De una manera análoga se demostraria que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

C D : c d :: E D : e d :: E A : e a.

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono A se tiran diagonales y por un punto b de uno de los lados se tiran paralelas b c, c d y d e á los otros lados, el polígono A b c d e que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).

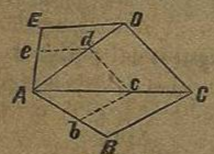


Figura 198.

La razon de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes y dispuestos de la misma manera. (521) Los triángulos son semejantes por ser equiángulos.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendremos:

A B+B C+C D etc. : a b+b c+c d etc. :: A B : a b

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

P : p :: A B : a b.

En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

A B : a b :: A C : a c

luego P : p :: A C : a c

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podria demostrarse de cualquiera otra línea que tuviese una posicion semejante ú homóloga en ámbos polígonos.

524.—Problemas de semejanzas de figuras.—I.—*Sobre la recta d construir un triángulo semejante á A B C.*

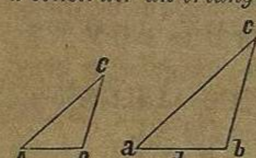


Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada h construir un polígono semejante á otro A B C D E.*

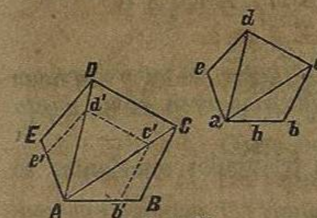


Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

Tambien puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C. en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaria formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiria el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extension se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas A B, A C, A D y A E que parten de un mismo punto A son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas B E y F G.*

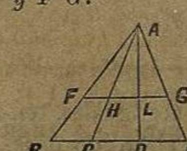


Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H

A C : A H :: A D : A L

A D : A L :: A E : A G

y como la última razon de cada proporcion es la primera de la siguiente, se tiene:

A B : A F :: A C : A H :: A D : A L :: A E : A G

que es lo que se tenia que demostrar.

526.—*Dos paralelas F G y B E quedan cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, A C, etc., que concurren en un punto A.* (Fig. 201).

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, se tiene:

A C : A H :: B C : F H
A C : A H :: C D : H L

luego B C : F H :: C D : H L (1)

A D : A L :: C D : H L
A D : A L :: D E : L G

luego C D : H L :: D E : L G (2)

comparando las proporciones (1) y (2) se tiene por último:

B C : F H :: C D : H L :: D E : L G

que es lo que se tenia que demostrar.

527.—*Recíprocamente siempre que dos paralelas A E y B F sean cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, C D, E F, prolongadas, estas concurrirán en un mismo punto* (fig. 202).

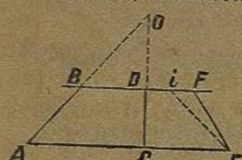


Figura 202.

Prolongando A B y C D concurrirán en el punto O, y si supusiéramos que E F prolongada no concurriera en el mismo punto O, deberia concurrir otra recta que partiendo de E pasara á la derecha ó á la izquierda de F como E i, y en tal concepto tendriamos:

Conforme á la hipótesis del teorema

A C : B D :: C E : D F

y por concurrir E i prolongada en O (526)

A C : B D :: C E : D i

Siendo los tres primeros términos de estas proporciones iguales, tendrá que serlo el cuarto, esto es, D i=D F lo que es un absurdo y prueba que E i no concurrirá en el punto O á ménos que coincida con E F.

528.—*En todo triángulo A B C (fig. 203) la bisectriz B O de un ángulo divide el lado opuesto A C en partes directamente proporcionales á los lados A B y B C del ángulo.*

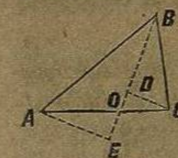


Figura 203.

Desde C y A bájense las perpendiculares C D y A E á la bisectriz B O prolongada, y resultarán los triángulos A B E y B C D semejantes, por ser ambos rectángulos y tener el ángulo A B E=C B D (515). Como en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales, tendrémos A B opuesto á E, es con su homólogo B C, opuesto al ángulo B D C, como A E opuesto á A B E es con su homólogo C D, opuesto á C B D.

A B : B C :: A E : C D.

Por otra parte, los triángulos A O E y O C D son semejantes por tener el ángulo E=C D O por rectos, y A O E=C O D por opuestos al vértice. Comparando los lados homólogos de estos triángulos, lo que se hace buscando los lados que están opuestos á los ángulos iguales, tendrémos:

A E : C D :: A O : C O

suprimiendo la razon comun entre esta y la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema

A B : B C :: A O : C O

529.—*La bisectriz del ángulo exterior C B E (fig. 204) de un triángulo corta el lado A C prolongado en un punto F, cuyas distancias á los puntos A y C son proporcionales á los lados del ángulo B, esto es, se tendrá*

F A : F C :: B A : B C

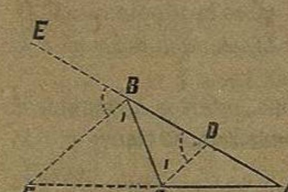


Figura 204.

Demostracion.—Si por C tiramos C D paralela á la bisectriz B F, se tiene (510 2°):

A F : F C :: A B : B D

pero el triángulo B C D es isósceles, por tener el ángulo B D C=E B F por correspondientes, y B C D=F B C por alternos internos, y como E B F=F B C por mitades de E B C; B D C=B C D, de lo que se infiere que B D=B C.

Sustituyendo en la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema:

$$AF : FC :: AB : BC$$

530.—*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán tres cosas:* 1° *los triángulos parciales serán semejantes al triángulo total, y semejantes entre sí:* 2° *la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa: y* 3° *cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento adyacente.*

Figura 205.

1° Para demostrar la primera parte del teorema, tenemos en la fig. 205 que el triángulo parcial A C D es semejante al total A B C porque tienen el ángulo C comun y ambos son rectángulos (515). El otro triángulo parcial A D B es semejante al total porque tienen el ángulo B comun y son ambos rectángulos. Siendo cada uno de los triángulos parciales semejantes al total, serán semejantes entre sí.

2° Para demostrar que la perpendicular A D es media proporcional entre los dos segmentos C D y B D de la hipotenusa, bastará comparar los lados homólogos, buscando como ántes lo hemos explicado (528), los opuestos á ángulos iguales, de los triángulos A C D y A D B y se tiene:

$$CD : AD :: AD : DB$$

3° Para demostrar la tercera parte del teorema basta comparar los lados homólogos de uno de los triángulos parciales con el total:

Comparando	A C D	$CD : AC :: AC : CB$
Idem	A D B	$BD : AB :: AB : CB$

C D es lo que se llama la proyeccion de A C sobre la hipotenusa C B.

531.—*El valor numérico del cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

Si en las dos últimas proporciones del teorema anterior formamos el producto de extremos y lo igualamos al de los medios, se tiene:

$$CD \times CB = AC^2$$
$$BD \times CB = AB^2$$

sumando estas ecuaciones y sacando á C B como factor comun, resulta:

$$(CD + BD)\ CB = AC^2 + AB^2$$

pero como en la figura: $CD + BD = CB$, sustituyendo obtendrémos

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

Debemos repetir que el producto de dos líneas, así como la segunda potencia de una recta, generalmente es el producto de los números que expresan las relaciones de estas líneas á la unidad de longitud.

532.—De aquí se infiere que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto;* pues despejando en la última ecuacion á AC^2 ó á AB^2 se tiene:

$$AC^2 = CB^2 - AB^2 \quad \text{y} \quad AB^2 = CB^2 - AC^2$$

533.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*

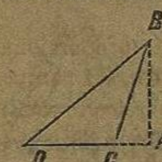


Figura 206.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 206) bajamos la perpendicular B A sobre el lado D C prolongado, C A será la proyeccion del lado B C sobre D C, y deberá tenerse

$$DB^2 = BC^2 \times DC^2 + 2\,DC \times CA$$

Demostracion.—Considerando el triángulo rectángulo A B D se tiene:

$$DB^2 = BA^2 + AD^2 \ldots . [1]$$

Determinarémos los valores de BA^2 y de AD^2, y en seguida los sustituirémos en esta ecuacion. El triángulo rectángulo B C A nos da

$$BA^2 = BC^2 - CA^2$$

y

$$AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2\,AC \times CD + CD^2$$

sustituyendo los valores de BA^2 y de AD^2 en la ecuacion [1] se obtiene:

$$DB^2 = BC^2 - CA^2 + AC^2 + 2\,AC \times CD + CD^2$$

reduciendo, resulta demostrado el teorema

$$DB^2 = BC^2 + DC^2 + 2\,AC \times CD$$

534.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado opuesto al ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*

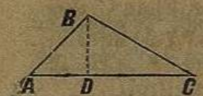


Figura 207.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 207) bajamos la perpendicular B D sobre A C, D C será la proyeccion del lado B C sobre A C, y se tendrá

$$A\,B^2 = B\,C^2 + A\,C^2 - 2\,A\,C \times D\,C$$

DEMOSTRACION.—En el triángulo rectángulo A B D se tiene

$$A\,B^2 = B\,D^2 + A\,D^2 \ldots. [1]$$

Determinarémos los valores de B D^2 y de A D^2 para sustituirlos en esta expresion. El triángulo rectángulo B D C da

$$B\,D^2 = B\,C^2 - D\,C^2$$

y

$$A\,D^2 = (A\,C - D\,C)^2 = A\,C^2 - 2\,A\,C \times D\,C + D\,C^2$$

sustituyendo los valores de B D^2 y A D^2 en la ecuacion (1) se obtiene

$$A\,B^2 = B\,C^2 - D\,C^2 + A\,C^2 - 2\,A\,C \times D\,C + D\,C^2$$

reduciendo

$$A\,B^2 = B\,C^2 + A\,C^2 - 2\,A\,C \times D\,C$$

con lo que queda demostrado el teorema.

535.—Así, pues, conforme á los dos últimos teoremas y al del número 531, el cuadrado de un lado de un triángulo es *mayor. igual ó menor* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, segun que el ángulo opuesto es *obtuso, recto ó agudo.* Si representamos por a, b y c los lados del triángulo, y por p la proyeccion del lado c sobre b tendrémos:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,p$ cuando A es *obtuso.*
$a^2 = b^2 + c^2$,, A es *recto.*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,p$,, A es *agudo.*

Estas fórmulas servirán para calcular el valor de un lado, ó para determinar la especie del ángulo opuesto, cuando se conocen las otras cantidades que entran en ellas.

536.—PROBLEMAS DE LINEAS PROPORCIONALES.—I. *Dividir una recta A B* (fig. 208) *en partes proporcionales á las de otra dada* m p.

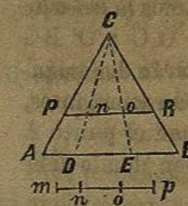


Figura 208.

Constrúyase sobre A B un triángulo equilátero A C B; desde el vértice C llévese una línea C P= m p, y sobre ella constrúyase el triángulo equilátero C P R. Siendo P R=m p sobre ella se llevarán las partes P n, n o, y o R respectivamente iguales á mn, no y o p, y tirando desde C las rectas Cn y Co, prolongadas determinarán sobre A B partes proporcionales á las de la recta dada (526).

II. *Dividir la recta A B en 5 partes iguales* (fig. 209).

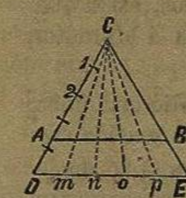


Figura 209.

Sobre A B constrúyase el triángulo equilátero A B C; desde C y sobre C A llévense cinco partes iguales, prolongando este lado si fuere necesario; tómese C E=C D y tirando D E se tendrá el triángulo equilátero C D E; llévense de D á E cinco partes iguales á las tomadas sobre C D y reuniendo los puntos de division m, n, o, p con C, quedará dividida A B en cinco partes iguales (526).

III. *Dividir una recta A B* (fig. 210) *en partes proporcionales á dos rectas dadas* m y n.

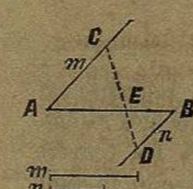


Figura 210.

Por el punto A tírese la recta A C indefinida, y por B la paralela B D; sobre la primera tómese A C=m y sobre la segunda B D=n; reúnase C con D y la recta A B quedará dividida en E en partes A E y B E proporcionales á *m* y *n*.

En efecto, los triángulos A E C y B E D son semejantes por tener iguales los ángulos A y B por alternos internos, y los en E por opuestos al vértice [515]; luego sus lados homólogos serán proporcionales.

A C : B D :: A E : E B

sustituyendo

m : n :: A E : E B

IV.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados.*

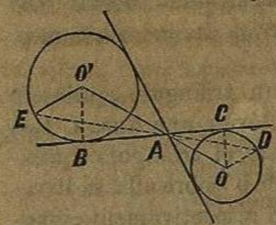


Figura 211.

Si suponemos el problema resuelto por medio de la recta B C [fig. 211], tangente comun á los dos círculos, y tiramos la línea de los centros O O' y los radios O C y O' B á los puntos de contacto, resultarán dos triángulos A O C y A O' B que serán semejantes, y nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por donde debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos A O C y A O' B son semejantes por ser rectángulos y tener iguales los ángulos en A por opuestos al vértice. Siendo semejantes, sus lados homólogos serán proporcionales; luego

$$OC : O'B :: OA : O'A$$

Esta proporcion nos indica, que para determinar el punto A por donde debe pasar la tangente interior comun á los dos círculos, basta dividir la línea de los centros O O' en partes proporcionales á los radios, lo cual nos sirve de fundamento á la siguiente

Construccion.—Tírese en uno de los círculos un radio cualquiera O D, y en el otro círculo un radio que le sea paralelo en sentido contrario O' E, y tirando la recta E D ésta dividirá la línea O O' de los centros en partes proporcionales á los radios, supuesto que comparando los triángulos semejantes A O D y A O' E se tiene

$$OD : O'E :: OA : O'A$$

Si desde el punto así determinado, se tira una tangente á uno de los círculos, ésta será tambien tangente al otro.

V.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados.*

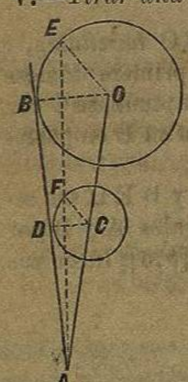


Figura 212.

Si por medio de la B D (fig. 212), tangente exterior comun á los dos círculos, suponemos resuelto el problema, y tiramos la línea de los centros O C y los radios O B y C D, prolongando la tangente y la línea de los centros resultarán los triángulos semejantes O B A y C D A, que nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por el que debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos O B A y C D A son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo en A comun. Siendo semejantes sus lados homólogos, serán proporcionales, luego

$$OB : CD :: OA : CA$$

dividiendo

$$OB - CD : CD :: OC : CA$$

Esta proporcion nos indica que el punto donde concurren la tangente exterior con la línea de los centros, debe ser tal, que pueda establecerse la siguiente proporcion: la diferencia de los radios es al radio menor, como la línea de los centros es á su prolongacion, en la cual solo el cuarto término es desconocido. Esta propiedad nos servirá de fundamento para la siguiente

Construccion.—Tírese un radio cualquiera O E, y por el punto C otro en el mismo sentido que le sea paralelo C F, reuniendo E con F y prolongando E F hasta su interseccion con la línea de los centros se determinará el punto A, desde el cual, si se tira una tangente exterior á uno de los círculos, lo será tambien al otro.

En efecto, se tiene en los triángulos O B A y C D A

$$OB : CD :: OA : CA$$

dividiendo

$$OB - CD : CD :: OC : CA \ldots . [1]$$

y en los triángulos O E A y C F A

$$OE : CF :: OA : CA$$

dividiendo

$$OE - CF : CF :: OC : CA \ldots . [2]$$

siendo iguales los tres primeros términos de las proporciones [1] y [2] tendrá que serlo el cuarto.

VI.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 213) *que no pueden prolongarse, tirar por un punto O una recta que pase por su punto de concurso.*

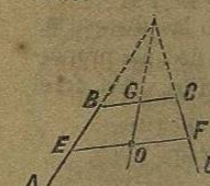


Figura 213.

Por el punto O tírese una recta cualquiera E F, en seguida trácese la paralela B C, y dividiendo esta recta en partes proporcionales á E O y O F, se determinará el punto G (536 III). La recta O G pasará por el punto desconocido de concurso [527].

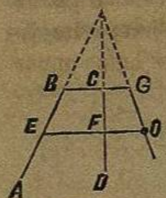


Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida [527].

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

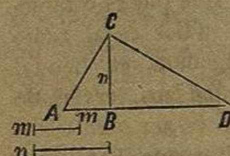


Figura 215.

Sobre A B=m levántese la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene [530—2°]

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior O* (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

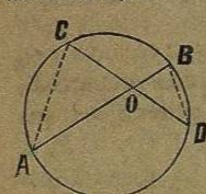


Figura 216.

Se dice que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporcion, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe tener

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y

B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razon. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se tiene:

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debia demostrar.

538.—*La ordenada C D* (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera C, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

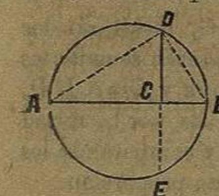


Figura 217.

Esto es, se tiene:

A C : C D :: C D : C B

Como se habrá comprendido, se llama *ordenada* la perpendicular C D levantada en un punto del diámetro y que termina en la circunferencia.

Prolongada esta ordenada, el teorema anterior conduce á la siguiente proporcion:

A C : C D :: C E : C B

pero como C D=C E (477)

resulta A C : C D :: C D : C B

539.—Si se tiran las cuerdas A D y B D, como el ángulo A D B es recto (485); resulta por el teorema anterior en el triángulo rectángulo que la perpendicular C D es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. Ademas [530—3°] en el mismo triángulo se tiene:

A B : A D :: A D : A C

luego *toda cuerda tirada por el extremo del diámetro es media proporcional entre todo el diámetro, y su proyeccion sobre el mismo diámetro.*

540.—*Dos secantes A B y A C* (fig. 218) *tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A D y A E.*

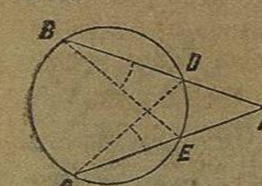


Figura 218.

Esto es, debiendo formar una secante y su parte externa los extremos de una proporcion, y la otra secante y su parte externa los medios, debe demostrarse que

A B : A C :: A E : A D

para esto tiremos las cuerdas B E y D C, y resultarán formados los triángulos A B E y A C D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo en A comun y B=C por tener la misma medida, $\frac{\text{E D}}{2}$; buscando y comparando los lados homólogos de estos triángulos, llegaremos á la proporcion

A B : A C :: A E : A D

541.—*Si desde un mismo punto A* (fig. 219) *se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente A B será media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

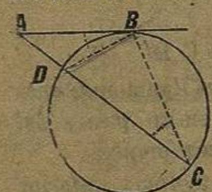


Figura 219.

Tirando las cuerdas B D y B C, resultarán los triángulos A B C y A B D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo A comun y C=A B D, supuesto que están medidos ámbos por la mitad del mismo arco B D. Buscando y comparando los lados homólogos, obtendrémos esta proporcion:

A C : A B :: A B : A D

que es lo que se tenia que demostrar.

542.—*Si en un punto B* (fig. 220) *de la circunferencia se tira una tangente igual al diámetro, y por el extremo A se traza una secante que pase por el centro del círculo, la secante quedará dividida en media y extrema razon.*

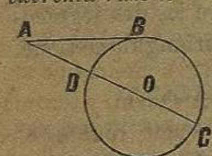


Figura 220.

Se dice que una recta A C queda dividida en media y extrema razon, cuando la parte mayor D C es media proporcional entre toda la recta A C y su parte menor A D.

Conforme á la hipótesis del teorema, tenemos A B igual á D C, y segun el teorema anterior

A C : A B :: A B : A D

sustituyendo

A C : C D :: C D : A D

que es lo que se debia demostrar.

543.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, inscritos ó circunscritos en círculos diferentes, son proporcionales á los radios de los círculos.*

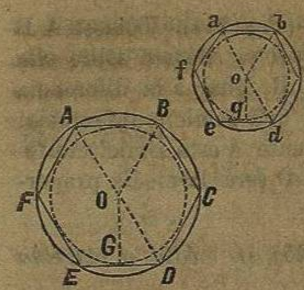


Figura 221.

(Fig. 221). Sean A B C D...... y a b c d.... los polígonos que considerarémos primero inscritos en los círculos.

Por ser polígonos semejantes (519) tendrémos (523):

A B C D.... : a b c d.... :: A B : ab

Tirando los radios A O y O B, o a y o b resultarán los triángulos O A B y o a b que serán semejantes por ser equiángulos, luego

A B : a b :: O A : o a

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene:

A B C D.... : a b c d.... :: O A : o a

Considerémos ahora los polígonos circunscritos. Tracemos los rádios rectos y oblícuos O G y O D, o g y o d, y resultarán los triángulos O G D y o g d, que serán semejantes por equiángulos, por lo que

O G : o g :: O D : o d

Antes teniamos

A B C D.... : a b c d.... :: O D : o d

luego A B C D.... : a b c d.... :: O G : o g

544.—Problemas de líneas proporcionales en el círculo.—I. *Construir una média proporcional entre dos líneas dadas:* m, n.

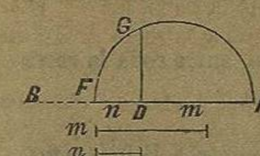
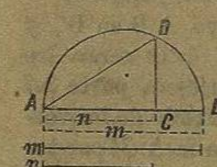


Figura 222.

1ª *Construccion.*—(Fig. 222). Sobre una recta indefinida A B se toman A D=m, y á continuacion D F=n; sobre A F como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular D G, la cual será la média porporcional entre A D y D F (538), que hemos tomado respectivamente iguales á m y n.



223.

2ª *Construccion.*—(Fig. 223). Tómese A B igual á la recta mayor m, sobre esta recta como diámetro trácese una semicircunferencia, llévese sobre el diámetro A B la parte A C=n, levántese en el punto C la perpendicular C D, y tirando la cuerda A D, ésta será la média proporcional pedida (539).

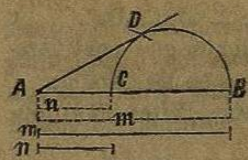


Figura 224.

3ª *Construccion.*—(Fig. 224). Tómese A B igual á la recta mayor m, llévese sobre ella A C = n, y sobre C B igual á la diferencia entre m y n trácese una semicircunferencia. Si tiramos A D tangente á esta semicircunferencia, esta recta A D será la media proporcional pedida (541).

II.—*Dividir una línea dada* A B (fig. 225) *en média y extrema razon.*

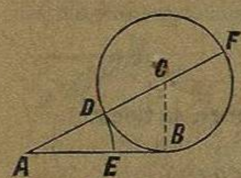


Figura 225.

Construccion.—Por el extremo B de la recta se levantará una perpendicular C B$=\frac{AB}{2}$; haciendo centro en C y con el rádio B C trácese una circunferencia de círculo; tírese la secante A F que pase por el centro del círculo, y si desde A como centro con el rádio A D se describe el arco D E, la recta A B quedará dividida en E en média y extrema razon.

Demostracion.—Habiendo tomado el rádio C B$=\frac{AB}{2}$, la tangente A B será igual al diámetro, y además es média proporcional entre A F y A D (541), por lo cual tendrémos

	A F : A B :: A B : A D
sustituyendo	A F : D F :: A B : A E
Dividiendo	A F–D F : D F :: A B–A E : A E
sustituyendo	A E : A B :: E B : A E
invirtiendo	A B : A E :: A E : E B

luego la parte mayor A E será média proporcional entre toda la recta y su parte menor.

III.—*Estando inscrito al círculo un polígono regular* A B C D, (fig. 226) *inscribir en el mismo círculo otro polígono de un número doble de lados, y encontrar el valor de uno de los lados del segundo polígono.*

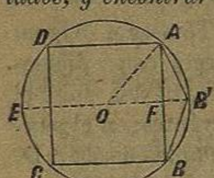


Figura 226.

Dividamos por la mitad el arco A B en B', y tiremos las cuerdas A B' y B B' éstas serán los lados del polígono pedido. La primera parte del problema quedará resuelta, si partiendo de los vértices del polígono llevamos la cuerda A B' por toda la circunferencia. (501—III y IV).

Para determinar el valor del lado A B' en funcion de A B y del rádio del círculo, se tiene (539):

$$AB'^2 = B'E \times B'F \ldots (1)$$

por otra parte

$$B'F = B'O - OF = B'O - \sqrt{AO^2 - AF^2}\ (532)$$

y como $AF = \frac{AB}{2}$

$$B'F = B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1), se tiene:

$$AB'^2 = B'E\left(B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}\right)$$

si hacemos A B = a, A O = r, y A B' = x, sustituyendo se obtiene:

$$x^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}$$

y extrayendo raíz

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} \ldots (2)$$

cuya fórmula nos dará el valor de x.

En el caso de que el rádio sea igual á la unidad, la fórmula (2) se convertirá en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

ó á fin de hacerla más propia para ser calculable por logaritmos (251—III).

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{(2+a)(2-a)}} \ldots (3)$$

las fórmulas (2) y (3) nos servirán para determinar el valor del lado del polígono regular de un número doble de lados de otro conocido, lo cual equivale á resolver este problema: *dada la cuerda* a *de un arco, determinar la cuerda* x *del arco de su mitad.*

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

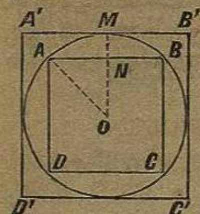


Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M=O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: OM : ON$$

de donde

$$P = \frac{rp}{ON}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$ON = \sqrt{OA^2 - AN^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P = \frac{rp}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{rp}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2rp}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

esto es (251—III) $P = \frac{2rp}{\sqrt{(2r+a)\ (2r-a)}}$ ......[1]

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2p}{\sqrt{(2+a)\ (2-a)}} \text{......[2]}$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

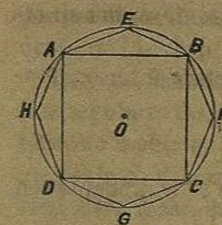


Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C...... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo $AB < AE + EB$ [425], $BC < BF + FC$, $CD < CG + GD$ etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior infeririamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los polígonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.