TERCERA PARTE.

VOLUMENES.

Planos y rectas.

590.—Hasta aquí nos hemos ocupado del estudio de las propiedades de las figuras que pueden estar contenidas en un plano, considerando las relaciones que existen entre las partes que las forman, con el fin de deducir de los elementos conocidos los desconocidos. Esta parte de la geometría elemental se denomina por esta razon *geometría plana.* Vamos ahora á tratar de las figuras considerándolas en el espacio y de los cuerpos con sus tres dimensiones, cuyo estudio constituye lo que comunmente se llama *geometría en el espacio.*

Nos ocuparémos primero de las relaciones de las líneas rectas con los planos; en seguida de las que dan lugar los planos entre sí, y por último, de los cuerpos formados de planos ú originados por el círculo, valuando sus áreas y sus volúmenes.

591.—Hemos dicho (370) que *plano ó superficie plana es aquella que si se le aplica en una direccion cualquiera una línea recta, de modo que esté totalmente contenida en dicha superficie, ésta tocará todos los puntos de la recta.*

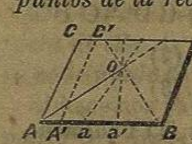

Figura 261.

Todo plano debe considerarse como una superficie indefinida en longitud y latitud, á menos que no se fijen los puntos que lo limitan. Puede concebirse el plano engendrado por el movimiento de una recta o A (fig. 261) que al girar al rededor del punto o otro de sus puntos toca la recta A B. Igualmente puede considerarse un plano engendrado por el movimiento de una recta A C que resbala sobre otra A B, y que en sus diversas posiciones permanece paralela á su primera situacion A C.

La interseccion de dos planos es una línea recta (370).

Dos planos que tienen tres puntos comunes que no están en línea recta coinciden en toda su extension (370)

Un plano queda determinado en general por la posicion de tres puntos que no están en línea recta; por dos rectas que se cortan en un punto, ó por dos paralelas. Tambien puede fijarse la posicion de un plano que pasa por un punto, agregando la condicion de que sea perpendicular á una recta ó paralelo á otro plano.

592.—*Siempre que una recta P A sea perpendicular á la vez á otras dos A B y A C* (fig. 262) *colocadas en dos planos diferentes P A B y P A C que pasan por P A, esta recta será igualmente perpendicular á cualquiera otra A E que pase por el punto comun A de interseccion y que esté contenida en el plano C A B determinado por las rectas A B y A C.*

Por la hipótesis del teorema son rectos los ángulos P A B y P A C, y para demostrar que P A es perpendicular á A E, tendrémos que probar que el triángulo P A E es rectángulo en A, esto es, que el cuadrado de P E es igual á la suma de los cuadrados de los catetos P A y A E.

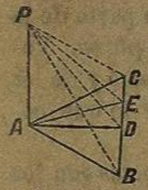

Figura 262.

Tomemos A B=A C, tiremos las rectas B C, B P y P C, con lo que resultarán los triángulos A B C y P B C que serán isósceles, el primero por construccion y el segundo porque siendo iguales los triángulos rectángulos P A B y P A C (385) se tiene P B=P C. Tomando el punto D en el medio de B C, base de los triángulos isósceles, y tirando las rectas A D y P D, éstas serán perpendiculares á B C en el punto D (428).

Considerando el triángulo rectángulo P E D, se tiene:

$$\mathrm{P\,E}^2=\mathrm{P\,D}^2+\mathrm{E\,D}^2\ldots.[1]$$

Ahora determinarémos los valores de $\mathrm{P\,D}^2$ y $\mathrm{E\,D}^2$ considerando sucesivamente los triángulos rectángulos P D C, P A C y A D C.

$$\mathrm{P\,D}^2=\mathrm{P\,C}^2-\mathrm{C\,D}^2=\mathrm{P\,A}^2+\mathrm{A\,C}^2-\mathrm{C\,D}^2=\mathrm{P\,A}^2+\mathrm{A\,D}^2+\mathrm{C\,D}^2-\mathrm{C\,D}^2$$

ó reduciendo: $\mathrm{P\,D}^2=\mathrm{P\,A}^2+\mathrm{A\,D}^2\ldots.(2)$

en el triángulo A D E: $\mathrm{E\,D}^2=\mathrm{A\,E}^2-\mathrm{A\,D}^2\ldots.(3)$

sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1) finalmente resulta:

$$\mathrm{P\,E}^2=\mathrm{P\,A}^2+\mathrm{A\,E}^2$$

que es lo que teniamos que demostrar.

Siendo P A perpendicular á todas las rectas que, como A E pasan por A, se infiere que: *cuando una recta P A es perpendicular á la vez á dos rectas A B y A C, lo será al plano que pasa por éstas,* y recíprocamente, siempre que una recta sea perpendicular á un plano, lo será tambien á toda recta que esté situada en él y pase por el pié A de la perpendicular P A.

593.—*Si desde un punto P* (fig. 263) *se baja una perpendicular P O al plano D E y varias oblícuas P A, P F, P C; 1° la perpendicular P O es la menor; 2° las oblícuas P A, P F, que se separan igualmente del pié de la perpendicular, son iguales; y 3° la P C que se separa más es la mayor.*

1° En cualquiera de los triángulos rectángulos P O A, P O F P O C, el cateto P O, que es la perpendicular al plano, es menor que cualquiera de las oblícuas P A, P F y P C, que son las hipotenusas de los triángulos.

Por esta razon, la distancia de un punto á un plano se mide por la perpendicular bajada al plano.

2° Siendo A O = F O = O B, las oblícuas A P, F P y B P serán iguales por ser hipotenusas de los triángulos iguales (385) A O P, F O P y B O P.

3° Si O C > O A podemos trasportar el triángulo P O A sobre su igual P O B, que está en el mismo plano que la oblícua P C, y como P C > P B (401) y P B = P A se infiere que P C > P A.

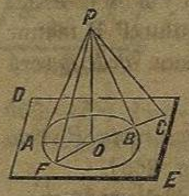

Figura 263.

594.—De lo que antecede resulta: 1° *que si se hace girar un ángulo recto P O A al rededor de uno de sus lados P O, el otro O A describirá un plano A O B perpendicular al primer lado; y 2° todas las perpendiculares O A, O F, O B á una recta O P levantadas en uno de sus puntos O, están en un mismo plano D E perpendicular á dicha recta.*

595.—*Por un punto O tomado en una recta O P* (fig. 263) *ó por otro fuera de ella A, siempre se le puede tirar un plano perpendicular, pero no se puede tirar mas que uno solo.*

Si hacemos pasar un plano por la recta P O observarémos que del punto O y desde el A siempre se puede tirar una perpendicular á O P, y al girar al rededor de ésta engendrará el plano A O F B que le es perpendicular, y como no se puede tirar desde un punto mas que una sola perpendicular á O P, resulta que no habrá tampoco mas de un plano perpendicular que pase por el punto dado.

596.—*Desde un punto O tomado en un plano* (fig. 263) *ó por otro fuera de él P, no se puede tirar más que una perpendicular al plano.*

Suponiendo engendrado el plano D E por el movimiento de O A al rededor de O P, se comprende que en el punto O no se puede levantar á la recta O A más perpendicular que O P, así como que desde el punto P no se le puede bajar tampoco ninguna otra perpendicular.

597.—La proyeccion de un punto P sobre un plano (fig. 264) es el pié B de la perpendicular P B bajada de ese punto sobre dicho plano.

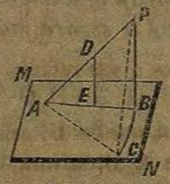

Figura 264.

La proyeccion de una recta D P es la série de todos los piés de las perpendiculares bajadas de los puntos de la recta sobre el plano. Como todas las perpendiculares son paralelas entre sí, quedarán en un mismo plano P A B, cuya interseccion con el M N será una recta A B. En consecuencia, siendo la proyeccion de una recta otra línea recta, bastará determinar la proyeccion de dos de sus puntos para tener la de toda la recta.

598.—*El ángulo de una recta con un plano, cuando no es perpendicular á éste, es el que forma con su proyeccion. Este ángulo es el menor de todos los que forma la recta con las líneas que pasan por su pié A.*

En efecto, si por el pié A [fig. 264] tiramos otra recta cualquiera, tomamos A C=A B y reunimos los puntos P y C, resultarán dos triángulos P B A y P C A, en los que los ángulos P A B y P A C están formados por lados iguales; pero siendo la perpendicular P B menor que la oblícua P C, el ángulo opuesto á la primera recta, P A B será menor que cualquiera otro P A C [432].

599.—*Dos planos M, N, perpendiculares á una misma recta P A no pueden encontrarse, y por lo mismo serán paralelos* [fig. 265].

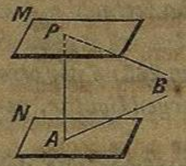

Figura 265.

Si los planos pudieran encontrarse, desde el punto B de su interseccion comun podrian tirarse las rectas B P y B A, que por estar contenidas en planos perpendiculares á la misma recta, serán ambas perpendiculares á P A, lo cual es un absurdo [396].

600.—*Cuando dos rectas son paralelas, el plano perpendicular á una de ellas lo será tambien á la otra* [fig. 266].

Si el plano M N es perpendicular á P A, demostrarémos que tambien lo es á su paralela Q B. Tiremos la recta A B y su perpendicular C D. La línea Q B por ser paralela á P A, estará en el mismo plano P A B Q que ella, y el ángulo Q B A será recto. Tomemos B C=B D y tiremos las rectas A C, A D, P C y P D.

Los triángulos rectángulos P A C y P A D son iguales (385), luego P C = P D.

Siendo isósceles el triángulo P C D, la recta P B tirada á la mitad de su base será perpendicular á C D. En consecuencia, siendo C D perpendicular á A B y á B P, lo será igualmente á B Q contenida en el mismo plano (592). Por último, si Q B es perpendicular á la vez á B A y á C D, lo será al plano M N de estas rectas.

601.—*Dos rectas P A y Q B* (fig. 266) *perpendiculares á un mismo plano M N, son paralelas entre sí.*

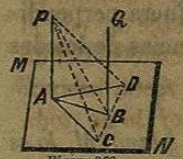

Figura 266.

Si Q B no fuera paralela á P A por el punto B, se le podria tirar una paralela diferente de Q B, la cual (600) seria perpendicular al plano M N, resultando que desde el mismo punto B podrian levantarse dos perpendiculares al mismo plano, lo que no es admisible.

602.—*Dos rectas A a, B b, paralelas á una tercera C c, son paralelas entre sí* (fig. 267).

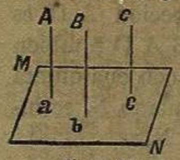

Figura 267.

Si tiramos un plano M N perpendicular á C c, éste lo será á las rectas A a y B b (600), y siendo estas perpendiculares al mismo plano serán paralelas entre sí (601).

603.—*En el espacio dos rectas A B y C' D'* (fig. 268) *pueden ser perpendiculares á una misma recta x y sin ser paralelas entre sí.*

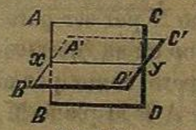

Figura 268.

Si suponemos que el rectángulo A D gire al rededor de una recta x y, paralela á sus bases en cualquiera posicion A' D' el lado D' C' será perpendicular á x y sin ser paralelo á A B, porque se encuentra en un plano diferente.

Debemos hacer notar que prolongadas indefinidamente estas rectas, no se encuentran. Igualmente observarémos, que en el espacio, á una recta x y se le pueden levantar una infinidad de perpendiculares desde el mismo punto x.

604.—*Las intersecciones A B y C D* (fig. 269) *de dos planos paralelos M y N con otro plano B C, son dos rectas paralelas.*

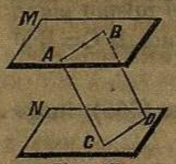

Figura 269.

Por una parte las rectas A B y C D están en el mismo plano A D, y por otra estando colocadas sobre los planos paralelos M y N no podrán encontrarse prolongadas, luego son paralelas.

605.—*Las partes A C y B D* (fig. 269) *de paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales.*

Por el supuesto los lados A C y B D son paralelos, y por el teorema anterior lo son tambien A B y C D, luego la figura A B C D será paralelógramo, por lo cual A C=B D (449).

De esto resulta que *dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes;* pues bastaria imaginarse que el plano A D fuera perpendicular para que las rectas A C y B D midiesen las distancias de los dos planos.

606.—*La recta A B* (fig. 270), *perpendicular á un plano M, lo es tambien á cualquiera otro plano N que le es paralelo.*

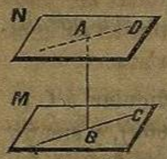

Figura 270.

Si por A B se hace pasar un plano cualquiera, por ser A B perpendicular á M, el ángulo A B C es recto; por ser N paralelo á M, la interseccion A D es paralela á B C, y por tanto el ángulo B A D tambien será recto. Como otro tanto sucederia con cualquiera otra recta que pase por A y esté en el plano N, se infiere que A B es perpendicular al plano N.

607.—*Toda recta A B* (fig. 271) *paralela á otra C D, lo es igualmente á cualquier plano M que pase por la segunda sin pasar por A B.*

Estando las dos rectas A B y C D en el mismo plano N por ser paralelas, la recta A B no podria encontrar el plano M sino en su interseccion comun, esto es, sobre la prolongacion de C D; pero como por el supuesto no es esto posible, tampoco podrá encontrar A B al plano M, y por tanto será paralela á él.

608.—*Si una recta A B* (fig. 271) *es paralela á un plano M, cualquier plano que pase por la recta A B encontrará al primero segun una paralela á ella.*

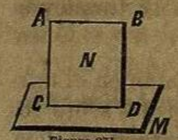

Figura 271.

Porque A B prolongada no podria cortar á C D sin encontrar al plano M, lo que seria contra el supuesto. De esto se deduce, que cualquiera recta paralela á A B tirada por un punto del plano M, está toda comprendida en este plano.

609.—*Las partes de paralelas A C y B D* (fig. 271) *comprendidas entre una recta A B y un plano M que le es paralelo son iguales.*

Supuesto que la figura A D es paralelógramo, y en todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.

Como en el caso de ser A C y B D perpendiculares al plano M, el teorema es igualmente cierto, se infiere que, *una recta paralela á un plano tiene todos sus puntos equidistantes de éste.*

610.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 272) *en el espacio que no se cortan ni son paralelas, por una de ellas A B solo se puede hacer pasar un plano paralelo á la otra C D.*

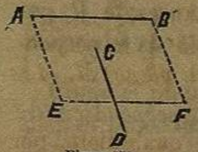

Figura 272.

Si por un punto cualquiera A ó B de la recta A B se tira una paralela A E ó B F á C D, y se hace pasar por A B y A E un plano, éste será paralelo á C D (607). Además, como todas las paralelas á A E y por lo mismo á C D están en un mismo plano, no hay mas de uno solo que satisfaga á la cuestion.

611.—*La menor distancia de dos rectas en el espacio, A B y C D* (figura 273) *que no se cortan, es la perpendicular comun á ambas* o o'.

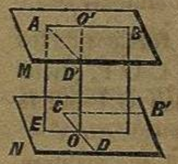

Figura 273.

Por el punto A tiremos A D' paralela á C D, y hagamos pasar el plano M por A B y A D' que será paralelo á la recta C D. Por el punto C tiremos C B' paralela á A B, y hagamos pasar el plano N por C D y C B' que será paralelo á la recta A B. La menor distancia de las rectas A B y C D será la de los planos paralelos M y N que las contienen. Por la recta A B hagamos pasar el plano B E perpendicular á M y á N.

La interseccion de este plano con N encuentra la recta C D en el punto O, y levantando en este punto una perpendicular á C D, que quedará en el plano B E, se tendrá por último la recta O O' que es la menor distancia de las rectas, siendo perpendicular á ambas y á los planos que las contienen.

El ángulo de dos rectas A B y C D en el espacio que no se cortan, es el B A D' que forma una de ellas A B con otra recta A D' tirada por uno de sus puntos A y paralela á la otra C D.

612.—*Dos rectas A B y C D* (fig. 274) *que no están en el mismo plano, quedarán cortadas en partes directamente proporcionales por tres planos paralelos M, N y P.*

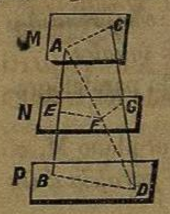

Figura 274.

Reuniendo los puntos A y D y tirando las rectas B D, E F, F G y A C por los puntos de interseccion de las rectas A B, A D y C D con los planos M, N y P, se tendrá E F paralela á B D (604) y F G paralela á A C, por lo que (510)

A E : E B :: A F : F D
A F : F D :: C G : G D
luego A E : E B :: C G : G D

613.—Problemas.—I.—*Bajar una perpendicular á un plano M,* (fig. 275) *desde un punto P tomado fuera de él.*

Señálense tres puntos del plano A, B y C equidistantes de P, por ellos hágase pasar un círculo, cuyo centro O será el pié de la perpendicular (593).

II.—*Desde un punto O de un plano, levantarle una perpendicular.* (fig. 275).

Tomando O como centro, trácese un círculo, y en tres puntos de su circunferencia levántense tres oblícuas iguales A P, B P y C P, y determinando el punto P en que coinciden sus extremos, éste será el otro de la perpendicular buscada.

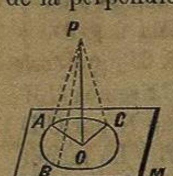

Figura 275.

Haciendo coincidir con el punto O los vértices de los ángulos rectos de dos escuadras A O P y C O P, puede determinarse igualmente la perpendicular O P por la línea de union de las escuadras (593).

III.—*Levantar un plano M* (fig. 275) *perpendicular á una recta O P: 1° por un punto O de la recta, y 2° por un punto C fuera de ella.*

1° En el punto O levántese la recta O C perpendicular á O P. En seguida, en un plano diferente de P O C, levántese otra perpendicular A O á P O, y haciendo pasar un plano por C O y A O, se tendrá el plano pedido.

2° Bájese del punto C la perpendicular C O á P O; determinado el punto O, levántese por él otra perpendicular á P O, pero en un plano

diverso al P O C. Haciendo pasar un plano por las dos perpendiculares C O y O A, se tendrá resuelto el problema.

IV.—*Tirar desde un punto P* (fig. 276) *una perpendicular á una recta A B contenida en un plano* B.

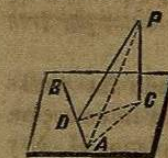

Figura 276.

Desde P bajarémos P C perpendicular al plano B. De su pié C tirarémos C D perpendicular á A B, y reuniendo los puntos P y D, la recta P D será la perpendicular pedida.

Para demostrar que el ángulo P D A es recto, tiremos las rectas C A y A P, y resultando los triángulos rectángulos P C A y C D A, se tendrá:

$$P\,A^2 = P\,C^2 + C\,A^2$$

pero como $P\,C^2 = P\,D^2 - C\,D^2$ y $C\,A^2 = C\,D^2 + A\,D^2$

sustituyendo resulta $P\,A^2 = P\,D^2 + A\,D^2$

luego el ángulo P D A es recto.

Como el plano P C D es perpendicular á A B, este problema da tambien el procedimiento para *tirar desde un punto P un plano perpendicular á una recta A B.*

V.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar un plano paralelo á otro M.*

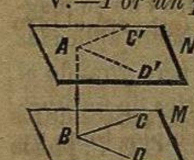

Figura 277.

En el plano dado M, se trazarán dos rectas B C y B D, que se corten en el punto B. Por el punto A se tirarán A C' paralela á B C, y A D' paralela á B D; haciendo pasar un plano N por A C' y A D', este será el plano pedido.

VI.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar una recta paralela á un plano M.*

Por un punto cualquiera B del plano M, trácese la recta B D, tírese A B, por el punto D llévese D D' paralela é igual á A B, y reuniendo los puntos A y D' se tendrá la recta A D' paralela al plano M. Como por el punto B pueden trazarse una infinidad de rectas, y por A tirarse otras tantas paralelas, el problema admite un número indefinido de resoluciones.

VII.—*Por un punto A* (fig. 278) *tirar un plano paralelo á dos rectas cualesquiera B C y D E, que no estén situadas en el mismo plano.*

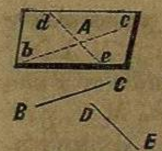

Figura 278.

Por A tírense b c y d e respectivamente paralelas á B C y D E, y haciendo pasar un plano por b A c y d A *e*, quedará resuelta la cuestion.

ANGULOS DIEDROS.

614.—*Se llama ángulo diedro la figura formada por dos planos M y N inclinados entre sí, que concurren en una recta A B* (fig. 279). Los planos M y N se denominan *caras* ó *lados*, y la recta A B *arista* del diedro. La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor ó menor inclinacion de los planos que lo forman, y no de la extension de éstos; por lo que al medir un diedro lo que se estima únicamente es la inclinacion relativa de sus caras.

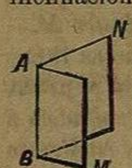

Figura 279.

Se tendrá una idea exacta del ángulo diedro y de su magnitud, imaginándose que sus caras están primero aplicadas una sobre otra, que en seguida se separan, pero girando al rededor de la arista A B, como las dos partes de un libro que se abre. El ángulo diedro, nulo al principio, toma un valor que va aumentando con la separacion de las caras. Así, pues, el ángulo diedro está engendrado por la rotacion de un plano al rededor de una recta. En este movimiento cada uno de los puntos del plano describe una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la arista y cuyo centro está en un punto de esta recta.

Cuando no hay mas que un solo diedro, se le designa por las letras A B de su arista; pero cuando hay varios que concurren en la misma arista, para evitar confusion, se designa el diedro por cuatro letras; teniendo cuidado de poner siempre las dos de su arista A B en medio de las otras dos N y M que corresponden á los planos que lo forman, y así se dice el diedro N A B M.

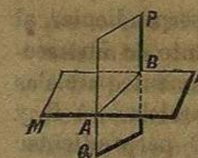

Figura 280.

Cuando un plano P A (fig. 280) cae sobre otro M N, forma con éste dos ángulos diedros M A B P y P B A N, que son *adyacentes*. Cuando éstos son iguales, el plano P A es perpendicular á M N, y recíprocamente. Si el ángulo que forman los dos planos es menor que P B A N, se dice que el diedro es *agudo*, y en caso contrario, que es *obtuso*. En fin, para los ángulos diedros se adoptan las mismas denominaciones de ángulos *complementarios, suplementarios*, etc., que para los ángulos rectilíneos.

615.—*Los ángulos rectilíneos B A C y* b a c (fig. 281) *que resultan de la interseccion de un ángulo diedro* A a, *con dos planos paralelos cualesquiera, son iguales.*

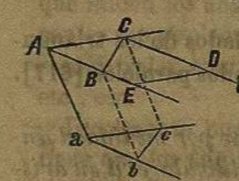

Figura 281.

Tomemos A C = a c y B A = b a, y tiremos las rectas B b, C c, B C y b c: A C es paralela á a c (604) é igual, luego la figura A c es paralelógramo y en consecuencia será C c igual y paralela á A a. Como A B es igual y paralela á a b, la figura A b es igualmente un paralelógramo, de lo que resulta que B b es igual y paralela á A a; luego B b será igual y paralela á C c, y B c será un paralelógramo en el que B c=b c. Los dos triángulos A B C y a b c serán iguales (386) por tener sus tres lados respectivamente iguales, y de la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo B A C=b a c, que es lo que se queria demostrar.

616.—De aquí se infiere: 1° *si dos ángulos en el espacio* B A C *y* b a c (fig. 281) *tienen sus lados paralelos y sus aberturas están vueltas en el mismo sentido, serán iguales;* 2° *igualmente lo son si están vueltas en sentido contrario como* b a c *y* C D E; *y* 3° *dos ángulos* b a c *y* E D F, *que tienen sus lados paralelos y sus aberturas no están vueltas en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

En el párrafo anterior hemos demostrado la primera parte, esto es, que B A C=b a c.

2° Como el ángulo B A C = C D E (420), se infiere que b a c = C D E.

3° Siendo el ángulo E D F suplemento de C D E, se infiere que E D F y b a c son suplementarios.

617.—*Los planos de dos ángulos* B A C *y* b a c [fig. 282] *cuyos lados son respectivamente paralelos, serán paralelos.*

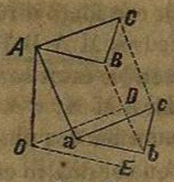

Figura 282.

Desde el punto A bajemos A O perpendicular al plano del ángulo b a c, y por el punto de interseccion O tiremos O D y O E respectivamente paralelas á a c y á a b, por lo que O E será paralela á A B, y O D á A C. Ahora bien, siendo A O perpendicular al plano en que están las rectas O D y O E, los ángulos A O D y A O E son rectos, y por razon de las paralelas [409] tambien lo serán los ángulos O A B y O A C, luego O A es perpendicular á la vez á los planos de los ángulos b a c y B A C, y por lo mismo estos serán paralelos [606].

618.—*Los triángulos* A B C *y* a b c *formados en el espacio por tres rectas respectivamente iguales y paralelas, son iguales y quedan en planos paralelos.*

Serán iguales por serlo respectivamente los tres lados de los triángulos [386], y estarán en planos paralelos por ser los lados paralelos [617].

619.—*Un ángulo diedro* B A D C [fig. 283] *tiene por medida el ángulo rectilíneo* B A C *que resulta levantando perpendiculares á su arista* A D *del mismo punto* A *en cada uno de los dos planos que lo forman.*

En primer lugar observarémos que en cualquier punto de la arista A D en que se levanten perpendiculares, determinarán un ángulo igual á B A C por estar formados por rectas respectivamente paralelas [616].

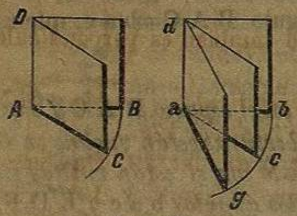

Figura 283.

Para demostrar que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos formados por perpendiculares en el mismo punto á su arista, y que por tanto pueden tomarse los últimos como medida de los primeros, demostrarémos préviamente que *si dos ángulos diedros* B A D C *y* b a d c *son iguales lo serán los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c *formados por las respectivas perpendiculares á sus aristas levantadas en cada una de sus caras del mismo punto.*

Siendo por el supueto iguales los ángulos diedros B A D C y b a d c, si hiciéramos coincidir la cara B D con b d sobreponiendo la arista A D sobre a d, teniendo cuidado de que A cayese sobre a, el plano D C coincidiria con d c. La perpendicular A B coincidiria con a b (395), y la A C con a c; luego el ángulo B A C = b a c.

Ahora bien: si á continuacion del ángulo diedro b a d c ponemos su igual c a d g, haciéndolos coincidir por la cara d c, resultará un ángulo diedro b a d g duplo del b a d c, y el ángulo rectilíneo b a c = c a g,

por lo que al ángulo diedro duplo b a d g corresponde un ángulo rectilíneo b a g duplo de b a c.

De la misma manera probariamos que á un diedro triple corresponde un ángulo rectilíneo triple, y en general á un ángulo diedro *n* veces mayor que otro, corresponderá un ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares á su arista tambien *n* veces mayor. Así es que, siendo estos ángulos rectilíneos proporcionales á la magnitud de los ángulos diedros, pueden servirles de medida.

De modo que, en último análisis, los arcos de círculo nos servirán para medir los ángulos diedros.

620.—De esto resulta, que cuando uno ó varios planos caen sobre otro, ó lo cortan, tienen lugar los mismos teoremas que con las rectas que miden los ángulos diedros. Así es, que los ángulos diedros adyacentes son suplementarios; todos los formados al rededor de una arista comun valen cuatro rectos; los ángulos opuestos al vértice son iguales, etc., etc.

Igualmente cuando dos planos paralelos están cortados por otro se tiene que los ángulos diedros alternos internos son iguales, los interiores del mismo lado del plano secante son suplementarios, así como todas las propiedades que hemos demostrado en los casos de rectas paralelas.

621.—Dos planos son perpendiculares cuando el ángulo diedro que forman tiene por medida un recto.

Si un plano es perpendicular á otro, este tambien es perpendicular al primero.

622.—*Si una recta* A B (fig. 284), *es perpendicular á un plano* M N, *lo será igualmente cualquier plano* P C *que pasa por ella.*

Si en el plano M N levantamos B O perpendicular á C D interseccion comun de los dos planos, tendrémos que el ángulo A B O formado por las perpendiculares á C D será la medida del ángulo diedro de los dos planos; pero por ser A B perpendicular á M N, el ángulo A B O es recto; luego el plano P C será perpendicular á M N.

623.—*Por una recta* C D (fig. 284) *contenida en un plano, no se puede levantar mas de un plano perpendicular á éste.*

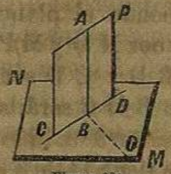

Figura 284.

En razon de que para que el plano P C sea perpendicular á M N, acabamos de ver que es preciso pase por B A perpendicular á M N, y de que se sabe que por un punto B no se puede levantar á M N más de una sola perpendicular [596].

624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

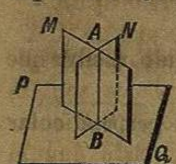

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

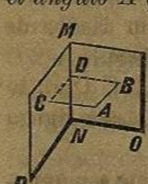

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuacion $A + D = 2$ rectos

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

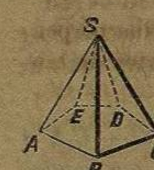

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*