recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c* (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

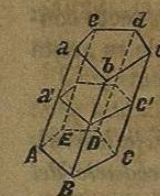

Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A a por el perímetro de la seccion* a' b' c' d' (figura 304) *perpendicular á ésta.*

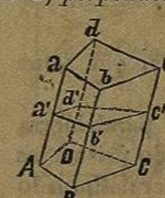

Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las bases iguales a c con A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

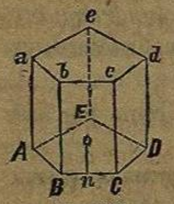

Figura 305.

La primera parte no necesita demostracion.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d [fig. 305], p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este perímetro, tendrémos:

$$A = A a \times p + 2. p \times \tfrac{1}{2} r = p (A a + r)$$

que es lo que se debia demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

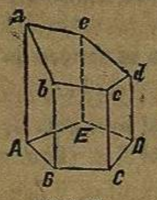

Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la seccion hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

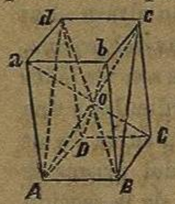

Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales, pero por ser paralelipípedo el sólido serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razon del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela á A B. Por ser

B c paralela á A d, será B b paralela á A a; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posicion y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

664.—*La seccion A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d,* a *C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la seccion A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la seccion D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*

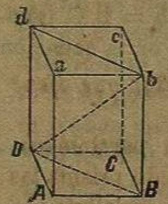

Figura 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirian. Por la misma razon el triedro c coincidiria con el a, y siendo comun á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig, 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*

Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D b^2 = B b^2 + D B^2 \ldots. \quad (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D B^2 = D A^2 + B A^2 \ldots. \quad (2)$$

sustituyendo en la ecuacion (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D b^2 = B b^2 + B C^2 + B A^2 \ldots. \quad (3)$$

que es lo que se debia demostrar.

Como las aristas de los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectángular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*

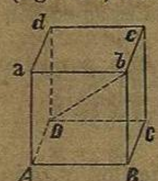

Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volúmen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuacion (3) del párrafo anterior resulta:

$$D b^2 = 3 A B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolucion la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*

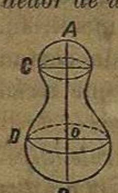

Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la línea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su interseccion una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas A B y a b* (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

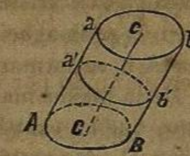

Figura 311.

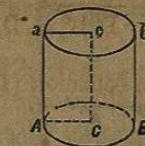

Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo,* y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera seccion paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotacion de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz A a* (fig. 311) *por la longitud de la curva a' b' de la seccion que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideracion *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el rádio de su base, h su altura y π la razon de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresion del área lateral del cilindro recto será:

$$S = 2 \pi r h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral mas la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresion:

6 $$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$
$$S = 2\pi r (h + r)$$

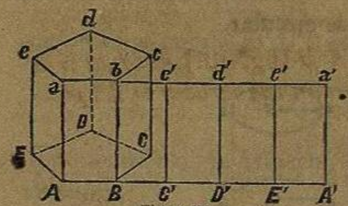
Figura 313.

674.—Si en el prisma A d [figura 313] concebimos que la cara B c gira al rededor de la arista B b hasta colocarse en la prolongacion del plano de la cara A b se formará el rectángulo A c'. De la misma manera, si nos imaginamos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongacion del plano de la primera cara A b, resultaria la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, pues una y otra tienen por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b [fig. 314] tambien puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual a

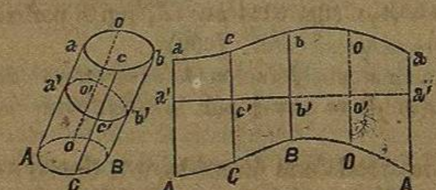
Figura 314.

la curva que daria la seccion hecha perpendicularmente á la generatriz A a, que es a' c' b' o' a'; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de division a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A =a' A, c 'c = c' c, c' C = c, C.... y se tendrá la área A a'' terminada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide S A D* [fig. 315] *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono A B C D.... de su base.*

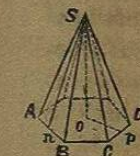
Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular S A D* (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema S n.*

Se llama *apotema, la altura S n de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2} S n (A B + B C + \ldots.)$$

y si llamamos s esta área, el apotema S n=A, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $= s = \frac{1}{2}$ p A.

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\frac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $=S=\frac{1}{2}$ p A$+\frac{1}{2}$ p r

ó ,, ,, ,, $=S=\frac{1}{2}$ p (A+r)

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base A D y la seccion hecha por un plano a d* (fig. 316) *que le es paralelo.*