IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

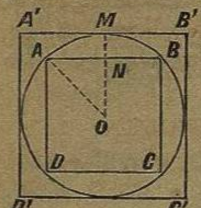

Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M=O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: OM : ON$$

de donde
$$P=\frac{rp}{ON}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$ON=\sqrt{OA^2-AN^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P=\frac{rp}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{rp}{\sqrt{\frac{4r^2-a^2}{4}}}=\frac{2rp}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

esto es (251—III) $$P=\frac{2rp}{\sqrt{(2r+a)\ (2r-a)}}\cdots\cdots[1]$$

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P=\frac{2p}{\sqrt{(2+a)\ (2-a)}}\cdots\cdots[2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

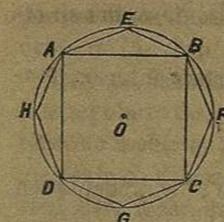

Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C...... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo $AB < AE + EB$ [425], $BC < BF + FC$, $CD < CG + GD$ etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior infeririamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los polígonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.

546.—*Las circunferencias de los círculos son proporcionales á sus rádios y á sus diámetros.*

Como los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus rádios, [543] y los círculos pueden considerarse como polígonos regulares de un número infinito de lados, si llamamos C, y C' dos circunferencias y r y r' sus rádios respectivos tendrémos:

$$C : C' :: r : r'$$

multiplicando por 2 los términos de la segunda razon

$$C : C' :: 2\ r : 2\ r'$$

que es lo que se debia demostrar.

547.—*La razon de la circunferencia al diámetro, es la misma en todos los círculos.*

Alternando medios en la última proporcion del párrafo anterior, tendrémos:

$$C : 2\ r :: C' : 2\ r'$$

en otro círculo cuya circunferencia sea C'' y su radio r'' comparado con el primero se tendria igualmente:

$$C : 2\ r :: C'' : 2\ r''$$

luego $C : 2\ r :: C' : 2\ r' :: C'' : 2\ r''$

y en general $\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'} = \frac{C''}{2r''} = \frac{C'''}{2r'''}$

esta razon constante que existe en cualquier círculo entre la circunferencia y su diámetro se representa comunmente con la letra griega π, cuyo valor numérico vamos á ocuparnos de determinar.

548.—*Determinacion del valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro.*

El procedimiento que hemos emplado para determinar la relacion de magnitud entre dos líneas rectas, ó entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales [482], como se ha visto se funda en la propiedad de poder descomponer las magnitudes que se comparaban en partes que podian sobreponerse; pero cuando comparamos una curva con una recta, ó arcos de círculos de rádios diferentes, como no es dable sobreponer los elementos de que constan estas magnitudes, tenemos que servirnos de un método indirecto para determinar con más ó ménos exactitud la relacion que entre ellas existe.

Acabamos de ver [545] que el perímetro de un polígono regular inscrito al círculo, es menor que la circunferencia, pero que miéntras ma-

yor es el número de lados del polígono tanto mas se acerca al círculo. Por tanto, si en un círculo cuyo rádio sea la unidad, inscribimos un polígono y dividimos la longitud de su perímetro por el diámetro del círculo, obtendrémos un valor tanto más aproximado á $\pi = \frac{C}{2r}$ cuanto mayor sea el número de lados del polígono, pero siempre menor que π porque el perímetro del polígono es menor que el verdadero antecedente de la razon $\frac{C}{2r}$. Por otra parte, como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro de un polígono regular circunscrito, si determinamos el valor de este perímetro y lo dividimos por el diámetro del círculo, obtendrémos un cuociente tanto más aproximado al valor de π, cuanto mayor sea el número de lados, pero siempre algo mayor que π, porque el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el antecedente de la razon $\frac{C}{2r}$.

Si, pues, inscribimos y circunscribimos al mismo círculo dos polígonos regulares de un gran número de lados y semejantes, y tomamos el término medio entre la razon que existe entre cada uno de estos perímetros y el diámetro, este término medio se aproximará mucho á la verdadera razon de la circunferencia á su diámetro.

Fijadas así en general las bases de este procedimiento, para simplificar el cálculo, haremos las siguientes consideraciones. Supondrémos que el rádio del círculo es igual á la unidad. Además, como la misma razon hay entre todo el perímetro y el diámetro, que entre el semiperímetro y el rádio, siendo el rádio igual á 1 bastará calcular el valor del semiperímetro para tener en cada caso la razon del perímetro al diámetro. Partiendo del cuadrado inscrito calcularémos sucesivamente haciendo uso de la fórmula [3] del problema III del número 544, el valor del semiperímetro del polígono de 8 lados, de 16, 32, etc., lo que nos dará una razon algo aproximada de la circunferencia al diámetro, pero menor que la verdadera. En seguida calcularémos el semiperímetro del polígono circunscrito del mismo número de lados que el inscrito al fin, lo que nos dará un valor de la razon de la circunferencia al diámetro mayor que la verdadera; tomando el término medio entre estos valores se tendrá el que se busca con mucha aproximacion.

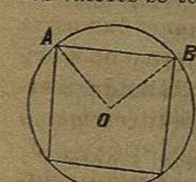

Figura 229.

Conforme á lo expuesto, si tomamos como base del procedimiento el cuadrado inscrito [fig. 229] y suponemos el rádio =1, en el triángulo rectángulo A O B el lado.

$$A\,B = \sqrt{A\,O^2 + O\,B^2} = \sqrt{2}$$

y extrayendo esta raíz

$$A\,B = 1‘4142135$$

Conocido este lado deberémos multiplicarlo por 2, mitad del número de lados del cuadrado, á fin de obtener el semiperímetro del cuadrado $= 2\sqrt{2} = 2‘8284271$.

Este será el primer valor, aunque muy poco aproximado de π.

Para obtener otro, sustituirémos en la fórmula.

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \ldots . \; [1]$$

del problema III del número 544 por a su valor $\sqrt{2}$, y tendremos para el lado del octágono regular

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

y multiplicado por 4, mitad del número de lados, se tendrá:

$$\text{semiperímetro del octágono} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3‘0614674$$

segundo valor aproximado de π.

Continuando el mismo procedimiento y sustituyendo en la fórmula citada, se encontraria sucesivamente el semiperímetro del polígono

$$\text{de 16 lados} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\text{de 32 lados} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\text{de 64 lados} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

Es fácil en vista de estos resultados inferir la ley del modo de formacion de los siguientes, sin necesidad de sustituir en la fórmula [1] para obtener el semiperímetro de un polígono que conste de un número conocido de lados. Los resultados son los siguientes:

Núm. de lados.	Semiperímetros.
4	2‘828 4271
8	3‘061 4674
16	3‘121 4451
32	3‘136 5485
64	3‘140 3311
128	3‘141 2772
256	3‘141 5138
512	3‘141 5729
1024	3‘141 5877
2048	3‘141 5914
4096	3‘141 5925

Conocido el valor del semiperímetro del polígono de 4096 lados inscrito al círculo, calcularémos el del circunscrito haciendo uso de la fórmula [2] del problema IV del párrafo 544.

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)(2-a)}}$$

Si en ella sustituimos los valores correspondientes y efectuamos el cálculo, se tiene:

semiperímetro de 4096 lados circunscrito $= 3‘1415927$

Idem de 4096 lados inscrito $= 3‘1415925$

Suma $= 6‘2831852$

El término medio será la mitad $= 3‘1415926$

luego el valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro aproximado hasta las diez millonésimas, será:

$$\frac{C}{2\,r} = \pi = 3‘1415926$$

En la práctica suele hacerse uso de otros dos valores aproximados de π.

El primero debido á Arquímedes es

$$\pi = \tfrac{22}{7}$$

y el 2º á Pedro Metius, es:

$$\pi = \tfrac{355}{113}$$

que es mucho más aproximado; nosotros, sin embargo, generalmente nos servirémos del de $\pi = 3‘141593$.

549.—*Valor de la circunferencia en funcion del rádio ó del diámetro.*

Hemos visto que llamando π el valor numérico 3‘141593 se tiene

$$\frac{C}{2\,r} = \pi$$

de donde $\quad C = 2\,\pi\,r \ldots . [1]$

y como el diámetro $d = 2\,r$ sustituyendo resulta:

$$C = \pi\,d \ldots . \; [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] nos sirven para calcular la circunferencia de un círculo conocido, su rádio ó su diámetro, y recíprocamente.

550.—Problemas de la circunferencia.—I.—*Determinar la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo rádio es 25 metros.*

Sustituyendo en la fórmula

$$C = 2\pi r$$

se tiene $\quad C = 2 \times 3'141593 \times 25 = 157^{\text{m}}'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $339^{\text{m}}'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $\quad C = \pi d$

despejaremos á $\quad d = \frac{C}{\pi}$

sustituyendo $\quad d = \frac{339'292044}{3'141593} = 108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de 48° en un círculo cuyo rádio es de 10 metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\pi r$$

es $\quad C = 2 \times 3'141593 \times 10 = 62^{\text{m}}'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360° : 48° :: 62^{\text{m}}'83186 : x = 8^{\text{m}}'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de 52 metros y cuyo rádio es igual á 15.*

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\pi r$$

sustituyendo $\quad C = 2 \times 3'141593 \times 15 = 124^{\text{m}}'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$124^{\text{m}}'247790 : 52^{\text{m}} :: 360° : x = 150° - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de 60° en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio =1. La circunferencia será

$$C = 2\pi r$$

sustituyendo $\quad C = 2 \times 3'141593 \times 1 = 6^{\text{m}}'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360° : 60° :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

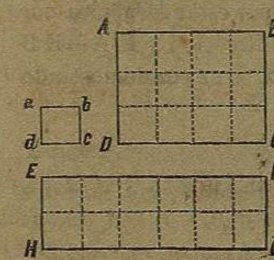

Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas