$$C = 2\,\pi\,r$$

se tiene $C=2\times3'141593\times25=\overset{m}{157}'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $\overset{m}{339}'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $C = \pi\,d$

despejaremos á $d=\dfrac{C}{\pi}$

sustituyendo $d=\dfrac{339'292044}{3'141593}=108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de* 48° *en un círculo cuyo rádio es de* 10 *metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\,\pi\,r$$

es $C = 2 \times 3'141593 \times 10 = \overset{m}{62}'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360^\circ : 48^\circ :: \overset{m}{62}'83186 : x = \overset{m}{8}'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de* 52 *metros y cuyo rádio es igual á* 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 15 = \overset{m}{124}'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$\overset{m}{124}'247790 : \overset{m}{52} :: 360^\circ : x = 150^\circ - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de* 60° *en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio =1. La circunferencia será

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 1 = \overset{m}{6}'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360^\circ : 60^\circ :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

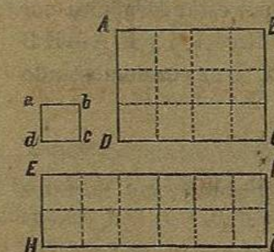

Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas coinciden en todos sus puntos. Los rectángulos A B C D y E F G H son equivalentes porque tienen la misma superficie; pero, como se ve, no son iguales.

552.— Para determinar las áreas es de un uso frecuente escoger en los triángulos, y en los paralelógramos uno de sus lados como *base* de la figura, y se llama altura la perpendicular bajada sobre este lado del vértice ó del lado opuesto.

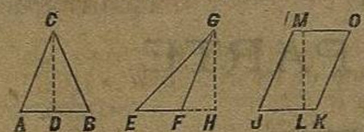

Figura 231.

Así (fig. 231) tomando A B por *base la altura* del triángulo es C D. En el triángulo E F G, considerando E F como base, la altura es G H, la cual, como se ve, cae sobre la prolongacion de la base. Por último, en el paralelógramo J O, la base es J K y la altura M L, la cual puede bajarse desde cualquier punto del lado opuesto á la base.

553.—*Un paralelógramo A B C D* [fig. 232] *y un rectángulo A B E F que tienen la misma base A B é igual altura, son equivalentes.*

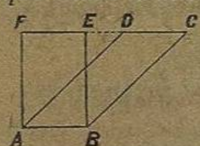

Figura 232.

Siendo la altura del paralelógramo igual á la perpendicular E B, si prolongamos F E pasará por D C, y ejecutándolo resultarán dos triángulos A F D y B E C que serán iguales, [385] por tener el ángulo F A D = E B C, por estar formados por lados paralelos, y tener sus vértices en la misma direccion y F A=E B y A D=B C por lados opuestos de paralelógramo. Una vez demostrado

que el triángulo A F D=B E C

si sucesivamente restamos del trapecio A B C F cada uno de estos triángulos tendremos:

A B C F—A F D=A B C E—B E C

luego A B C D=A B E F en superficie, que es lo que se queria demostrar.

554.—*Dos paralelógramos de igual base é igual altura son equivalentes*, por ser cada uno de ellos equivalente á un rectángulo de la misma base y altura.

555.—*Un triángulo cualquiera A B C* [fig. 233] *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.*

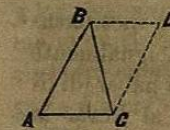

Figura 233.

Considerando A C como la base del triángulo, por el vértice B del ángulo opuesto tírese una paralela B D á A C, y por C una paralela C D á A B, resultará el paralelógramo A B D C de la misma base y altura que el triángulo; pero como los triángulos A B C y B C D son iguales (386), por tener B C comun, B D=A C y A B=C D por lados opuestos de paralelógramo, se infiere que el triángulo A B C será la mitad del paralelógramo que tiene la misma báse y altura que él.

556.—*Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes;* porque cada uno de los triángulos es la mitad de paralelógramos equivalentes entre sí.

557.—*Dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

Puede suceder que las alturas sean *conmensurables* ó *inconmensurables* entre sí.

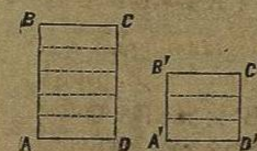

Figura 234

1º Si (fig. 234) se tienen los rectángulos A B C D y A' B' C' D' de bases iguales, A D =A' D' y cuyas alturas A B y A' B' sean *conmensurables*, de modo que, por ejemplo, dividiendo A' B' en tres partes iguales, cada una de éstas puede llevarse sobre A B cinco veces, en este supuesto resultará

A' B' : A B :: 3 : 5

Si por los puntos de division tiramos paralelas respectivamente á las bases A' D' y á A D quedará dividido el rectángulo A' C' en tres rectángulos, y el rectángulo A C en cinco rectángulos iguales todos entre sí por tener la misma base y altura, luego

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: 3 : 5

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene por último:

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: A' B' : A B

que es lo que se tenia que demostrar.

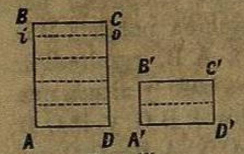

Figura 235.

2º Si las alturas A B y A' B' son *inconmensurables* (fig. 235) el teorema será igualmente cierto. Supongamos que despues de haber dividido A' B' en dos partes iguales, al llevar la magnitud de estas partes sobre A B resulte esta altura dividida en cuatro partes de A á i, quedando una resta i B, la que forzosamente será menor que una de las divisiones. Tirando por los puntos de division paralelas, quedarán divididos el rectángulo A' C' en dos rectángulos, y el rectángulo A C en cuatro rectángulos iguales entre sí, mas otro i C menor que los demas.

Considerando las porciones conmensurables, tendrémos conforme á lo que acabamos de demostrar:

$$\text{rectángulo } A'C' : \text{rectángulo } A\,o :: A'B' : A\,i$$

Como rect. A o=rect. A C—rect. i C, y A i=A B—B i sustituyendo se tiene:

$$\text{rect. } A'C' : \text{rect. } AC - \text{rect } iC :: A'B' : AB - Bi$$

multiplicando entre sí los medios y los extremos

$$AB \times \text{rect. } A'C' - Bi \times \text{rect. } A'C' = A'B' \times \text{rect. } AC - A'B' \times \text{rect. } iC$$

trasladando:

$$AB \times \text{rect. } A'C' - A'B' \times \text{rect. } AC = Bi \times \text{rect. } A'C' - A'B' \times \text{rect. } iC$$

Una vez establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que A B × rectángulo A' C' no puede ser desigual á A' B' × rectángulo A C. Si lo fueran, habria entre estos dos productos, cuyos factores todos son constantes, una diferencia d fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se divida A' B' y se tendria:

$$AB \times \text{rect. } A'C' - A'B' \times \text{rect. } AC = d.$$

y por lo mismo B i × rect. A' C' — A' B' × rect. i C = d.

Si en vez de dividir A' B' en *dos* partes iguales, la dividiéramos en 20 ó en 2,000, y llevando la magnitud de estas partes sobre A B, por los puntos de division tiráramos paralelas, resultaria que la recta B i y el rectángulo i C podrian hacerse sucesivamente más y más pequeños,

y los productos de que son factores podrian ir disminuyendo tanto como se quisiera. Así es, que siendo d constante por expresar la diferencia entre cantidades fijas: A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, llegaria á tenerse, aumentando el número de divisiones de A' B', en la ecuacion:

$$Bi \times \text{rect. } A'C' - A'B' \times \text{rect. } iC = d$$

pudiendo ser $Bi < \frac{A'B'}{2}$, $Bi < \frac{A'B'}{2{,}000}$ ó una fraccion tan pequeña como se quiera, llegaria á tenerse B i × rect. A' C' < d; pero como no puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podrémos suponer desiguales los productos A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, y siendo iguales se tendrá la proporcion

$$\text{rect. } A'C' : \text{rect. } AC :: A'B' : AB$$

que es lo que se debia demostrar.

558.—Como en un rectángulo puede tomarse la altura como base y ésta por altura, se infiere que *las áreas de los rectángulos que tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases.*

559.—*Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

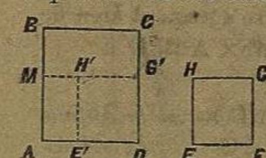

Figura 236.

Sean A B C D y E F G H (fig. 236) dos rectángulos cualesquiera. Si suponemos sobrepuesto el rectángulo E G de manera que coincida el ángulo recto F con el D, tomará la posicion E' D G' H'. Si prolongamos el lado G' H' hasta M, se formará el paralelógramo A D G' M de la misma base que A C y de igual altura que D H'. Como el rectángulo D M y el A C tienen la misma base A D, serán proporcionales á sus alturas, y por tanto

$$\text{rect. } AC : \text{rect. } DM :: AB : DG' \ldots [m]$$

Los rectángulos D M y D H' tienen la misma altura D G', luego serán proporcionales á sus bases, como lo expresa la siguiente proporcion:

$$\text{rect. } DM : \text{rect. } DH' :: AD : DE' \ldots [n]$$

multiplicando ordenadamente las proporciones [m] y [n], y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$\text{rect. } AC : \text{rect. } DH' :: AD \times AB : DE' \times DG'$$

sustituyendo

$$\text{rect. } AC : \text{rect. } FH :: AD \times AB : FE \times FG$$

que es lo que se tenia que demostrar.

560.—Problemas de figuras equivalentes.—I.—*Trasformar el polígono A B C D E* (fig. 237) *en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

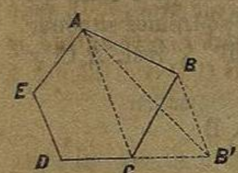

Figura 237.

Construccion.—Tírese la diagonal A C: por el vértice B del triángulo A B C que tiene esta diagonal por base, tírese B B' paralela á A C; si despues prolongamos el lado D C hasta su interseccion en B', con la paralela B B' y trazamos la recta A B', se tendrá el polígono A B' D E de un lado menos y equivalente á A B C D E.

Demostracion.—Tomando A C como base de los triángulos A C B y A C B', por estar los vértices opuestos B y B' sobre la misma paralela, tendrán sus alturas iguales; luego (556) los triángulos A C B y A C B' serán equivalentes. Si á cada uno de ellos se agrega el área de la figura A C D E, resultará A B C D E equivalente á A B' D E.

II.—*Trasformar un polígono A B C D E* (fig. 238) *en un triángulo equivalente.*

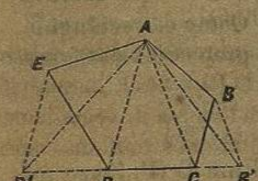

Figura 238.

Ejecutando la construccion del problema anterior, trasformarémos el pentágono A B C D E en el cuadrilátero equivalente A B' D E. En seguida, tirando la diagonal A D, la paralela E D' y la recta A D', trasformarémos el cuadrilátero A B' D E en el triángulo A B' D', el cual resolverá el problema, supuesto que es equivalente al cuadrilátero y éste al pentágono. Del mismo modo podrá reducirse á triángulo un polígono de mayor número de lados.

III.—*Trasformar un polígono A B C D* (fig. 239) *en otro equivalente que tenga un lado más.*

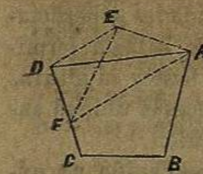

Figura 239.

Construccion.—Desde el vértice A tírese una recta indefinida A E que quede fuera del polígono y otra A F que toque el lado opuesto D C en un punto cualquiera F: por el vértice D del triángulo A F D tírese D E paralela á A F, y reuniendo los puntos E y F se tendrá el polígono A B C F E pedido.

Demostracion.—Los triángulos A F D y A F E tienen la misma base A F, y estando los vértices opuestos D y E sobre una paralela, tendrán alturas iguales, y por lo mismo serán equivalentes (556). Si á cada uno de los triángulos equivalentes A F D y A F E se agrega la parte comun A F C B resultará el polígono A B C D equivalente á A B C F E que tiene un lado más.

VALUACION DE LAS SUPERFICIES.

561.—Hemos dicho que para medir ó valuar la área de una figura, es necesario determinar el número de veces que contiene la área de otra figura escogida como término de comparacion, y que la unidad de superficie es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

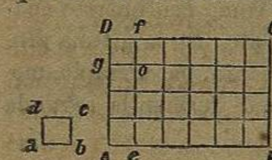

Figura 240.

Así, por ejemplo, si queremos medir la área del rectángulo A B C D (fig. 240), la compararémos á la del cuadrado a b c d, tomado como unidad, y determinarémos cuántas veces la unidad lineal a b, lado del cuadrado, está contenida en la base A B del rectángulo (6 veces en el caso que consideramos). Si por los puntos de division tiramos rectas perpendiculares á la base, resultarán 6 bandas ó rectángulos cuya base es la unidad y cuya altura es la del rectángulo A B C D. En seguida llevarémos la unidad lineal a d, lado del cuadrado, cuantas veces se pueda sobre la altura A D del rectángulo (4 en nuestro ejemplo), y tirando por los puntos de division paralelas á la base, resultará el rectángulo A B C D dividido en 6 bandas, cada una de las