624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

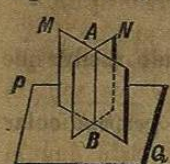

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

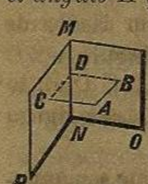

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuacion $A + D = 2$ rectos

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

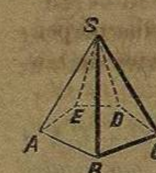

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano*, y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido*, que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos*, que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

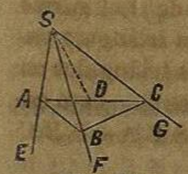

Figura 288.

Nos bastará demostrarlo con el ángulo plano E S G, que es el mayor, para que se comprenda que con más razon será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tiremos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales [385], de lo que resulta:

$$AB = AD$$

por otra parte

$$AB + BC > AC$$

restando los términos de la ecuacion de los de la desigualdad, se tiene:

$$BC > DC$$

Considerando los triángulos C S B y C S D, en los que los ángulos C S B y C S D están formados por lados respectivamente iguales, el opuesto al mayor lado B C será el mayor, esto es

ángulo $BSC > CSD$
agregando los iguales $BSA = ASD$
resulta $BSC + BSA > ASC$

que es lo que se tenia que demostrar.

630.—*La suma de los tres ángulos planos A S B + B S C + C S A* (fig. 289), *formados en el vértice de un triedro, es menor que cuatro rectos.*

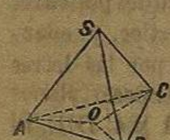

Figura 289.

Cortemos el triedro por un plano cualquiera A B C, y tomando en el interior de este triángulo un punto O, reunámoslo con los tres vértices, A, B y C, con lo que resultarán tres triángulos colocados en el mismo plano cuyo vértice comun es O, y otros tres triángulos cuyos vértices concurren en el S del triedro. Para simplificar harémos la suma de los ángulos.

$$AOB + BOC + COA = O$$

y

$$ASB + BSC + CSA = S$$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, nuestro raciocinio tendrá por objeto demostrar que S < O.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, resulta que la suma de los ángulos de los triángulos en O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es,

$$O + CAB + ABC + BCA = S + SAC + SAB + SBA + SBC + SCB + SCA \ldots [1]$$

Por otra parte (629)

$$CAB < SAC + SAB$$
$$ABC < SBA + SBC$$
$$BCA < SCB + SCA$$

sumando ordenadamente estas tres desigualdades

$$CAB + ABC + BCA < SAC + SAB + SBA + SBC + SCB + SCA \ldots (2)$$

Si restamos los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion (1) como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta:

ángulos en $O > S$

y como los ángulos en O = 4 rectos, se tiene que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S será menor que cuatro rectos.

631.—*Dos triedros S y s* (fig. 290) *formados por ángulos planos respectivamente iguales,* D S E=d s e, D S F=d s f *y* E S F=e s f, *tienen sus ángulos diedros iguales.*

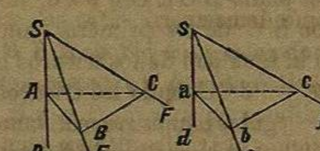

Figura 290.

Tomemos S A = s a, y por los puntos A y a hagamos pasar planos A B C y a b c respectivamente perpendiculares á S D y á s d. El triángulo S A B es igual á s a b (384) por tener S A = s a adyacente á los ángulos A S B = a s b por ángulos planos del triedro y S A B= s a b por rectos. Por la misma razon el triángulo S A C es igual á s a c, y de esto se deduce que A B=a b, A C=a c y que el triángulo B S C igual á b s c por tener el ángulo E S F = e s f formado por los lados iguales S B = s b y S C = s c (385) luego B C = b c. Siendo respectivamente iguales los tres lados del triángulo A B C á los del triángulo a b c, estos dos triángulos serán iguales (386), por lo que el ángulo B A C=b a c; pero como estos ángulos son medida de los diedros formados sobre S D y s d, éstos tambien serán iguales. De la misma manera demostrariamos que los diedros segun S E y s e, y los segun S F y s f son iguales con tomar partes iguales sobre estas aristas y levantarles planos perpendiculares.

632.—*Dos triedros son iguales: 1° cuando tienen un ángulo diedro igual formado por dos ángulos planos respectivamente iguales y situados en el mismo órden; 2° cuando tienen un ángulo plano igual, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales situados de la misma manera; y 3° cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales dispuestos en el mismo órden.*

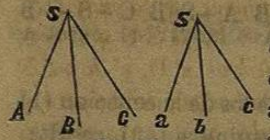

Figura 291.

1° Sea el ángulo diedro S A = s a (fig. 291) é iguales las caras que forman este diedro, esto es, ángulo A S C = a s c y A S B=a s b. Si aplicáramos el ángulo diedro S A sobre s a, por ser iguales los diedros, el plano S A B coincidiria sobre s a b, y el S A C sobre s a c, y por la igualdad de las caras la recta S B coincidiria con s b y S C con s c, así es que los dos triedros coincidirán en todas sus partes, y por lo mismo serán iguales.

2° Sea la cara A S B=a s b adyacente á los ángulos diedros A S igual á a s y B S igual á b s. Si sobrepusiéramos los ángulos A S B y a s b iguales, por la igualdad de los diedros adyacentes el plano A S C coincidiria con a s c, y el plano B S C con b s c, de lo que resulta que coincidiria la interseccion S C de los primeros con la s c de los últimos, y de esto se infiere la igualdad de los triedros en todas sus partes.

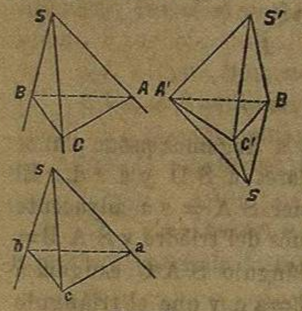

Figura 292.

3° Cuando los triedros tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, ya demostramos en el número 631 que sus ángulos diedros tambien son iguales; pero para que los triedros puedan sobreponerse se necesita que las caras respectivamente iguales estén dispuestas en el mismo órden. En la figura 292 los triedros S y s serán sobreponibles porque están formados no solo de caras iguales, sino dispuestas en el mismo órden; pero no es posible sobreponer los triedros S y S' en los que los ángulos iguales A S B=A' S' B, A S C= A' S' C' y B S C=B S' C' no están colocados de la misma manera. En efecto, para poder sobreponer el triángulo A B C sobre su igual

A' B C', se necesita invertir el triedro S y hacerlo tomar la posicion S A' B C', que como verémos más adelante (648), es *simétrica* con respecto á la de S'. Esta observacion de que la igualdad de todas las partes de un triedro no implica que puedan sobreponerse sino en el caso de que sus partes constitutivas, caras y diedros, estén agrupadas en el mismo órden, se refiere igualmente á las dos primeras condiciones de igualdad de los triedros.

En el número 634 considerarémos un 4° caso de igualdad de los triedros, y es cuando están formados por diedros iguales.

633.—*Si desde un punto* S (fig. 293) *tomado en el interior de un ángulo triedro* s' *se bajan perpendiculares* S A, S B *y* S C *sobre sus tres caras y se hacen pasar planos por las perpendiculares, se formará un segundo ángulo triedro* S *cuyos ángulos planos* A S B, B S C *y* C S A *son respectivamente suplementos de los ángulos diedros* s' D, s' E *y* s' F *opuestos del primer triedro* s'. *Recíprocamente las caras del triedro* s' *serán suplementos de los ángulos diedros del triedro* S.

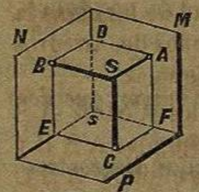

Figura 293.

En el número 627, considerando el cuadrilátero S A D B en el que los ángulos en A y en B son rectos, hemos demostrado que el ángulo A S B es suplemento del ángulo A D B que es la medida del diedro s' D, y como la misma demostracion es aplicable á los cuadriláteros S B E C y S C F A queda probada la proposicion directa.

Para demostrar que las caras del triedro s' son suplementos de los ángulos diedros segun S A, S B y S C, considerarémos el cuadrilátero D s' F A. Por pasar el plano A C por las rectas S A y S C perpendiculares á los planos M s' y P s', será perpendicular á la vez á ambos (622) y á su interseccion comun s' F (626), luego el ángulo A F s' es recto. Por pasar el plano A B por las perpendiculares S A y S B á los planos M s', y N s', será perpendicular á la vez á ambos y á su interseccion s' D, luego el ángulo s' D A es recto. Así es que

A F s'+F s' D+s' D A+D A F=4 rectos (445).
A F s'+s' D A=2 rectos.
restando resulta F s' D+D A F=2 rectos

pero F s' D es la cara del triedro s', y D A F es la medida del diedro A S, por ser esta arista perpendicular á M s' y por consiguiente á las rectas D A y A F que pasan por su pié.

Del mismo modo demostrariamos que las otras caras de s' son suplementos de los diedros opuestos de S.

Dos triedros tales como S y s' se llaman *suplementarios*, y un triedro cualquiera tiene siempre otro que le es suplementario.

Si llamamos d, d' y d'' los ángulos diedros del triedro s', segun las aristas E s', D s' y F s', y representamos por c, c' y c'' los ángulos B S C, B S A y A S C de las caras del triedro suplementario S, por ser igual á dos ángulos rectos $d+c$, $d'+c'$, y $d''+c''$, tendrémos:

$$d+d'+d''+c+c'+c''=6 \text{ rectos} \ldots (1)$$

y como (630) $\qquad c+c'+c''<4$ rectos

restando esta desigualdad de la ecuacion, resulta:

1° que $\qquad d+d'+d''>2$ rectos

y trasladando en la [1] tendrémos $d+d'+d''=6 \text{ rectos}-(c+c'+c'')$

lo que significa 2° que $\qquad d+d'+d''<6$ rectos

luego *la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

634.—*Dos ángulos triedros s y s' que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, serán iguales.*

Para que los triedros que hemos llamado s y s' sean iguales, tendrémos que deducir que los ángulos planos de sus caras lo son. Si llamamos S y S' dos triedros respectivamente suplementarios de s y de s'; siendo los ángulos diedros de s respectivamente iguales á los de s', los triedros S y S' tendrán sus caras respectivamente iguales, por ser estas caras suplemento de los ángulos diedros de s y de s', y por tanto [632—3°] los triedros S y S' serán iguales. Ahora bien: siendo iguales los ángulos diedros de S y S' las caras de sus suplementarios s y s' lo serán, que es lo que se debia demostrar.

635.—Un poliedro toma el nombre de *tetraedro* cuando está formado por la reunion de 4 planos; el de *pentaedro* cuando lo está por 5 planos; el de *exaedro* si lo forman 6; *eptaedro*, si lo forman 7 caras, etc.

636.—*Dos ángulos poliedros son iguales: 1° cuando tienen sus ángulos diedros iguales formados por ángulos planos respectivamente iguales y colocados de la misma manera; y 2° cuando tienen sus aristas paralelas y distribuidas en el mismo órden* (fig. 294).

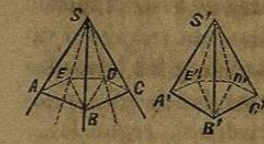

Figura 294.

1° Si los poliedros S y S' tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales formados por caras iguales dispuestas en el mismo órden, y si por una de sus aristas S B y S' B' tiramos planos á todas las demás, para probar que son iguales demostrarémos que lo son los triedros en que quedan descompuestos.

El triedro S A B E=S' A' B' E' por tener el diedro S A=S' A' formado por ángulos iguales A S B=A' S' B' y A S E=A' S' E' [632—1°] De esto resulta: 1° que el ángulo diedro A E S B=A' E' S' B', y 2°, que la cara E S B=E' S' B'.

Para demostrar que el triedro S E B D=S' E' B' D', tenemos: que si de los ángulos diedros A E S D=A' E' S' D' restamos los iguales

$$\text{A E S B}=\text{A' E' S' B'}$$

nos queda $\qquad$ B E S D=B' E' S' D'

formados por las caras iguales E S B=E' S' B' y E S D=E' S' D' luego [632—1°] los triedros que consideramos son iguales; pudiendo demostrarse lo mismo con los S B D C y S' B' D' C'.

2° Si las aristas de los poliedros S y S' son paralelas y están distribuidas en el mismo órden, los ángulos planos serán iguales [616], y por serlo éstos lo serán tambien los ángulos diedros de los triedros en que puedan descomponerse [631], luego serán iguales las partes de ambos poliedros.

637.—*La suma de los ángulos planos A S B, B S C.... (fig. 295) formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.*

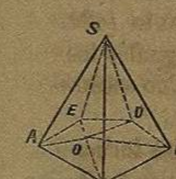

Figura 295.

Cortemos el poliedro por un plano A B C D E, tomemos en su interior un punto O y reuniéndolo con los vértices A, B, C.... resultarán en O y en S tantos triángulos como lados tiene el poliedro. Para simplificar

harémos la suma de los ángulos $\text{A O B}+\text{B O C}+\text{C O D}\ldots=\text{O}$

" " " $\qquad \text{A S B}+\text{B S C}+\text{C S D}\ldots=\text{S}$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, vamos á demostrar que $S<O$.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de todos los triángulos formados al rededor de O será igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es

$$O+E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots.=S+S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A\ldots.[1]$$

Por otra parte [629] $E\,A\,B<S\,A\,E+S\,A\,B$
$A\,B\,C<S\,B\,A+S\,B\,C$, etc.

sumando ordenadamente estas desigualdades

$$E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots.<S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A+S\,B\,C+\ldots.[2]$$

restando los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion [1] como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye [49], resulta que

ángulos en $O>S$

pero como los ángulos en O valen cuatro rectos, se infiere que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.

CUERPOS, O SOLIDOS REGULARES.

638.—*Se llaman cuerpos, ó sólidos regulares, los que están limitados por caras que todas son polígonos regulares iguales entre sí.*

Vamos á demostrar que solo pueden formarse *cinco cuerpos regulares;* fundándonos en que la suma de los ángulos planos de un poliedro tiene que ser menor que 4 rectos, y en que el valor del ángulo de un polígono regular se determina por la fórmula: [467—II] $A=\frac{2.90^\circ(n-2)}{n}$ en la que n representa el número de lados del polígono Por medio de esta fórmula se encuentra que el valor del

ángulo del triángulo equilátero	=	60°
,, del cuadrado	=	90°
,, del pentágono regular	=	108°
,, del exágono ,,	=	120°

Ahora bien: con 3 triángulos equiláteros se puede formar un ángulo sólido ó poliedro, supuesto que $3\times60^\circ=180^\circ<360^\circ$ ó 4 rectos.

El cuerpo sólido que resulta es el *tetraedro,* que tiene 4 caras triangulares y cada uno de sus ángulos poliedros lo forman tres triángulos equiláteros.

Con 4 triángulos equiláteros tambien puede formarse un ángulo sólido, porque $4\times60^\circ=240^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se le llama *octaedro* compuesto de 8 caras triangulares y cada uno de sus 6 ángulos poliedros consta de 4 triángulos.

Con 5 triángulos equiláteros todavia puede formarse un ángulo sólido, porque $5\times60^\circ=300^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se llama *icosaedro,* y está compuesto de 20 caras triangulares y cada uno de sus 12 ángulos poliedros consta de 5 triángulos.

Con 6 triángulos equiláteros no puede formarse un ángulo poliedro, porque como $6\times60^\circ=360^\circ$, en vez de poliedro resultaria una figura plana, y con más de 6 triángulos no puede formarse ningun ángulo poliedro supuesto que 60° por más de 6 da un producto mayor que 360°.

Con tres cuadrados sí puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times90^\circ=270^\circ<360$. El sólido regular que resulta es el *cubo* limitado por 6 cuadrados, y sus ocho ángulos poliedros formados por 3 cuadrados. Con cuatro ó más cuadrados no se puede formar un ángulo sólido, porque 90° multiplicado por 4 da 4 ángulos rectos y por más de 4 da un producto superior á 360°.

Con tres pentágonos regulares puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times108^\circ=324<360^\circ$. El cuerpo regular que resulta es el *dodecaedro pentagonal* compuesto de 12 caras, y sus 20 ángulos poliedros están formados por tres pentágonos regulares. Como $4\times108^\circ=432>360^\circ$, resulta que no puede formarse ningun poliedro con la reunion de 4 ni con mayor número de pentágonos.

El ángulo del exágono regular vale 120°, y como $3\times120^\circ=360^\circ$, resulta que ningun poliedro puede formarse con el exágono, sucediendo otro tanto con el heptágono, el octágono y demás polígonos regulares cuyos ángulos valen más que el del exágono.

En resúmen, se ve que no pueden formarse más que cinco cuerpos regulares que son el *tetraedro,* el *octaedro* y el *icosaedro* con el triángulo; el *cubo* con el cuadrado y el *dodecaedro pentagonal* con el pentágono.

Darémos las siguientes reglas para determinar el número de aristas y el de los vértices de cualquiera de los cinco cuerpos regulares, conociendo la especie y el número de sus caras.

Para determinar el número total de aristas de un cuerpo regular, multiplíquese el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado, y tómese la mitad.

Tomando separadamente las caras del sólido regular que se considera, la suma de las aristas seria el producto de las aristas de una cara por el número de caras; pero como cada arista es comun á dos caras; es preciso tomar la mitad de ese producto para obtener las aristas del cuerpo.

Para determinar el número de vértices ó ángulos poliedros de un cuerpo regular, multiplíquese el número de ángulos de cada cara por el de caras que limitan el cuerpo, y divídase el producto por el número de caras que forman cada vértice.

El número de ángulos planos de un cuerpo regular, es igual al producto del número de ángulos de cada cara por el de sus caras, y como en cada ángulo poliedro concurren cierto número de caras, resulta que el número de ángulos poliedros será igual al primer producto dividido por el número de caras que forman cada vértice.

SEMEJANZA DE LOS CUERPOS SOLIDOS.

639.—*Se llaman cuerpos ó poliedros semejantes los que tienen sus caras semejantes, sus aristas proporcionales é iguales tanto sus ángulos diedros como sus poliedros.*

640.—*Dos tetraedros S A B C y S' A' B' C' (fig. 296) son semejantes cuando tienen un ángulo diedro igual, A B = A' B', formado por dos caras semejantes colocadas de la misma manera.*

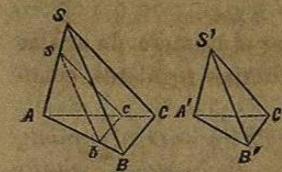

Figura 296.

Si sobrepusiéramos el tetraedro S' A' B' C' poniendo A' en A, A' B' sobre A B y el plano A' B' C' sobre A B C, á causa de la igualdad de los ángulos diedros A B y A' B', la cara A' B' S' coincidiria con el plano de la A B S, y por la semejanza de las caras, siendo iguales sus respectivos ángulos, A' S' caerá sobre la arista A S, B' S' segun b s paralela á B S, y B' C' segun b c igualmente paralela á B C; pues el ángulo A B S = A' B' S' y A B C = A' B' C'. Así es que el tetraedro S' A' B' C' definitivamente coincidirá con s A b c.

Ahora bien, el plano b s c que pasa por b s paralela á B S y por b c paralela á B C determina una cara paralela á S B C, y la interseccion s c será paralela á S C. Así es, que las caras todas de los tetraedros serán semejantes, y por esto proporcionales sus aristas. Los diedros son iguales porque están coincidiendo ó formados por planos paralelos, y los respectivos triedros son iguales por estar formados por ángulos planos iguales distribuidos en el mismo órden (632—3°).

Se ve que *un plano s b c paralelo á una de las caras de un tetraedro, determina otro que le es semejante.*

641.—*Dos tetraedros son semejantes cuando lo son las caras de que están formados.*

De la semejanza de las caras se deduce que las aristas son proporcionales, así como que los ángulos planos de los triedros son iguales. Siendo iguales estos ángulos [631] lo serán los ángulos diedros y tambien los ángulos triedros [632—3°]

642.—*Se llama pirámide un cuerpo S A B C D E* [fig. 297] *limitado por un polígono cualquiera A B C D E, que le sirve de base, y por triángulos S A B, S B C.... que concurren en un mismo punto S, llamado vértice de la pirámide.*

Las aristas S A, S B.... [fig. 297] *de una pirámide quedan cortadas en partes proporcionales por dos planos paralelos A C y a c.*

Siendo paralelos los planos A C y a c, lo serán las rectas A B y a b, B C y b c.... [604] intersecciones de los planos de las caras de la pirámide con los planos A C y a c. Estas rectas paralelas dan [510]:

S A : S a :: S B : S b :: A B : a b
S B : S b :: S C : S c :: B C : b c
S C : S c :: S D : S d :: C D : c d
etc.

y como estas proporciones tienen una razon comun, se infiere:

1° $SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc \ldots.$

que es lo que se queria demostrar;

y 2° $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd \ldots.$

esto es, *los lados de los polígonos que resultan en una pirámide por la interseccion de dos planos paralelos, son proporcionales.*

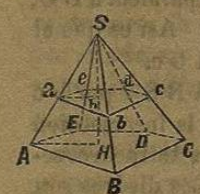

Figura 297.

643.—*Si una pirámide* S (fig. 297) *se corta por un plano* a c *paralelo á su base, resultará un polígono* a b c d e *semejante á la base* A B C D E.

Acabamos de ver que los lados de los polígonos A B C D E y a b c d e son proporcionales, y como además los ángulos cuyos vértices quedan en la misma arista son iguales por estar formados por lados paralelos (616), serán semejantes.

644.—*Las áreas de los polígonos que resultan cortando una pirámide S* (fig. 297) *por dos planos paralelos, son proporcionales á los cuadrados de sus distancias S H y S h al vértice.*

Por ser los polígonos semejantes, se tiene (519):

$$\text{sup. de } ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2 \ldots. \quad (1)$$

Bajando la perpendicular S H sobre los planos paralelos, y tirando las rectas A H y a h, resultan los triángulos semejantes S A H y S a h, que dan:

$$SA : Sa :: SH : Sh$$

por otra parte $\quad SA : Sa :: AB : ab$

luego $\quad SH^2 : Sh^2 :: AB^2 : ab^2 \ldots. \; [2]$

suprimiendo la razon comun en las proporciones [1] y [2] se tiene:

áreas $\quad ABCDE : abcde :: SH^2 : Sh^2$

que es lo que se debia demostrar.

645.—*Toda pirámide S A C* (fig. 297) *cortada por un plano a c paralelo á su base, da otra pirámide S a c semejante á la primera.*

Las caras de las dos pirámides son semejantes, por lo cual todas sus

aristas son proporcionales. Siendo iguales los ángulos planos de las caras que constituyen cada ángulo poliedro, serán iguales los ángulos de los triedros en que pueden descomponerse, haciendo pasar planos por el vértice S y los ángulos de la base [631], y los poliedros mismos serán iguales por estar formados de diedros y caras iguales colocadas de la misma manera [636].

646.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *formadas por caras semejantes y dispuestas en el mismo órden, son semejantes.*

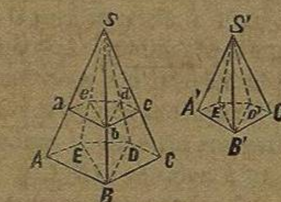

Figura 298.

Por la semejanza de las caras serán proporcionales las aristas é iguales los ángulos planos que forman los poliedros. De esta igualdad de los ángulos planos se origina naturalmente la de los ángulos diedros de los triedros en que pueden descomponerse las pirámides, haciendo pasar planos por los vértices S y S' y los ángulos de las bases [631], y á su vez la de los poliedros. Así, por ejemplo, la igualdad de las caras que constituyen los poliedros S y S' produce la de los diedros; luego los poliedros S y S' serán iguales [636], y si los sobrepusiéramos en S a c, siendo proporcionales las aristas, los planos A C y a c serian paralelos, y por esto semejantes las pirámides S A C y S' A' C'.

647.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *serán semejantes si están formadas de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.*

Al ser los tetraedros S A E B, S B E D y S B D C respectivamente semejantes á los S' A' E' B', S' B' E' D', etc., las caras que forman los poliedros S y S' serán semejantes, por lo cual los ángulos planos serán iguales y las aristas proporcionales, de lo que se deduce que los ángulos diedros y los triedros de las pirámides serán iguales, y por lo mismo semejantes las pirámides que consideramos.

Como lo que hemos dicho y demostrado de las pirámides es aplicable á todos los poliedros, se infiere:

1° Que dos poliedros serán semejantes cuando tengan sus caras semejantes dispuestas en el mismo órden, formando ángulos diedros iguales.

2° Que dos poliedros son semejantes cuando tirando respectivamente de sus ángulos sólidos homólogos planos que pasen por sus aristas, quedan compuestos de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.

3° Recíprocamente, los poliedros semejantes pueden descomponerse en pirámides semejantes, haciendo pasar planos por dos de sus ángulos homólogos y sus respectivas aristas.

FIGURAS SIMETRICAS.

648.—Dos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un punto* o cuando las distancias o A y o A' son iguales. El punto o se llama *centro de simetría* [fig. 299].

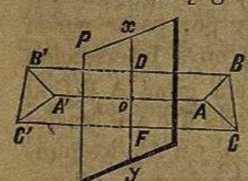

Figura 299.

Se dice que los puntos A y A' son *simétricos respecto á una recta ó eje de simetría* x y, cuando x y divide en dos partes iguales la recta A A' y le es perpendicular.

Los mismos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un plano de simetría* P, cuando la recta A A' es perpendicular al plano P, y éste la divide en dos partes iguales.

Se llaman *figuras simétricas* respecto á *un centro, á un eje ó á un plano,* aquellas cuyos puntos son de dos en dos simétricos con relacion á este centro, á este eje ó á este plano.

649.—*Dos figuras simétricas con relacion á un eje son iguales.*

Si, por ejemplo, tenemos el triángulo A B C simétrico con A' B' C' é hiciéramos girar la parte A B C al rededor de D o F, cada uno de los puntos A, B, C coincidirá con sus simétricos A', B' y C' al girar 180°, supuesto que B D es perpendicular á D o F é igual á D B' sucediendo otro tanto con o A y F C respecto á o A' y á F C'.

650.—*La simetría con relacion á un punto ó á una recta, envuelve siempre la condicion de simetría con respecto á un plano.*

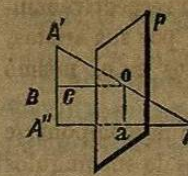

Figura 300.

En efecto, sean A y A' dos puntos simétricos con relacion al centro o (fig. 300). Hagamos pasar un plano P por o y tiremos B o perpendicular al plano. Vamos á demostrar que el punto A'', simétrico de A', con respecto al eje B O lo es igualmente de A con relacion al plano P.

Sea a el punto donde A A'' encuentra al plano P. Siendo C el medio de A' A'' y o el medio de A A', A A'' será paralela á o C (511), y por consiguiente perpendicular al plano P. La recta o a perpendicular á o C será paralela á A' A'', y como pasa por la mitad de A A', el punto a será igualmente el medio de A A''; luego los puntos A y A'' son simétricos con relacion al plano P.

Se ve, pues, por una parte, que la simetría de los puntos A y A' respecto á un centro, produce la simetría respecto á un plano, y por otra que la simetría de A'' y A' con relacion á un eje B o, envuelve igualmente la simetría respecto al plano entre A'' y A. Ahora, como lo que se ha probado de un punto es aplicable á todos los de una figura, resulta que nos bastará ocuparnos de la simetría con relacion á un plano.

651.—*Si tres puntos A, B y C* (fig. 301) *están en línea recta, sus simétricos A', B' y C' con relacion á un plano lo estarán igualmente.*

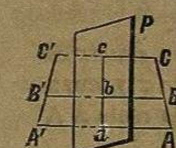

Figura 301.

Las rectas A A', B B' y C C', por ser perpendiculares al plano P, serán paralelas, y por pasar por la recta A B C determinan un plano cuya interseccion con P es la recta a b c. Si se hiciera girar A B C al rededor de a c por ser perpendiculares á c a é iguales las rectas C c y c C', b B y b B', a A y a A', los puntos A, B y C caerian sobre A', B' y C', y estando los primeros en línea recta, se infiere que tambien lo estarán sus simétricos.

652.—En consecuencia, *para que dos rectas sean simétricas, basta que lo sean dos de sus puntos.*

653.—Se deduce tambien (651) *que la distancia de dos puntos es igual á la de sus simétricos.*

654.—*Cuando cuatro puntos A, B, C y D* (fig. 302) *están en un mismo plano, sus simétricos A' B' C' y D' tambien estarán en un plano.*

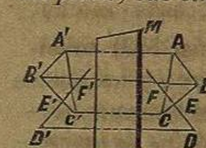

Figura 302.

Tiremos la recta D F que encuentre á B C y á C A en E y en F. Estando D, E y F en línea recta lo estarán igualmente sus simétricos D', E' y F'; pero E' como simétrico de E estará sobre la recta B' C' y F' sobre A' C', luego D' que pertenece á la