triángulo se llaman *lados*, y los puntos en que concurren de dos en dos, se llaman *vértices*. Así pues, todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.

Para que dos triángulos puedan coincidir en todos sus puntos, y que

por lo mismo sean iguales, se necesita que coincidan respectivamente sus tres vértices, que son los extremos de sus lados.

Consideraremos por ahora tres casos de igualdad de los triángulos.

384.—I.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 36).

$$A B = A' B', \; A = A' \text{ y } B = B'$$

Demostracion.—Por ser A B = A' B' si sobrepusiéramos estas figuras el lado A B coincidirian con A' B'. Por ser el ángulo A = A' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado A C tomaria la misma direccion que A' C'. Por ser el ángulo B = B' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado B C tomaria la misma direccion que B' C', y coincidiendo respectivamente los dos lados A C y B C con A' C' y B' C' es claro que el punto C, interseccion de las dos primeras rectas, coincidiria con C' interseccion de las dos últimas. Finalmente, coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

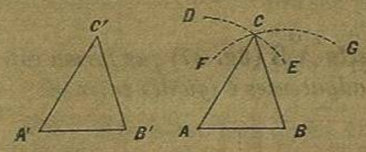

Figura 36.

385.—II.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales* (fig. 36).

$$A = A', \; A B = A' B' \text{ y } A C = A' C'.$$

Demostracion.—Por ser el ángulo A = A' si sobrepusiéramos las dos figuras, los lados A B y A C tomarian la misma direccion que A' B' y A' C'; y por ser A B = A' B' y A C = A' C', el punto B coincidiria con B' y el C con C'; luego el tercer lado B C coincidiria con B' C' por coincidir sus extremos, y los triángulos serán iguales.

386.—III.—*Dos triángulos serán iguales cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales.*

$$(\text{Fig. } 36) \; A B = A' B', \; A C = A' C' \text{ y } B C = B' C'$$

Demostracion.—Por ser el lado A B = A' B' si sobrepusiéramos las dos figuras, estos lados, lo mismo que sus extremos, coincidirian. Si desde el punto A como centro y con el radio A C trazamos un arco de círculo D E por ser A C = A' C' el punto C' caeráen alguno de los de este arco. Si desde el punto B como centro y con el radio B C trazamos un arco de círculo F G, por ser B C = B' C' el punto C' caerá en alguno de los del expresado arco F G; y debiendo pertenecer á los dos arcos D E y F G el punto C' caerá sobre C, que es la interseccion de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales á lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llma perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

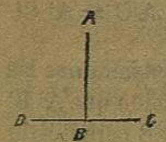

Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

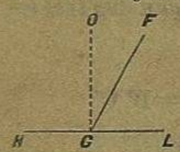

Figura 38.

Demostracion.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$FGH + FGL = OGH + OGL$$

pero por construccion

$$OGH + OGL = 2 \text{ rectos.}$$
$$FGH + FGL = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostracion.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

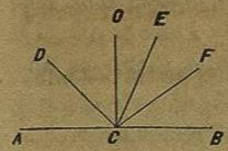

Figura 39.

$$ACD + DCE + ECF + FCB$$
$$= ACO + OCB$$

y como $ACO + OCB = 2$ rectos

se infiere que

$$ACD + DCE + ECF + FCB = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig. 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

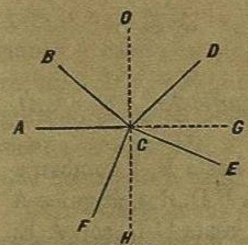

Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendremos que

$$ACB + BCD + DCE + ECF + FCA$$
$$= ACO + OCG + GCH + HCA$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuacion, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes [fig. 41) A C B y B C D, y vámos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

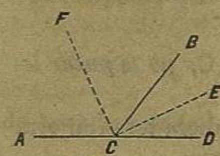

Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos [389] se tiene:

$$ACB + BCD = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\frac{ACB}{2} + \frac{BCD}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{ACB}{2}$ su igual F C B y por $\frac{BCD}{2}$, B C E se tiene

$$FCB + BCE = 1 \text{ recto}$$

ó

$$FCE = 1 \text{ recto}$$

393.—*Los ángulos* (fig. 42) D B C y A B E *opuestos al vértice, son iguales.*

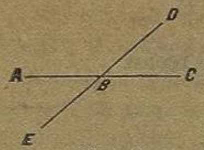

Figura 42.

Tenemos que por ser adyacentes (389) los ángulos

D B C + A B D = 2 rectos

por igual razon

A B E + A B D = 2 rectos

luego

D B C + A B D = A B E + A B D

suprimiendo A B D resulta

D B C = A B E

que es lo que se debia demostrar.

394.—*Cuando una recta* (fig. 43) A B, *es perpendicular á otra* C D, *ésta tambien es perpendicular á la primera* A B.

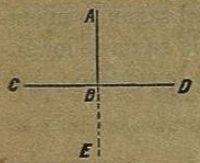

Figura 43.

Prolonguemos la recta A B hasta E, y demostraremos que siendo A B C = A B D, los ángulos A B C y C B E que forma la recta C D con A E, tambien serán iguales, y en consecuencia la recta C D será perpendicular á A E.

Por lo supuesto del teorema

A B C = A B D;

por opuestos al vértice (393)

A B D = C B E

luego

A B C = C B E

395.—*Desde un punto* A (fig. 44) *de una recta* B C, *no se puede levantar mas de una sola perpendicular.*

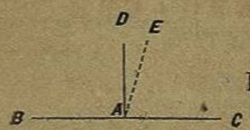

Figura 44.

Si supusiéramos que se pudiera levantar otra perpendicular A E, tendriamos:

por el teorema

D A C = 1 recto

por el supuesto

E A C = 1 recto

luego

D A C = E A C

pero siendo ésto inadmisible, se infiere que A E no es perpendicular á B C, y que solo podrá serlo en el caso de confundirse con A D.

396.—*Por un punto* A (fig. 45) *situado fuera de una recta* B C, *no se le puede bajar mas de una sola perpendicular* A D.

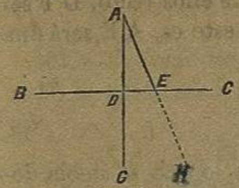

Figura 45.

Si fuera posible bajar otra perpendicular A E, tendriamos prolongando A D y A E que B C seria perpendicular á A G y á A H (394). Si dobláramos la figura por la recta B C, por ser el ángulo A D B = B D G, la recta A D tomaria la direccion de D G y el punto A caeria en alguno de la recta D G; y por suponerse el ángulo A E B = B E H, la recta A E deberia tomar la direccion E H y el punto A caeria en alguno de la recta E H. En consecuencia, si las dos rectas A D y A E pudieran ser perpendiculares á B C, al doblar la figura, el punto A deberia caer al mismo tiempo sobre D G y E H, y no siendo esto posible, á ménos que A D coincida con A E, inferiremos que no se puede bajar desde el punto A mas de una sola perpendicular.

397.—*Cuando dos ángulos* A B C *y* C B D (fig. 46), *tienen la posicion de adyacentes y juntos valen dos rectos, las dos rectas* A B *y* B D *tiradas por el extremo de la línea comun* C B, *serán prolongacion una de la otra.*

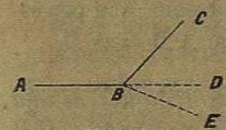

Figura 46.

Si suponemos que B D no sea prolongacion de A B sino que lo fuera B E, tendriamos:

conforme al supuesto del teorema

A B C + C B D = 2 rectos.

Por suponer que son adyacentes A B C y C B E

A B C + C B E = 2 rectos

de las que resulta A B C + C B D = A B C + C B E

luego C B D = C B E

lo que no es posible, á ménos que B E y B D coincidan, esto es, cuando B D sea la prolongacion de A B.

398.—*La menor distancia de un punto* A (fig. 47) *á una recta* B C, *es la perpendicular* A D *bajada desde dicho punto.*

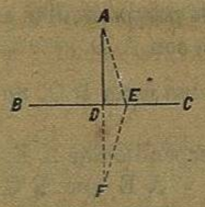
Figura 47.

Demostraremos que la perpendicular A D es más corta que cualquiera otra oblícua A E. Si dobláramos la figura por B C, el punto A caeria en F, y por tener los ángulos B D A y B D F la posicion de adyacentes y ser cada uno de ellos recto, D F será prolongacion de A D (397) esto es, A F será una línea recta, luego:

$$AF < AEF$$

tomando la mitad $AD < AE$. Que es lo que se debia demostrar.

Esta prooiedad hace que la distancia de un punto á una recta se mida siempre por la perpendicular bajada del punto á la recta.

399.—*Las oblícuas* A B *y* A C (fig. 48) *bajadas desde un mismo punto sobre una recta, y que se separan igualmente del pié de la perpendicular serán iguales.*

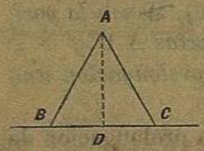
Figura 48.

Los triángulos A D B y A D C serán iguales (385) por tener el ángulo $ADB = ADC$ por recto, el lado A D comun, y $BD = DC$ por el supuesto, y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales (387) tendremos que por estar opuestos á los ángulos rectos: $AB = AC$.

400.—*Si dos puntos* C *y* D (fig. 49) *desigualmente distantes de una recta* A B *se reunen á sus extremos, la suma de las rectas* $CA + CB$ *tiradas del punto mas próximo* C, *será menor que la suma de las* $DA + DB$ *tiradas del mas distante* D.

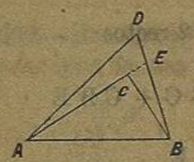
Figura 49.

Para demostrar que $CA + CB < DA + DB$ prolongaremos A C hasta E, y supuesto que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

$$AE < DA + DE$$

y agregando á los dos miembros E B

$$AE + EB < DA + DB \ldots. [1]$$

Por otra parte

$$CB < EC + EB$$

y agregando á los dos miembros C A

$$CA + CB < AE + EB \ldots. [2]$$

Observando que el primer miembro de la última desigualdad, es menor que $A E + E B$ y que conforme á la (1) esta suma es menor que $DA + DB$, se infiere que:

$$CA + CB < DA + DB.$$

401.—*Si desde un punto* A (fig. 50) *se bajan varias oblícuas* A B A D, *la que se separe más del pié de la perpendicular* A C, *será la mayor.*

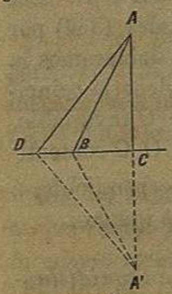
Figura 50.

Si dobláramos la figura por la recta D C y suponemos que el punto A caiga en A', A B tomaria la posicion de A' B, y A D la de A' D.

Teniendo los ángulos A C D y A' C D la posicion de adyacentes y siendo cada uno de ellos recto, la línea C A' será la prolongacion de A C (397) y en consecuencia A A' es una línea recta. Por otra parte, estando B más próximo á la recta A A' que el punto D tendremos que (400)

$$AB + BA' < AD + DA'$$

tomando la mitad $AB < AD$

que es lo que se debia demostrar.

402.—Como si desde un punto se tiran varias líneas á una recta, por una parte la perpendicular es menor que cualquiera oblícua, y por otra solo pueden ser iguales las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular, siendo mayores las que se separan más; se infiere que *desde un punto tomado fuera de una recta, no se le pueden tirar mas que dos rectas iguales.*

403.—*Si por el medio* C (fig. 51) *de una recta* A B *se levanta una perpendicular* C D: 1° *cualquier punto de la perpendicular estará equidistante de los extremos* A y B: 2° *cualquier punto que no pertenezca á la perpendicular, distará desigualmente de los extremos.*

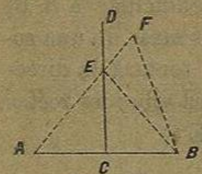
Figura 51.

Demostracion.—1° $AE = EB$ por ser oblícuas, que segun el supuesto, distan igualmente del pié de la perpendicular (399).

2° Vamos á demostrar ahora que un punto F que no pertenece á la perpendicular, dista desigualmente de los extremos. Reuniremos F con A y con B y por el punto E tiremos la recta E B. Tendremos

$$FB < EB + EF$$

sustituyendo por E B, su igual E A resulta

$$F B < F A.$$

404.—*Siempre que una recta* A B (fig. 52) *tiene dos puntos* A *y* B *equidistantes de dos puntos* C *y* D *de otra recta, la primera será perpendicular á la segunda, y la dividirá en dos partes iguales.*

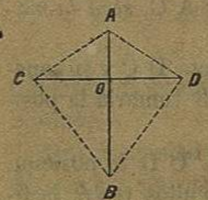

Figura 52.

Fundándonos en que A C = A D y B C = B D, demostraremos que el ángulo A O C = A O D. Los triángulos A B C y A B D son iguales (386) por tener sus tres lados iguales; luego si dobláramos la figura por la línea A B, el punto D deberia coincidir con C, y permaneciendo el punto O invariable, resultaria que los lados del ángulo A O C coincidirán con los del A O D por lo que serán iguales, y A B perpendicular á C D. Además, se ve que A B divide á C D en dos partes iguales.

405.—*Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están equidistantes de los lados del ángulo.*

Sea el ángulo A B C (fig. 53) y vamos á demostrar que cualquier punto E de la recta B D, que lo divide en dos ángulos A B D y D B C iguales, está equidistante de los lados A B y B C del ángulo A B C Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre la recta, si bajamos las perpendiculares E F y E G, debemos probar que estas líneas que miden la distancia de un punto de la bisectriz á los lados del ángulo son iguales.

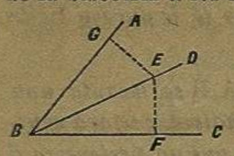

Figura 53.

Si dobláramos la figura por la recta B D el punto E permaneceria fijo, y por ser el ángulo A B D = D B C el lado B C coincidiria con B A y el punto F de la primera recta debeberá hallarse en alguno de los de la recta B A. Por otra parte, la línea E F que es perpendicular á B C despues de doblada la figura, deberá tomar una posicion perpendicular á A B; pero como desde un mismo punto E no se puede bajar mas de una sola perpendicular á una recta (396), resulta que E F tomará la direccion E G, y como el punto F debe encontrarse á la vez sobre las rectas A B y E G tendrá que coincidir con G; luego E F = E G.

406.—*Todo punto* O (fig. 54) *que queda dentro de un ángulo* A B C *y que no pertenece á la bisectriz, está desigualmente distante de los lados del ángulo.*

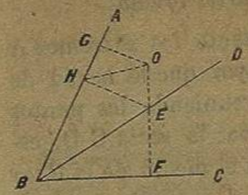

Figura 54.

Las perpendiculares O F y O G son las distancias del punto O á los lados del ángulo, y vamos á probar que O G < O F.

Por el punto E tiremos la perpendicular E H á A B, y unamos O con H.

Tendremos:

$$O G < O H \ (398)$$

$$O H < O E + E H$$

pero siendo E H = E F (405)

sustituyendo se tiene $\quad O H < O F$

luego con más razon $\quad O G < O F$

407.—Problemas de oblícuas y perpendiculares.—I.—*Levantar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 55) *desde un punto* C *de la misma recta.*

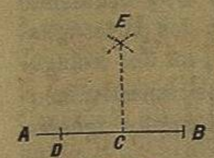

Figura 55.

Resolucion.—Tómense dos puntos B y D equidistantes de C, y haciendo centro primero en B y luego en D con un radio arbitrario pero mayor que C B, trácense dos arcos de círculo, y reuniendo el punto E de interseccion de estos dos arcos con el punto C, la recta C E será la perpendicular; por tener conforme á la construccion dos puntos C y E equidistantes de otros dos D y B de la línea dada (404).

El rádio arbitrario B E debe ser mayor $\frac{BD}{2}$ para que los arcos del círculo puedan cortarse.

II.—*Bajar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 56) *desde un punto* C *tomado fuera de ella.*

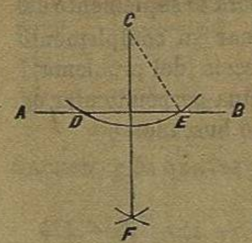

Figura 56.

Haciendo centro en el punto C y con un rádio C D trácese el arco D E que corte la recta dada en dos puntos; hágase centro en cada uno de estos puntos D y E y con un mismo radio descríbanse dos arcos que se cortarán en el punto F; reuniendo los puntos C y F con una recta C F, esta será la pedida por tener dos puntos C y F, equidistantes de los D y E de la recta dada. (404).

III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*

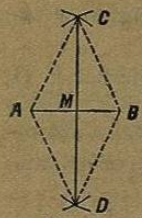

Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*

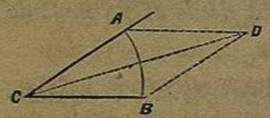

Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

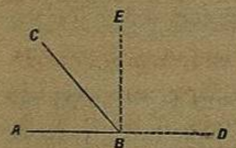

Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

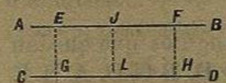

Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

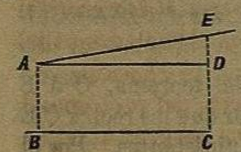

Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B=C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B=C E, de lo que resultaria C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijimos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*