III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*

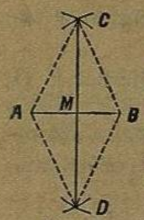
Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*

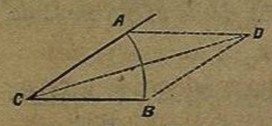
Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

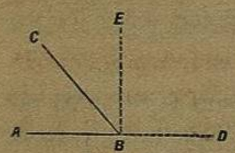
Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

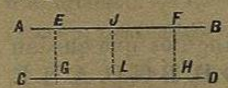
Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

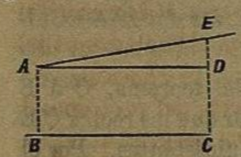
Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B=C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B=C E, de lo que resultaria C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijimos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*

Figura 62.

Por ser A B paralela á E F se tiene

A E=B F

por ser C D paralela á E F

C E=DF

restando esta ecuacion de la anterior, resulta.

A C=B D

luego A B será paralela á C D.

412.—Cuando una recta corta dos paralelas (fig. 63), á la recta A B se le llama *secante* y los ángulos que forma con las paralelas toman las siguientes denominaciones:

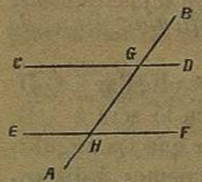

Figura 63.

Se llaman *internos* los cuatro ángulos que quedan dentro de las paralelas, y son: C G H, D G H, E H G y F H G.

Se llaman *externos* los cuatro ángulos que quedan fuera de las paralelas, y son: C G B, B G D, A H E y A H F.

Considerando los ángulos de dos en dos: se llaman *alternos internos*, los internos colocados de diferente lado de la secante como C G H y F H G, ó E H G y D G H: se llaman *alternos externos* los ángulos que están fuera de las paralelas y de diferente lado de la secante, como C G B y A H F, ó B G D y E H A: por último, se llaman *correspondientes* los ángulos colocados del mismo lado de la secante, siendo uno interno y el otro externo, como B G D y B H F, A H F, y A G D, E H A y C G A, E H B y C G B.

413.—Tomaremos como principio fundamental de las propiedades del paralelismo de dos líneas, el siguiente

Teorema.—*Siempre que los ángulos* C A B y D B A (fig. 64) *que tienen la posicion de alternos internos, sean iguales, las dos rectas* C E *y* F D *serán paralelas*

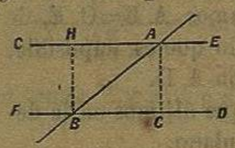

Figura 64.

Conforme á la hipótesis del teorema, C A B =D B A y vamos á demostrar que las rectas C E y F D tienen sus puntos equidistantes. Por el punto A levántese A G perpendicular á C E; y por B levántese B H perpendicular á F D. El ángulo B A G será complemento de C A B, y el ángulo H B A será complemento de D B A; pero siendo

C A B=D B A

se infiere que tambien lo serán sus complementos, luego

B A G=H B A.

Los dos triángulos A B G y A B H serán iguales (384) por tener el lado A B comun adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales, tendremos:

A G=B H

por opuestos á los ángulos

A B G=B A H

y como A G y B H miden las distancias de dos puntos de las rectas C E y F D, se infiere que serán paralelas por estar equidistantes.

414.—*Siempre que en dos rectas* A B *y* C D (fig. 65) *cortadas por una secante, los ángulos que tienen la posicion de alternos externos sean iguales, estas rectas serán paralelas.*

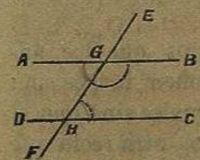

Figura 65.

Conforme á la hipótesis

A G E=F H D

sustituyendo á estos ángulos sus iguales por opuestos al vértice, se tiene

B G H=C H G

pero como estos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que las rectas serán paralelas.

415.—*Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) E G B=E H D

sustituyendo por E G B su opuesto al vértice, se tiene

A G H=E H D

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

416.—*Siempre que los ángulos internos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las dos rectas serán paralelas.* (fig. 65).

Sean A G H+C H G=2 rectos

y como

A G H+H G B=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

C H G=H G B

pero siendo estos alternos internos, las rectas serán paralelas.

417.—*Siempre que los ángulos externos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) A G E+C H F=2 rectos
sustituyendo sus iguales por opuestos al vértice

B G H+D H G=2 rectos

pero como

B G H+A G H=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

D H G=A G H

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

418.—Los teoremas recíprocos del fundamental y de los cuatro siguientes á él son tambien ciertos; pero como la demostracion de estas proposiciones recíprocas es muy sencilla, solo daremos la del teorema fundamental.

TEOREMA.—*Siempre que dos rectas* A B *y* C D (fig. 66) *sean paralelas, los ángulos alternos internos serán iguales.*

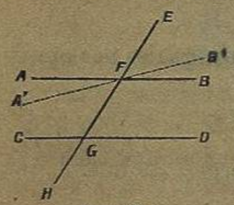
Figura 66.

DEMOSTRACION.—Si suponemos que los ángulos A F G y F G D, que tienen la posicion de alternos internos, no sean iguales sino que el primero sea mayor que el último, otra recta que pase por F como A' B', será la que tenga la propiedad de formar el ángulo

A' F G=F G D

pero teniendo estos ángulos la posicion de alternos internos conforme al teorema (413) directo, las rectas A' B' y C D serian paralelas, y como por el supuesto A B es tambien paralela á C D, resultaria que por un mismo punto F se podrian tirar dos paralelas, á una misma recta, lo que es imposible; (410) y como el mismo absurdo resultaria si supusiéramos A F G < F G D se tiene, que no pudiendo ser estos ángulos desiguales, tendrá que verificarse que siempre que las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos serán iguales.

419.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en el mismo sentido son iguales.*

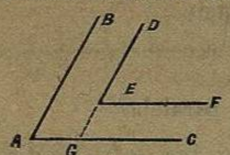
Figura 67.

Si prolongamos el lado D E (fig. 67) hasta G. tendremos:

A=D G C por correspondientes
D G C=D E F por la misma razon

luego

A=D E F.

420.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en sentido contrario, son iguales.*

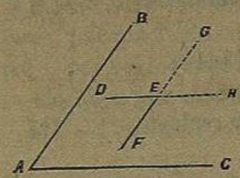
Figura 68.

Sean los ángulos B A C y D E F; (fig. 68) prolongando los lados del último, tendremos que

B A C = G E H (419)
G E H = D E F por opuestos al vértice

luego B A C = D E F.

421.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y cuyos vértices no están vueltos en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

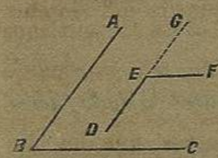
Figura 69.

Si prolongamos el lado D E (fig. 69), tendremos:

D E F + F E G=2 rectos (389)

pero

F E G=A B C (419)

luego

D E F + A B C=2 rectos.

422.—*Dos ángulos cuyos lados son perpendiculares, serán iguales si dichos ángulos son de la misma especie, y serán suplementarios cuando uno sea agudo y el otro obtuso.*

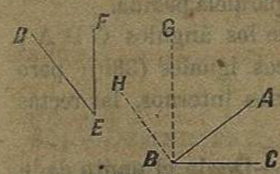
Figura 70.

Sean los ángulos agudos A B C y D E F (fig. 70) en los que D E es perpendicular á A B y F E perpendicular á B C; y vámos á demostrar que son iguales. Por el vértice B tiremos B G paralela á E F y B H paralela á E D, con lo que resultará el ángulo H B G =D E F (419).

Por ser los lados de estos ángulos respectivamente perpendiculares tendremos:

H B A=G B C por rectos

restando G B A de ambos, se tiene

H B G=A B C

pero como

H B G=D E F

resulta que

A B C=D E F.

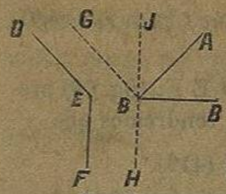

Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—PROBLEMAS DE PARALELAS.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

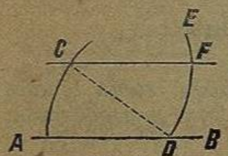

Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

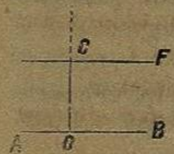

Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

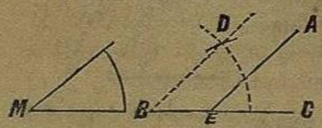

Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supues-

to que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

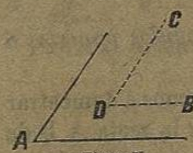

Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—DEFINICIONES.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

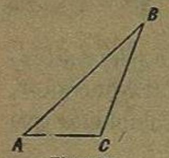
Figura 76.

Siendo la recta A B el camino más corto entre dos puntos, se infiere que $AB < AC + CB$.

426.—*Un lado cualquiera* A B (fig. 76) *es mayor que la diferencia de los otros dos.*

En virtud del teorema anterior, se tiene:

$$AB + AC > BC$$

despejando á

$$AB > BC - AC$$

427.—*En todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales.*

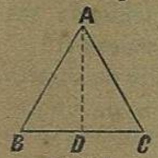
Figura 77.

En la figura 77 sea $AB = AC$, y vamos á demostrar que $B = C$. Desde el vértice A tiremos la recta A D de modo que divida el ángulo B A C en dos partes iguales, y tendremos que los triángulos B A D y D C A serán iguales por tener un ángulo igual $BAD = DAC$ por construccion, formado por lados iguales, A D, que es comun; y $AB = AC$ por lados del triángulo isósceles. Siendo los triángulos iguales, los ángulos opuestos al lado comun A D serán iguales (387), luego $B = C$.

De la igualdad de los triángulos se infiere ademas que $BD = DC$ y que $ADC = ADB$, luego.

La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles: 1° divide el lado opuesto en dos partes iguales, y 2° es perpendicular á este lado.

Supuesto que en un triángulo á los lados iguales están opuestos ángulos iguales, se infiere que *todo triángulo equilátero será equiángulo y recíprocamente.*

428.—*La recta que une el vértice de un triángulo isósceles al medio del lado opuesto, es perpendicular á este lado.*

Los dos triángulos A D B y A D C tendrán A D comun, $AB = AC$ por lados del triángulo isósceles, y $BD = DC$ por el supuesto; luego los triángulos serán iguales (386), y siéndolo se tendrá que el ángulo $ADB = ADC$.

429.—*Si dos ángulos* A *y* B *de un triángulo* A C B (fig. 78) *son iguales entre sí, los lados opuestos* B C *y* A C, *tambien serán iguales.*

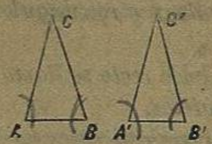
Figura 78.

Construyamos otro triángulo A' B' C' igual al primero, y en el que las letras acentuadas indican las mismas partes de las que no lo están. Siendo $A = B = B' = A'$ si sobrepusiéramos los triángulos haciendo coincidir el lado A' B' con A B poniendo B' sobre A y A' sobre B, resultaria que por ser iguales los ángulos B' C' coincidiria con A C y A'

C' con B C, pero por construccion $B'C' = BC$ y $A'C' = AC$, luego $AC = BC$ que es lo que debia demostrarse.

430.—*En todo triángulo al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

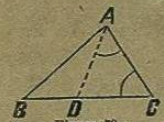
Figura 79.

Supongamos el ángulo B A C [fig. 79] mayor que C y vamos á demostrar que $BC > AB$.

Construyamos el ángulo $DAC = C$; el triángulo A D C será isósceles y se tiene

$$AD = DC$$

Por otra parte

$$AD + BD > AB$$

sustituyendo

$$DC + BD \text{ ó } BC > AB$$

que es lo que se debia demostrar.

431.—Recíprocamente *en todo triángulo* [fig. 79] *al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

Si siendo $BC > AB$ el ángulo A no fuera mayor que C, tendria que ser igual ó menor; pero no puede ser igual, porque entónces (429) B C seria igual á A B; ni puede ser menor, porque conforme al teorema directo [430] se tendria $BC < AB$, lo que es contrario al supuesto luego si el ángulo A no puede ser igual ni menor que C, resulta que será mayor, que es lo que teniamos que demostrar.

432.—*Si en dos triángulos A B C y A' B' C'* [fig. 80] *un ángulo A es mayor que otro A', y ambos ángulos están formados por lados respectivamente iguales, $AC = A'C'$ y $BA = B'A'$, el lado B C opuesto al mayor ángulo será mayor que B' C' opuesto al menor ángulo.*

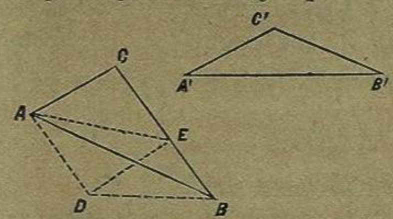
Figura 80.

Demostracion.—Si sobre el lado $AB = A'B'$ construimos el triángulo A D B igual á A' B' C' y en seguida dividimos por mitad el ángulo D A C con la recta A E, en razon de ser $CAB > BAD$ esta recta caerá dentro del ángulo mayor C A B. Reuniendo E D resultará el triángulo A E D igual á C A E por tener el ángulo $CAE = EAD$ por construccion, formado por lados iguales [385] A E comun y $AC = AD$, luego

$$C\ E = E\ D$$

agregando E B se tiene

$$C\ B = E\ D + E\ B$$

pero

$$E\ D + E\ B > D\ B$$

luego

$$C\ B > D\ B \text{ ó que su igual } C'\ B'$$

que es lo que se debia demostrar.

Recíprocamente si $B\ C > B'\ C'$ deberá ser el ángulo $C\ A\ B > C'\ A'\ B'$

En efecto, no puede ser $C\ A\ B = C'\ A'\ B'$ porque entónces los triángulos serian iguales [385], y siéndolo resultaria $B\ C = B'\ C'$ contra el supuesto.

Tampoco puede ser $C\ A\ B < C'\ A'\ B'$; porque conforme al teorema directo que acabamos de demostrar se tendrá $B'\ C' > B\ C$, lo que tambien es contra el supuesto.

Luego si C A B no puede ser igual ni menor que C' A' B' tendrá que ser mayor, que es lo que trataba de demostrarse.

433.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

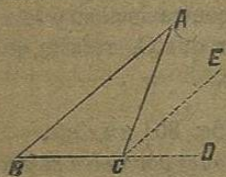

Figura 81.

Prolongado el lado B C [fig. 81] hasta D y tirando por el punto C la recta C E paralela á A B, tendremos que en virtud del teorema del número 390

$$A\ C\ B + A\ C\ E + E\ C\ D = 2 \text{ rectos.}$$

Sustituyendo en esta ecuacion por A C E su igual A por alternos internos, y en lugar de E C D el ángulo B, que es igual por correspondiente, resulta

$$A\ C\ B + A + B = 2 \text{ rectos.}$$

434.—De aquí se infieren los siguientes corolarios:

1° *El ángulo exterior* A C D *de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores opuestos.*

Porque

$$A\ C\ D = A\ C\ E + E\ C\ D$$

sustituyendo

$$A\ C\ D = A + B$$

2° *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los opuestos.*

3° *Todo ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos.*

4° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, tambien será igual el tercer ángulo del primer triángulo al tercero del otro.*

435.—*Si desde un punto* D [fig. 82] *tomado en el interior de un triángulo se tiran rectas,* D B *y* D C *á las extremidades de un lado, el ángulo formado* B D C *será mayor que el ángulo* A *del triángulo opuesto á ese lado.*

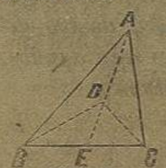

Figura 82.

Considerando el triángulo A D C, conforme al corolario segundo del párrafo anterior, se tiene:

$$E\ D\ C > D\ A\ C$$

en el triángulo A D B

$$E\ D\ B > D\ A\ B$$

sumando estas desigualdades

$$B\ D\ C > B\ A\ C$$

436.—*Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.*

Porque en cualquiera de estos casos la suma de sus tres ángulos valdria más de dos ángulos rectos.

437.—*Los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo son complementarios.*

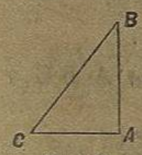

Figura 83.

En el triángulo A B C [fig. 83] rectángulo en A tenemos [433]

$$A + B + C = 2 \text{ rectos}$$

de donde

$$B + C = 2 \text{ rectos} - A$$

luego

$$B + C = 1 \text{ recto.}$$

438.—*Si desde un punto tomado sobre un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, ésta caerá dentro del ángulo cuando sea agudo, y caerá fuera cuando sea obtuso.*

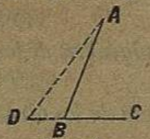

Figura 84.

Sea [fig. 84] el caso en que el ángulo A B C es agudo. Si la perpendicular bajada desde A no cayera dentro del ángulo, sino en el punto D, resultaria el triángulo A D B con el ángulo D recto y A B D obtuso, lo que es imposible [433].

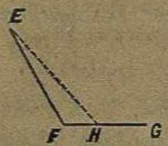

Figura 85.

Sea [fig. 85] el ángulo E F G obtuso. Si la perpendicular E H pudiera caer dentro del ángulo, nos resultaria el triángulo E F H con el ángulo H recto, y F obtuso, lo que es un absurdo.

439.—De aquí se infiere que *la perpendicular bajada desde el vértice de un ángulo de un triángulo sobre el lado opuesto, caerá dentro del triángulo cuando los ángulos adyacentes* [fig. 86] *al lado sean agudos, y caerá fuera cuando* [fig. 87] *uno de los ángulos sea obtuso.*

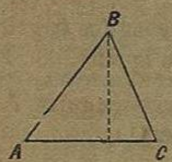

Figura 86.

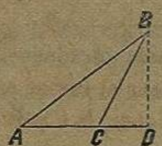

Figura 87.

440.—Hemos visto (384, 385 y 386) y demostrado que *dos triángulos son iguales: 1° cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales: 2° cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales: 3° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; y ahora agregaremos el siguiente caso:*

4° *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.*

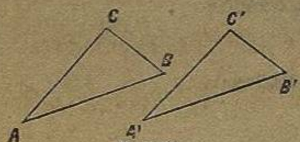

Figura 88.

Sean [fig. 88] los triángulos A B C y A' B' C' que tienen

A=A', B=B' y B C=B' C'

sumando las dos primeras ecuaciones se tiene que

A + B=A' + B'

luego C que es suplemento de A + B, será igual á C' suplemento de A' + B' (434 3°). De esto se infiere que los triángulos serán iguales por tener un lado igual, B C=B' C' adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, B=B' y C=C'.

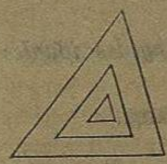
Figura 89.

441.—Como habrá podido observarse en los cuatro casos de igualdad de los triángulos, siempre entra como elemento uno de los lados, pues dos triángulos no son iguales cuando tienen sus tres ángulos iguales, como puede observarse en la figura 89 con los triángulos cuyos lados son paralelos.

442.—*Dos triángulos rectángulos son iguales: 1° cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los ángulos agudos: 2° cuando tienen iguales un cateto y uno de los ángulos agudos: y 3° cuando tienen iguales la hipotenusa y uno de los catetos.*

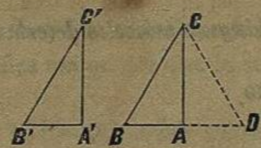

Figura 90.

Por ser los triángulos rectángulos, tendrán forzosamente el ángulo recto igual, así es que en el 1° y 2° caso los triángulos serán iguales por tener dos ángulos y un lado respectivamente iguales.

Para demostrar el tercer caso, sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 90) que tienen B C=B' C' y A C=A' C'.

Si sobre A C construimos el triángulo C A D igual C' A' B', tendremos que por tener los ángulos C A B y C A D la posicion de adyacentes y valer juntos dos rectos (397) la recta A D será prolongacion de B A, y como las dos oblícuas B C y C D son iguales, se separarán igualmente del pié de la perpendicular C A (399) luego B A=A D.

Así, pues, el triángulo A B C será igual á A C D por tener A C comun, A B=A D y B C=C D; pero siendo A C D igual á A' C' B' por construccion, se infiere que el triángulo A B C será igual á A' B' C'.

443.—Problemas de triángulos.—I.—*Dados dos ángulos de un triángulo determinar el tercero.*

Sea A=29° 15', y B=75° 38' y vamos á determinar á C.

Tenemos (433)

$$A + B + C = 180^\circ$$

despejando á

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

sustituyendo

$$C = 180^\circ - (29^\circ\ 15' + 75^\circ\ 38')$$

lo que da

$$C = 75^\circ\ 7'$$

II.—*Conocido en un triángulo isósceles uno de los ángulos iguales determinar el del vértice.*

Sea A=B el ángulo conocido, y C el ángulo que se busca.

Tendremos

$$A + B + C = 180^\circ$$

por ser A=B

$$2\,A + C = 180^\circ$$

de donde

$$C = 180^\circ - 2\,A.$$

III.—*Dado el ángulo C del vértice de un triángulo isósceles determinar los de la base.*

Despejando A en la última ecuacion, se tiene

$$A = 90^\circ - \tfrac{C}{2}$$

Si se conocen los valores numéricos, bastará sustituirlos en estas ecuaciones.

IV.—*Dado un ángulo C de un triángulo y los dos lados a y b que lo forman* (fig. 91) *construir el triángulo.*

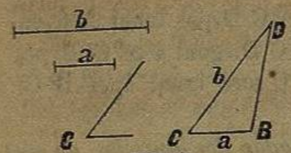

Figura 91.

Sobre la recta C B=a se construirá el ángulo C igual al dado y sobre el lado C D indefinido se tomará la parte C D=b; reuniendo el punto D con B, se tendrá el triángulo D B C que satisface las condiciones del problema.

El ángulo dado C debe ser menor que 180°.

V.—*Dado un lado a* (fig. 92) *y los dos ángulos adyacentes, construir un triángulo.*

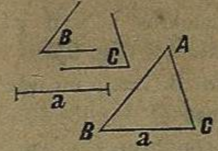

Figura 92.

Tómese B C=a; en cada uno de sus extremos constrúyanse los ángulos B y C iguales á los dados, y prolongando las rectas que los forman hasta su punto de interseccion A, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, se necesita tener $B + C < 180^\circ$.

VI.—*Construir un triángulo conocidos sus tres lados a, b y c* (fig. 93).

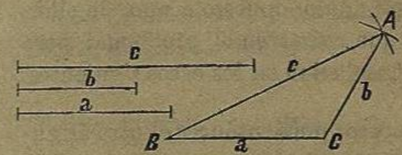

Figura 93.

Tómese B C=a y haciendo centro en B con un radio igual á c, trácese un arco de círculo, en seguida hágase centro en C y con un radio igual á b, trácese otro arco de círculo, y reuniendo el punto A de interseccion de los arcos con B y C, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos.

VII.—*Construir un triángulo, dados dos ángulos A y B, y un lado a opuesto á uno de ellos.*

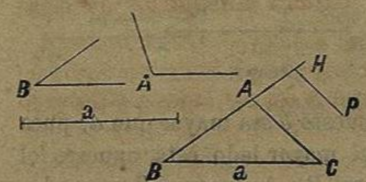

Figura 94.

Sea (fig. 94) a el lado opuesto al ángulo A. Tómese B C=a; en el punto B constrúyase el ángulo C B H =B; en un punto cualquiera de la recta B H constrúyase el ángulo H =A, y por el punto C tírese la recta C A paralela á H P. El triángulo B A C será el pedido.

Para que el problema sea posible, debe tenerse $A + B < 180^\circ$.

Los problemas IV, V, VI y VII que corresponden á los cuatro casos de igualdad de los triángulos, no admiten más que una sola resolucion.

VIII.—*Construir un triángulo, dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos.*

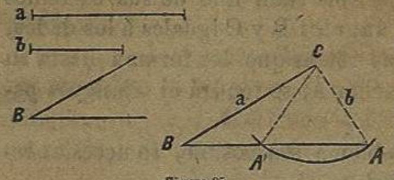

Figura 95.

Suponemos conocidos a y b y el ángulo B opuesto á *b* (fig. 95).

Tómese la recta B C=a; en un extremo constrúyase el ángulo dado B, y haciendo centro en C y con un radio igual á *b*, trácese un arco de círculo que cortará la recta B A en dos puntos A y A'; reuniendo C con A y con A', resulta que hay dos triángulos que satisfacen el problema: A B C y A' C B.

Cuando se conocen dos lados, y un ángulo opuesto á uno de ellos, por regla general hay dos triángulos que resuelven el problema; pero la cuestion no admitirá más que una resolucion en los casos siguientes:

1° Cuando el ángulo dado B sea obtuso; pues entónces el otro ángulo será forzosamente agudo (fig. 96) (436).

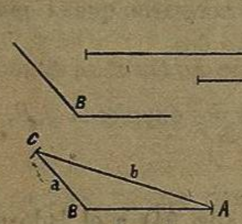

Figura 96.

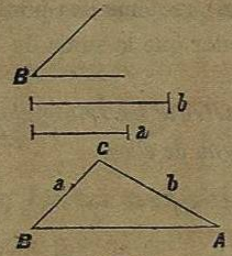

Figura 97.

2° Cuando siendo B agudo, el lado opuesto *b* sea mayor que *a;* pues entónces conforme al principio de que al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, siendo b>a, deberá tenerse B>A; luego si B es agudo, tendrá que serlo A (fig. 97).

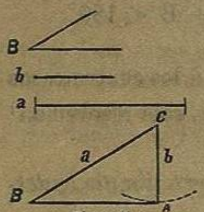

Figura 98.

3° Cuando siendo B agudo el arco no corta á la recta B A, sino que solo la toca en un punto. En este caso (fig. 98) el ángulo A será recto.

4° Cuando B sea recto, porque entónces A tendrá que ser agudo (436).

Por último, el problema será imposible cuando el lado dado *b* es menor que la perpendicular C A (fig. 98).

IX.—*Construir un triángulo isósceles, dado el ángulo C del vértice* (fig. 99) *y la base c.*

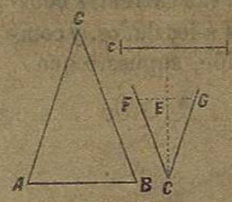

Figura 99.

Tómese la recta A B=c; divídase el ángulo C por la mitad con la línea C E; en un punto cualquiera E de esta recta, levántese la perpendicular F G, y construyendo en A y B ángulos iguales á F ó á G, se tendrá el triángulo A B C pedido.

X.—*Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a (fig. 100) *y un ángulo agudo B.*

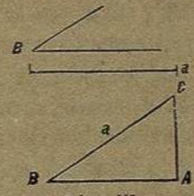

Figura 100.

Tómese la recta B C=a; en el punto B constrúyase un ángulo igual á B, y bajando desde C una perpendicular á la recta indefinida B A, se tendrá el triángulo B A C pedido.

XI.—*Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto* b (fig. 101) *y el ángulo adyacente C.*

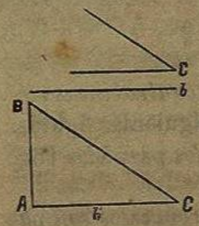

Figura 101.

Tómese C A=b; en el punto C constrúyase un ángulo igual al dado, y prolongando C A levántese en el punto A la perpendicular A B. El triángulo pedido será C B A.

XII.—*Determinar un ángulo igual á la suma de otros dos A y B, cuando esta suma es menor que dos rectos.*

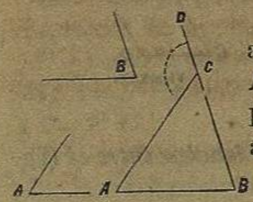

Figura 102.

Sobre los extremos de una recta de longitud arbitraria A B (fig. 102) constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados; complétese el triángulo A B C, y prolongando B C, el ángulo pedido será A C D; pues por ser externo del triángulo es igual á B+A (434).