DEMOSTRACION.—En efecto, cualquier ángulo inscrito en ese arco, como R, tendrá por medida el arco $\frac{A\,B}{2}$ (484); pero como el ángulo A B C tambien tiene por medida $\frac{A\,B}{2}$ (488) resulta que cualquier ángulo inscrito que abrace la cuerda A B, será igual á A B C, el cual por construccion es igual al ángulo dado a.

V.—*Levantar una perpendicular á una recta A R por uno de sus extremos A* [fig. 158], *cuando solo puede prolongarse en la direccion del otro extremo R.*

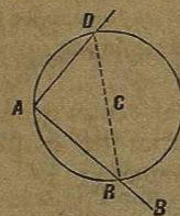

Figura 158.

Fuera de la recta A R y entre sus dos extremos tómese el punto C: haciendo centro en él, con el radio C A trácese una circunferencia que pasará por A y cortará la recta A R en un punto R; tirando el diámetro R D y reuniendo el punto D con el extremo A, se tendrá la recta D A, que será la perpendicular pedida, por ser el ángulo D A R inscrito, y abrazar un diámetro [485—2°].

VI.—*Desde un punto A dado fuera de una recta B D, que solo puede prolongarse en la direccion de uno de sus extremos, bajarle una perpendicular* [fig. 159].

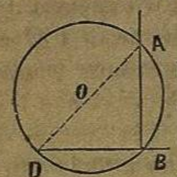

Figura 159.

Réunase A con D; divídase por la mitad la recta A D: haciendo centro en O, y con el radio O A trácese una circunferencia; reúnase el punto A con el de interseccion B, y B A será la perpendicular pedida [485—2°].

POLIGONOS EN EL CIRCULO.

491.—Se llaman *polígonos inscritos, aquellos cuyos ángulos todos están sobre la circunferencia de un círculo; y polígonos circunscritos son aquellos cuyos lados son tangentes del círculo.*

En los polígonos inscritos (fig. 162) los lados quedan dentro del círculo y forman las cuerdas; en los polígonos circunscritos (fig. 163) los vértices quedan fuera del círculo y los lados son tangentes.

492.—*Todo triángulo puede inscribirse á un círculo.*

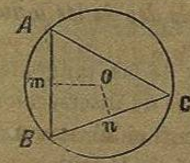

Figura 160.

Sea el triángulo A B C (fig. 160). Si por el punto *m* medio del lado A B se levanta la perpendicular *m* O, todos los puntos de esta perpendicular estarán equidistantes de los extremos A y B [403—1°]. Si por el medio *n* del lado B C se levanta la perpendicular *n* O, todos sus puntos estarán equidistantes de los extremos B y C; así es que el punto de interseccion O de las dos perpendiculares, estará equidistante de los tres vértices del triángulo; luego si hacemos centro en O y trazamos un círculo con el radio O A=O B=O C, los vértices del triángulo quedarán sobre la circunferencia, y el triángulo resultará inscrito.

493.—*Todo triángulo puede circunscribirse á un círculo.*

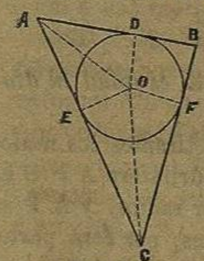

Figura 161.

Sea el triángulo A B C (fig. 161). Si dividimos en dos partes iguales el ángulo A con la recta A O, todos sus puntos gozarán de la propiedad de estar equidistantes de los lados A B y A C [405]; esto es, las perpendiculares bajadas desde uno de sus puntos sobre los lados A B y A C serán iguales. Si con la recta C O dividimos en dos partes iguales el ángulo C, todos los puntos de la bisectriz C O estarán equidistantes de los lados C A y C B; así es que el punto O de interseccion de las dos disectrices estará equidistante de los tres lados luego si desde O como centro y tomando por radio la perpendicular O D=O E=O F, trazamos un círculo; éste tocará á los tres lados del triángulo en D, E y F, y resultará circunscrito el triángulo.

494.—*En todo cuadrilátero inscrito, la suma de los ángulos opuestos es igual á dos rectos* (fig. 162).

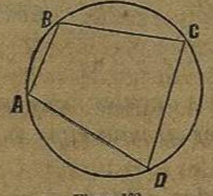
Figura 162.

Si consideramos los dos ángulos opuestos B y D, tendremos que la medida de B es

$$B = \frac{A\,D\,C}{2}$$

la de D es

$$D = \frac{A\,B\,C}{2}$$

sumando se tiene $B + D = \frac{A\,D\,C\,B}{2}$

pero como la mitad de toda la circunferencia es igual á 180°, la suma de B y de D valdrá dos rectos.

495.—*En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de dos de los lados opuestos es igual á la suma de los otros dos* (fig. 163).

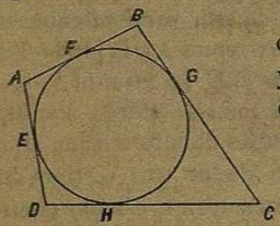
Figura 163.

Si consideramos las partes de las tangentes comprendidas entre los puntos de interseccion y los de contacto, fundándonos en el teorema demostrado en el número 479, se tiene:

$$A\,E = A\,F$$
$$E\,D = D\,H$$
$$B\,G = B\,F$$
$$G\,C = C\,H$$

sumando ordenadamente estas igualdades resulta

$$A\,D + B\,C = A\,B + D\,C$$

que es lo que se debia demostrar.

496.—*El lado del cuadrado circunscrito al círculo es igual al diámetro.*

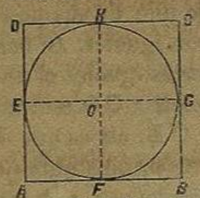
Figura 164.

Si desde el centro O (fig. 164) tiramos los radios O E, O F, y consideramos el cuadrilátero A F O E, tendremos: que O F = O E por radios, y A F = A E (479) por partes de tangentes; por otra parte, siendo los ángulos A, O F A y O E A (478) rectos, el ángulo E O F tambien lo será, de lo que resulta que A F O E es un cuadrado, y por tanto,

A F = E O y A E = O F. Como lo mismo podria demostrarse de los cuadrados O F B G, O G C H y O H D E, cada uno de los lados del cuadrado será igual á dos rádios, supuesto que cada una de sus partes A F y F B es igual á un radio, E O y O G.

De aquí se infiere que el perímetro del cuadrado circunscrito es igual á ocho radios.

497.—*El lado del exágono regular inscrito, es igual al radio.*

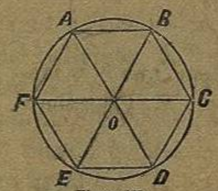
Figura 165.

(Figura 165). Por ser el polígono regular (461) los lados A B, B C, C D, etc., serán iguales entre sí; siendo iguales estas cuerdas, lo serán los arcos que subtenden, y como los arcos A B, B C, C D, etc., son las medidas de los ángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados en el centro, se infiere que estos seis ángulos son iguales entre sí. Todos estos ángulos formados al rededor de un punto O valen cuatro ángulos rectos ó 360°, luego uno de ellos valdrá $\frac{360°}{6}$ Así A O B=60°

Considerando el triángulo A O B, tendremos que, siendo A O=O B por radios, los ángulos opuestos O B A y O A B serán iguales, y valiendo la suma de los tres ángulos dos rectos, se tiene

$$A\,O\,B + O\,B\,A + O\,A\,B = 180°$$

sustituyendo $60° + 2.\ O\,B\,A = 180°$

De donde $O\,B\,A = O\,A\,B = 60°$

Por ser los tres ángulos iguales y estar opuestos á ángulos iguales lados iguales, el triángulo A O B será equilátero, y el lado A B del exágono inscrito será igual á A O, que es el radio del círculo.

De aquí se infiere que el perímetro del exágono regular inscrito, es igual á seis radios.

498.—Como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro del polígono circunscrito, y mayor que el perímetro del polígono inscrito, resulta que llamando C la circunferencia del círculo, r el radio, y considerando el cuadrado circunscrito y el exágono inscrito,

se tiene $C < 8\,r$ (496)

y $C > 6\,r$ (497)

luego *la circunferencia del círculo es menor que ocho veces el radio, y mayor que seis.*

Dividiendo por 2 r los dos miembros de las desigualdades anteriores, se tiene

$$\frac{C}{2r} < 4$$

$$\frac{C}{2r} > 3$$

luego *la razon de la circunferencia al diámetro es mayor que* 3 *y menor que* 4. Generalmente se representa la razon $\frac{C}{2r}$ por π, y se tiene $\pi = 3{,}141592$, como veremos más adelante

499.—*Todo polígono regular se puede inscribir al círculo* (fig. 166).

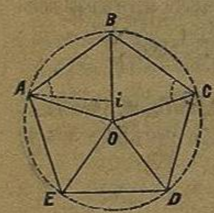

Figura 166.

Dividiendo en dos partes iguales cada uno de los ángulos del polígono, con las rectas A O, B O, C O, etc., para probar que el polígono se puede inscribir á un círculo, nos bastará demostrar: primero *que estas rectas son iguales entre sí*, y segundo *que concurren en un mismo punto* O.

1° Todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados por cada uno de los lados del polígono y dos de las bisectrices de los ángulos, son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales (384). Comparando, por ejemplo, los triángulos A O B y C O D, se tiene: A B=C D por lados de polígono regular, O C D=O A B y O D C=O B A por ser mitades de ángulos iguales, luego O D=O B y O C=A O, por estar opuestos estos lados á ángulos iguales en triángulos iguales (387). Además, por ser isósceles los triángulos, todas esas rectas serán iguales entre sí.

2° Las bisectrices concurrirán en el mismo punto, porque si dos de ellas concurrieran en O y otras dos en i, se inferiria que en los triángulos iguales A i B y B O C á los ángulos iguales O C B=i A B, estarian opuestos lados desiguales O B>i B, lo que es inadmisible.

Luego si desde el punto O de interseccion de las bisectrices como centro, y con el radio O A=O B=O C, etc., se traza una circunferencia, esta pasará por todos los vértices A, B, C, D, etc., del polígono.

500.—*Todo polígono regular A B C D E* (fig. 167) *puede circunscribirse al círculo.*

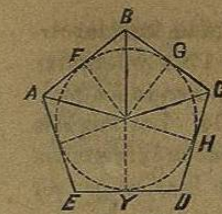

Figura 167.

Si desde el punto O, donde concurren los radios oblícuos (499), bajamos perpendiculares á los lados, nos bastará demostrar que todos los radios rectos O F, O G, O H, etc., son iguales para probar que el polígono puede circunscribirse.

Los triángulos A O F y O G C son iguales (442—3°) por ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas A O=O C por radios oblícuos de polígono regular (499), y un cateto A F=G C por mitades de los lados iguales del polígono. A F es la mitad de A B, porque teniendo la perpendicular O F el punto O equidistante de los extremos A y B, cualquiera otro punto F tambien lo estará (403—1°)

Siendo iguales los dos triángulos rectángulos, el otro cateto O F será igual á O G.

Del mismo modo se demostraria que O G=O H y O H=O Y, etc., luego si desde O como centro se traza un círculo con el radio O F, la circunferencia tocará los lados del polígono en F, G, H, Y, etc.

501.—Problemas de polígonos en el círculo.—I.—*Inscribir un triángulo en un círculo* (fig. 168).

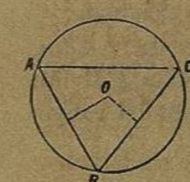

Figura 168.

Levantando perpendiculares por la mitad de los lados A B y B C, haciendo centro en el punto O de interseccion de las perpendiculares, y trazando con el radio O A una circunferencia, quedará resuelto el problema [492].

II.—*Circunscribir un triángulo á un círculo* (fig. 169).

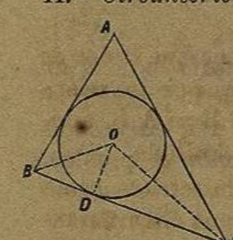

Figura 169.

Divídanse por mitad los ángulos B y C y haciendo centro en el punto de interseccion O de as bisectrices y con un radio igual á la perpendicular O D bajada desde O á uno de los lados, trácese una circunferencia, con lo que quedará resuelto el problema (493).

III.—*Inscribir en un círculo polígonos regulares de* 4, 8, 16, 32, *etc., lados.*

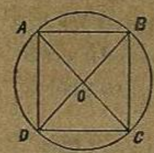

Figura 170.

Para inscribir en el círculo un cuadrado, bastará tirar un diámetro cualquiera A C (fig. 170) y levantar otro B D perpendicular al primero; reuniendo los puntos A, B, C y D, se tendrá el cuadrado. Los ángulos serán rectos por tener sus vértices en la circunferencia y abrazar un diámetro, y los lados son iguales por ser hipotenusas de triángulos iguales.

Para inscribir el polígono de 8 lados, bastará dividir por mitad cada uno de los arcos A B, B C, etc., y tirar las cuerdas respectivas. Volviendo á dividir los arcos que resulten en dos partes iguales, se tendrán los vértices del polígono de 16 lados, y así sucesivamente se obtendrán los de 32, 64, etc., lados.

IV.—*Inscribir en un círculo un polígono regular de* 3, 6, 12, 24, *etc., lados.*

En cuanto al exágono regular, siendo el lado igual al radio, bastará llevar sobre la circunferencia cuerdas de una longitud igual al radio, para tener un exágono inscrito (497). Para inscribir un triángulo se tirarán cuerdas que abracen los vértices no contiguos del exágono.

Para determinar los puntos de los vértices del polígono de 12 lados, se dividirán por la mitad los arcos del exágono; y volviendo á dividir estos de nuevo, en dos partes iguales, se tendrán los puntos del polígono de 24 lados.

V,—*Inscribir á un exágono regular un círculo.*

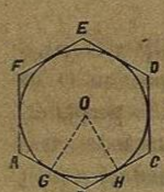

Figura 171.

(Figura 171). Levántese por el medio de A B una perpendicular G O, y por el medio de B C otra H O, y describiendo desde O como centro una circunferencia con el radio O G, se tendrá resuelto el problema (500).

VI.—*Hacer pasar por tres puntos A, B y C que no están en línea recta, una circunferencia de círculo.*

Figura 172.

(Figura 172). Tírense las rectas A C y B C por el medio de cada una de ellas, levántense las perpendiculares E D y F G, y si desde el punto de interseccion O, como centro, se traza una circunferencia con el radio O A, esta pasará por los tres puntos dados; porque todos los puntos de la perpendicular E D están equidistantes de A y de C (403—1°), y los puntos de G F lo están de C y de B; luego el punto O que pertenece á ambas perpendiculares, estará equidistante de A, B y C.

VII.—*Dado un círculo, determinar su centro.*

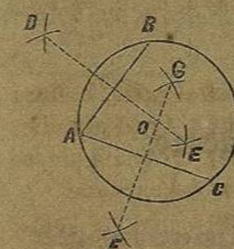

Figura 173.

Desde un punto A de la circunferencia (fig. 173) se tiran dos rectas A B y A C: se levantan por sus mitades las perpendiculares D E y F G, y el punto O de interseccion de estas perpendiculares será el centro del círculo, por estar equidistantes de A, B y C (403—1°).

VIII.—*Encontrar el centro de un arco de círculo A B.*

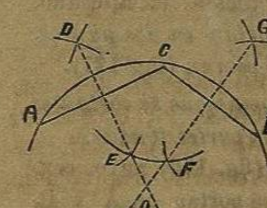

Figura 174.

(Figura 174). Tírense dos cuerdas A C y C B formando un ángulo: levántense perpendiculares por sus mitades, y el punto O de interseccion de las perpendiculares, será el centro del arco.

IX.—*Sobre una recta A B construir un arco de círculo capaz del ángulo dado* m.

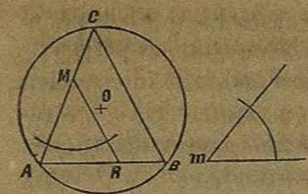

Figura 175.

Tírese la recta A C que forme con A B un ángulo cualquiera: en un punto M de esta recta constrúyase un ángulo A M R $= m$, y por el punto B tírese una recta B C paralela á M R. Haciendo pasar un círculo por los tres puntos A B y C se tendrá el arco de círculo capaz del ángulo dado m.

En efecto, el ángulo A C B, cuyo vértice está sobre la circunferencia, es igual á A M R por correspondientes; pero A M R$=m$ por construccion, luego cualquier ángulo inscrito, cuyos lados pasen por los extremos de A B, será igual á m.

INTERSECCION Y CONTACTO DE LOS CIRCULOS.

502.—Hemos visto (492) que por tres puntos que no están en línea recta siempre puede hacerse pasar un círculo, y como una vez fijado el centro y el radio queda determinada la posicion del círculo, resulta: 1° que por tres puntos no puede hacerse pasar más de un solo círculo: 2° que dos circunferencias que tienen tres puntos comunes, se confunden en todas sus partes: y 3° que dos circunferencias distintas pueden cortarse en dos puntos, tener un punto comun, ó no tocarse en ninguno.

Se llaman secantes dos circunferencias que se cortan en dos puntos, (fig. 176) *y tangentes las que solo tienen un punto comun* (fig. 177).

503.—*La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.*

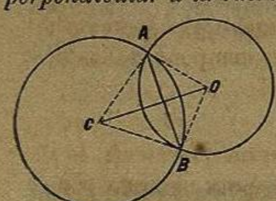

Figura 176.

Sean los dos círculos (fig. 176) cuyos centros son O y C, y que se cortan en A y B. Tirando la cuerda comun A B y los radios O A, O B, C A y C B, se tiene que la línea de los centros O C tiene el punto O equidistante de los extremos A y B de la cuerda y el punto C, centro del círculo mayor, tambien

está equidistante de A y de B; luego conforme á lo demostrado en el número 404, la línea de los centros será perpendicular á la cuerda comun y la dividirá en dos partes iguales.

504.—*Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto comun, este pertenece á la línea de los centros.*

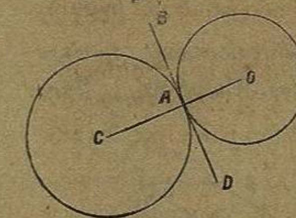

Figura 177.

Teniendo las dos circunferencias un solo punto comun A (fig. 177) si se tira una tangente B D á uno de los círculos por el punto de contacto tambien lo será al otro, y tirando los radios O A y C A tendremos (478) que el ángulo B A O será recto lo mismo que B A C; pero teniendo estos ángulos la posicion de adyacentes y valiendo juntos dos rectos, las líneas A O y A C formarán una sola recta (397), de lo que resulta que A estará en la línea C O.

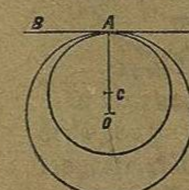

Figura 178.

Si los dos círculos se tocan interiormente (fig. 178), como no puede levantarse desde un mismo punto A más que una sola perpendicular á la tangente comun A B, los dos radios A O y A C tendrán que confundirse y el punto A quedará en la prolongacion de O C que es la línea de los centros.

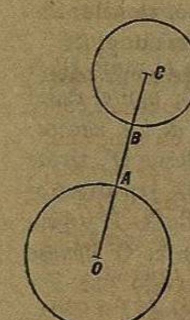

Figura 179.

505.—Dos círculos situados en un plano pueden tener cinco posiciones relativas diferentes: primero, estar uno fuera de otro, (fig. 179); segundo, ser tangentes exteriormente (fig. 177); tercero, ser secantes (fig. 176); cuarto, ser tangentes interiormente (fig. 178), y quinto estar uno dentro del otro (fig. 180).

En estos casos la línea de los centros goza de las siguientes propiedades.

[Fig. 179]. 1° *Cuando los dos círculos son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de los radios,* supuesto que O C se compone de los dos radios, más la parte A B.

[Fig. 177]. 2° *Cuando los dos círculos se tocan exteriormente, la línea de los centros es igual á la suma de los radios,* pues pasando por el punto A de contacto se tiene O C = O A + A C.

[Fig. 176]. 3° *Cuando los círculos se cortan, la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.* En efecto, considerando el triángulo C A O se tiene:

$$O\,C < C\,A + O\,A \ (425)$$
y
$$O\,C > C\,A - O\,A \ (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$

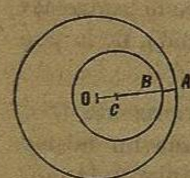
Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$
de donde $O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$
luego $O\,C < O\,A - C\,B$

Las recíprocas de estas proposiciones tambien son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados* (fig. 181).

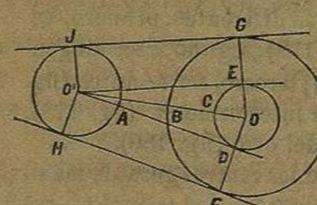
Figura 181.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C; con el radio O C *igual á la diferencia de los radios,* trácese el círculo E C D; desde O', tírese á este círculos la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente comun á los dos círculos.

Demostracion.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógramo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados* (figura 182).

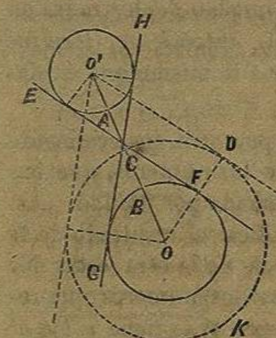
Figura 182.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios,* trácece el círculo C K D: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostracion.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad: