Así, pues, para poder sustituir en ella los valores numéricos, comenzarémos por determinar los arcos A y a de 60°.

$$C = 2\,\pi\,R = 2\,\pi\,41 = 257‘611$$

$$360^\circ : 60^\circ :: 257‘611 : A = \overset{\text{piés.}}{42‘935}$$

$$c = 2\,\pi\,r = 2\,\pi\,30 = 188‘496$$

$$360^\circ : 60^\circ :: 188‘496 : a = 31‘416$$

Sustituyendo en la fórmula (1),

$$\text{Area del trapecio} = \frac{42‘935 + 31‘416}{2}(41-30) = \overset{\text{piés cuad.}}{408‘925}$$

XV.—*Determinar la área de un segmento de círculo cuyo radio es de* 10 *metros y cuyo arco es de* 30°.

La área del segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble [572].

Así, pues, tendremos que determinar el arco rectificado de 30° en el círculo cuyo radio es de 10 metros, y la cuerda del arco de 60°.

La circunferencia del círculo es $2\,\pi\,r = 2\,\pi\,10 = 62‘832$.

$$360^\circ : 30^\circ :: 62‘832 : \text{arco de } 30^\circ = 5‘236$$

En cuanto á la cuerda del arco de 60° hay fórmulas y tablas que dan el valor de la cuerda en funcion del número de grados del arco; pero, en nuestro caso, por ser el arco de 60° [497] la cuerda será igual al radio del círculo = 10 metros. Por tanto, la área del segmento $= \frac{10\,[5‘236-5]}{2} = \overset{\text{m. cuad.}}{1‘180}$

COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los peralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$
$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debia demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulss B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$

$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador comun 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases* *iguales serán proporcionales á sus alturas; y 2°, que las áreas de los triángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases;* pues para demostrarlo basta suprimir el factor igual en la segunda razon de la anterior proporcion.

576.—*Las áreas de dos triángulos A B C y D E F* (fig. 249) *que tienen un ángulo igual, son proporcionales á los productos respectivos de los lados que forman el ángulo igual.*

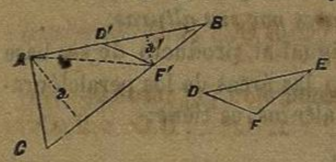

Figura 249.

Si el ángulo B=E sobreponiendo los triángulos, el lado E D tomaria la posicion B D' y el lado E F la de B F', y reuniendo D' y F' se tendria el triángulo B D' F' igual á E D F, por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales. Ahora bien: tirando la recta A F' resultará el triángulo A F' B, en el que tomando B F' como base, tendrá la misma altura a que A B C; y si se toma B A como base tendrá la misma altura a' que B D' F'. Supuesto que estos triángulos tienen la misma altura serán proporcionales á sus bases (575—2°) y tendrémos;

$$ABC : AF'B :: BC : BF'$$

y

$$AF'B : BD'F' :: AB : BD'$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo el factor A F' B comun á los dos términos de la primera razon, resulta:

$$ABC : BD'F' :: BC \times AB : BF' \times BD'$$

y sustituyendo sus iguales

$$ABC : EDF :: BC \times AB : EF \times ED$$

que es lo que se queria demostrar.

577.—*Las áreas de los triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

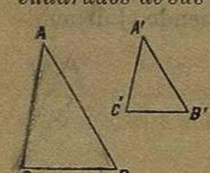

Figura 250.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 250) por ser semejantes tendrán sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales. Por ser el ángulo A=A' se tiene (576)

$$ABC : A'B'C' :: AC \times AB : A'C' \times A'B'$$

por lados homólogos $AC : A'C' :: AB : A'B'$

multiplicando estas proporciones ordenadamente y suprimiendo los factores iguales, resulta:

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2 \ldots . [1]$$

Como los triángulos son semejantes, se tiene:

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'$$

elevando al cuadrado

$$AB^2 : A'B'^2 :: AC^2 : A'C'^2 :: BC^2 : B'C'^2$$

comparando esta série de razones con la proporcion [1] resulta:

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2 :: AC^2 : A'C'^2 :: BC^2 : B'C'^2$$

que es lo que se debia demostrar.

578.—*Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus bases ó de sus alturas.*

En el hecho de ser los triángulos semejantes, conforme al teorema del número anterior, sus áreas serán proporcionales al cuadrado de los *lados* que se tomen por base.

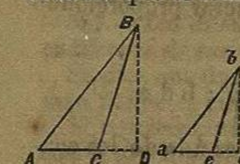

Figura 251.

Para demostrar que lo son al cuadrado de sus alturas, en los triángulos semejantes A B C, a b c (fig. 251) tomemos A C y a c por bases, tiremos las alturas B D y b d, y resultarán los triángulos B C D y b c d, que serán semejantes por ser rectángulos, y tener el ángulo B C D = b c d por ser suplementos respectivamente del ángulo B C A = b c a como ángulos de los triángulos semejantes.

Comparando los lados homólogos de los triángulos B C D y b c d,

se tiene $BC : bc :: BD : bd$

elevando al cuadrado $BC^2 : bc^2 :: BD^2 : bd^2$

Por otra parte, las áreas de los triángulos, por ser semejantes, estarán en la relacion de

$$ABC : abc :: BC^2 : bc^2$$

luego

$$ABC : abc :: BD^2 : bd^2$$

que es lo que se debia demostrar.

579.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados ó de sus líneas homólogas.*

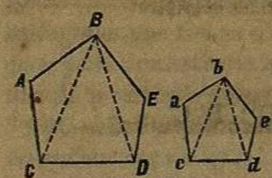

Figura 252.

Sean A B E D C y a b e d c (fig. 252) dos polígonos semejantes; si desde los vértices B y b se tiran diagonales, quedarán divididos en triángulos que serán respectivamente semejantes (520) y se tendrá:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: A\,C^2 : a\,c^2 \ldots . [1]$$

$$B\,C\,D : b\,c\,d :: C\,D^2 : c\,d^2$$
$$B\,D\,E : b\,d\,e :: D\,E^2 : d\,e^2$$

Siendo semejantes los polígonos, sus lados y líneas homólogas serán proporcionales, y tendrémos:

$$A\,C : a\,c :: C\,D : c\,d :: D\,E : d\,e$$

elevando al cuadrado esta serie de razones

$$A\,C^2 : a\,c^2 :: C\,D^2 : c\,d^2 :: D\,E^2 : d\,e^2$$

por ser iguales las segundas razones de las tres primeras proporciones, se tiene:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,C\,D : b\,c\,d :: B\,D\,E : b\,d\,e$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, tendrémos:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,B\,C : a\,b\,c \ldots . [2]$$

Suprimiendo la razon comun entre las proporciones [1] y [2], resulta:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,C^2 : a\,c^2$$

Esta proporcion demuestra la primera parte del teorema, y como en vez de la razon $A\,C^2 : a\,c^2$ por la semejanza de los triángulos, puede ponerse la de otras líneas homólogas elevadas al cuadrado, quedará demostrado el teorema en todas sus partes.

580.—*Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Hemos visto que la área de un círculo (568) está expresada por la fórmula:

$$S = \pi R^2$$

la de otro círculo seria $\quad s = \pi r^2$

Formando una proporcion con estas ecuaciones, se tiene:

$$S : s :: \pi R^2 : \pi r^2$$

suprimiendo el factor comun π de la segunda razon, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2 \ldots . (1)$$

Si en esta proporcion sustituimos por R y r sus valores en funcion del diámetro que expresarémos, por D y d, se tiene:

$$S : s :: \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$$

multiplicando por 4 la segunda razon, resulta:

$$S : s :: D^2 : d^2 \ldots . (2)$$

quedando demostrado el teorema por medio de las proporciones (1) y (2)

581.—*Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó al cuadrado de sus arcos.*

Se dice que dos sectores son semejantes, cuando los arcos que los forman tienen el mismo número de grados.

Si representamos por S y s las áreas de los sectores, por A y a los arcos, y por R y r los radios, tendrémos (570):

$$S = \frac{A\ R}{2}$$

$$s = \frac{a r}{2}$$

de donde $\quad S : s :: \frac{A\ R}{2} : \frac{a r}{2} \ldots . (1)$

Como los arcos de igual número de grados son proporcionales á los radios, se tiene:

$$A : a :: R : r \ldots . [2]$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2$$

que es lo que expresa la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda establecerémos la proporcion

$$R : r :: A : a \ldots. \ (3)$$

multiplicando ordenadamente los términos de esta proporcion por los de la (1) y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: A^2 : a^2$$

que es lo que se debia demostrar.

582.—Es de mucho interés fijar la atencion en la correspondencia íntima que existe siempre entre las relaciones geométricas de una figura y las relaciones numéricas de sus líneas ó de sus áreas, que no vienen á ser sino la traduccion de las mismas propiedades en otro lenguaje. Así, pues, valiéndonos de esta correspondencia, hemos demostrado en muchos casos por medio del álgebra, teoremas de geometría, y otras veces por medio de la geometría podrán establecerse ó demostrarse fórmulas algebráicas.

Por vía de ejemplo, demostrarémos geométricamente una fórmula establecida en álgebra, y un teorema deducido de las propiedades de las líneas proporcionales.

583.—*Dadas las líneas* a *y* b (fig. 253), *determinar la relacion que existe entre estas rectas y el cuadrado de su suma.*

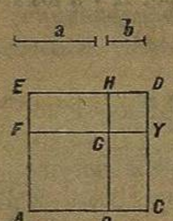

Figura 253.

Tómese A B=a, en seguida colóquese B C=b, y construirémos luego el cuadrado A C D E sobre el lado A C = a + b; tomando A F = a, y tirando por los puntos B y F las rectas B H y F Y paralelas, á los lados del cuadrado, se tendrá:

$$\text{sup. } A\,C\,D\,E = \text{sup. } (A\,G + C\,G + E\,G + G\,D)$$

El rectángulo C G, como fácilmente puede demostrarse, es igual á E G; así es que, sustituyendo:

$$A\,C\,D\,E = A\,G + 2\,C\,G + G\,D$$

y reemplazando estos valores geométricos por sus expresiones algebráicas, resulta:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

cuya fórmula hemos demostrado en aritmética al tratar de las partidas del cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, y en álgebra al ocuparnos de la multiplicacion de los polinomios.

584.—*El cuadrado C H* (fig. 254) *formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados A D y A G formados sobre los catetos.*

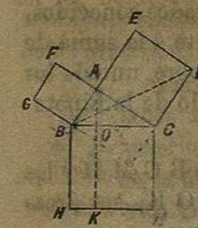

Figura 254.

Desde el vértice A del ángulo recto, bájese la perpendicular A O, prolónguese hasta K y tírense las rectas B D y A M.

El triángulo B C D es igual á A M C por tener el ángulo B C D = A C M formado por lados respectivamente iguales, B C = C M y C D = A C por lados de cuadrados. El ángulo B C D es igual á A C M porque cada uno de ellos está formado de un ángulo recto, más la parte comun A C B. Así, pues, se tiene:

$$\text{triángulo } B\,D\,C = A\,M\,C \ldots. \ (1)$$

El triángulo B D C tiene la misma base D C que el cuadrado A D, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C D y B E, luego

$$\text{sup. triángulo } B\,D\,C = \frac{\text{cuad. } A\,D}{2} \ldots. \ (2)$$

El triángulo A M C tiene la misma base C M que el rectángulo O C M K, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C M y A K, luego

$$\text{sup. triángulo } A\,M\,C = \frac{\text{rect. } C\,K}{2} \ldots. \ (3)$$

Siendo los primeros miembros de las ecuaciones (2) y (3) iguales entre sí (1) resulta que

$$\frac{\text{cuad. } A\,D}{2} = \frac{\text{rect. } C\,K}{2}$$

ó

$$\text{cuad. } A\,D = \text{rect. } C\,K \ldots. \ (4)$$

de una manera análoga puede demostrarse que

$$\text{cuad. } A\,G = \text{rect. } B\,K \ldots. \ (5)$$

sumando las ecuaciones (4) y (5), tenemos por último:

$$\text{cuad. } A\,D + \text{cuad. } A\,G = \text{cuad. } C\,H$$

que es lo que expresa el teorema, y lo mismo que habiamos demostrado en el núm. 531, de otro modo.

585.—Observacion.—Esta propiedad nos sirve para formar un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados conócidos; pues si se construye un triángulo rectángulo A B C (fig. 254) en el que los catetos A B y A C sean los lados de los cuadrados conocidos, el cuadrado formado sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los cuadrados A G y A D; y el cuadrado construido sobre uno de los catetos será equivalente á la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el del otro cateto.

586.—Si observamos en la figura 254 que el cuadrado B C M H y los rectángulos B K y C K tienen la misma base B H = O K, sus áreas serán proporcionales á sus alturas B C, B O y O C; esto es,

$$BM : BK : CK :: BC : BO : OC$$

sustituyendo por B K su equivalente A G, y por C K el suyo A D, se tiene que

$$BM : AG : AD :: BC : BO : OC$$

esto es, que *la relacion entre el cuadrado formado sobre la hipotenusa y los cuadrados construidos sobre los catetos, es la misma que la que hay entre la hipotenusa y los segmentos B O y O C adyacentes.*

587.—*La área de un polígono, construido sobre lá hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de las áreas de los polígonos semejantes al primero, construidos sobre los catetos del mismo triángulo.*

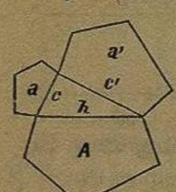

Figura 255.

Si en la figura 255 llamamos A la área del polígono construido sobre la hipotenusa, a la del construido sobre el cateto c, y a' la del construido sobre el cateto c', tendrémos que por ser los polígonos semejantes, sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (579). Esto es:

$$a : c^2 :: a' : c'^2 :: A : h^2$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, se tiene:

$$a + a' : c^2 + c'^2 :: A : h^2$$

pero como (584) $$h^2 = c^2 + c'^2$$

endo iguales los consecuentes, lo serán los antecedentes,

luego $$A = a + a'$$

que es lo que se debia demostrar.

588.—*La área de un círculo construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo como diámetro, es equivalente á la suma de los círculos construidos sobre los catetos como diámetros.*

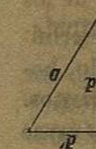

Figura 256.

Siendo el círculo un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños, este teorema es un corolario del anterior; pero lo demostrarémos fundándonos en la expresion de la área del círculo en funcion del diámetro (568). Sea (fig. 256) D la hipotenusa, diámetro del círculo construido sobre ella y S su área, d uno de los catetos, diámetro del círculo cuya área representarémos por s; y d' el otro cateto diámetro del círculo cuya área es s'. En tal virtud,

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \dots [1]$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$s' = \frac{\pi d'^2}{4}$$

sumando las dos últimas ecuaciones, y sacando $\frac{\pi}{4}$ como factor comun, resulta:

$$s + s' = \frac{\pi}{4} [d^2 + d'^2] \dots [1]$$

pero como [584] $$d^2 + d'^2 = D^2$$

sustituyendo en dos se tendrá:

$$s + s' = \frac{\pi D^2}{4}$$

y conforme á la ecuacion (1), obtendremos $s + s' = S$

que es lo que se queria demostrar.

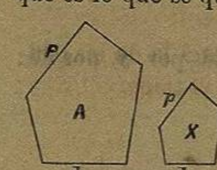

Figura 257.

589.—Problemas de comparacion de áreas. —I.—*Dada la área A de un polígono P (fig. 257) y uno de sus lados* l, *determinar la área de un segundo polígono* p *semejante al primero, y en el cual se conoce el lado homólogo* l'.

Como las áreas de las figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, se tiene:

$$A : x :: l^2 : l'^2$$

de donde $$x = \frac{A\, l'^2}{l^2}$$

II.—*Dados dos polígonos semejantes* (fig. 257), *construir otro semejante á ellos y equivalente á su suma.*

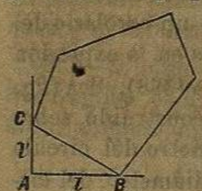

Figura 258.

Para resolver este problema, lo esencial es determinar la magnitud del lado del polígono buscado, homólogo á uno de los lados de los polígonos propuestos.

Constrúyase el ángulo recto A (fig. 258) y llévense sobre sus lados longitudes respectivamente iguales á los lados homólogos l y l' de los polígonos conocidos; tírese la hipotenusa B C, y si sobre ella se construye un polígono semejante á uno de los lados, quedará resuelto el problema (587).

III.—*Dados dos círculos A y B* (fig. 259) *construir otro equivalente á su diferencia.*

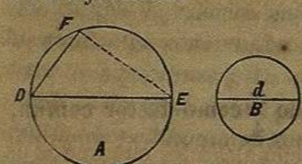

Figura 259.

Tírese el diámetro D E, desde su extremo D llévese la cuerda D F igual al diámetro d del círculo menor B, y tirando la cuerda F E ésta será el diámetro del círculo pedido.

Demostracion.—Por ser rectángulo el triángulo D F E, se tendrá:

$$E F^2 = D E^2 - D F^2$$

Si representamos por R el rádio del círculo A, por r el del círculo B, y por r' el del círculo buscado, cuyo diámetro vamos á demostrar que debe ser F E; sustituyendo en la anterior ecuacion, se tiene:

$$4 r'^2 = 4 R^2 - 4 r^2$$

dividiendo todos los términos por 4, y multiplicándolos por π, nos dá:

$$\pi r'^2 = \pi R^2 - \pi r^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

IV.—*Construir un polígono semejante á otro P* (fig. 260), *y cuya área esté con la del primero en la relacion de* m *á* n.

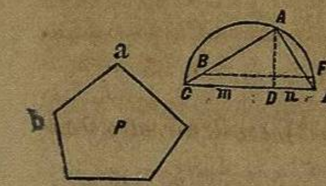

Figura 260.

Sea a b uno de los lados del polígono dado, y vamos á determinar el lado homólogo del polígono cuya área ha de estar con la de éste en la razon de m : n.

Sobre una recta indefinida llévense dos rectas, C D y D E, cuyas magnitudes estén en la relacion de m : n. Sobre C E como diámetro, trácese una semicircunferencia; levántese en D la perpendicular D A, y tirando las cuerdas A C y A E, llévese sobre la primera de A á B el lado a b, por B trácese B F paralela á C E, y la recta A F será el lado homólogo á a b del polígono buscado.

Demostracion.—Por ser semejantes los triángulos A C E y A B F, se tiene:

$$A C : A E :: A B : A F$$
$$A C^2 : A E^2 :: A B^2 : A F^2$$

como $A C^2 = m.\ C E$ y $A E^2 = n.\ C E$ (530—3°)

sustituyendo estos valores en la proporcion anterior y simplificando

tendrémos: $m : n :: A B^2 : A F^2$

ó sustituyendo $m : n :: a b^2 : A F^2$

y como las áreas de los polígonos son proporcionales á los cuadrados de los lados, se infiere que la área dél polígono construido sobre la recta A F, es á la área del polígono P como m es á n; que es lo pedido en el problema.