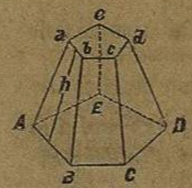

Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B+a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C.... +a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide S A B* (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental sólo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.

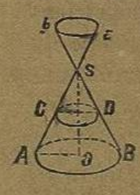

Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con el otro extremo la circunferencia A B, la cual traza otra capa cónica superior S a b que rara vez se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razon (669) cualquiera seccion C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz S A por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

$$\text{área lateral del cono} = s = \pi \text{ r A}.$$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

$$\text{área total del cono} = S = \pi \text{ r A} + \pi \text{ r}^2 = \pi \text{ r (A+r)}$$

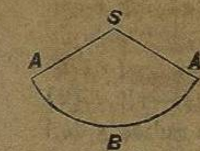

Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo rádio es la generatriz S A de la figura 317, y el arco A B A' es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono segun una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaria un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vértice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresion, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A×A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A', observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y *r* para el radio A O de la base; y representando por *x* el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

longitud del arco A B A'$=2\,\pi$ r

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporcion:

circf. A S : arco A B A' :: 360° : x

$$2\,\pi\,\text{A} : 2\,\pi\,\text{r} :: 360° : x° = \frac{\text{r. } 360°}{\text{A}}$$

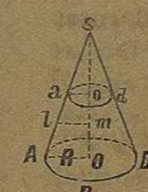

Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto A D b a* (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz A a por la semisuma de las circunferencias de sus bases A D y a b.*

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es $2\,\pi$ R, r el radio de la base superior cuya circunferencia es $2\,\pi$ r, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D ménos la del cono S a b. Representándola por T tendrémos [679]

$$T=\pi R.\ SA-\pi r.\ Sa\ldots.[1]$$

$$SA=l+Sa \text{ y } SA-Sa=l$$

sustituyendo $T=\pi R\ (l+Sa)-\pi r\ Sa=\pi R l+\pi Sa\ (R-r)\ldots.[2]$

Vamos á determinar el valor de S a en funcion de los radios y de l para sustituirlo en esta ecuacion. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: SA : Sa$$

Dividiendo $\quad R-r : r :: SA-Sa : Sa=\frac{r\,l}{R-r}$

sustituyendo en la ecuacion [2]

$$T=\pi R l+\frac{\pi r l}{R-r}[R-r]$$

reduciendo y sacando l como factor comun, se tiene por último:

$$T=l\,[\pi R+\pi r]\ldots.[3]$$

que es lo que se debia demostrar.

Considerando el trapecio a o O A [459], en el que l es el medio de A a, se tiene: $\quad l\,m=\frac{1}{2}\,[R+r]$

multiplicando por 2π $\quad 2\pi.\ l\,m=\frac{1}{2}\,[2\pi R+2\pi r]$

$$2\pi.\ l\,m=\pi R+\pi r$$

sustituyendo en la ecuacion [3] resulta:

$$T=l\times 2\pi.\ l\,m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo A O B N* [fig. 320] *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior C llamado centro.*

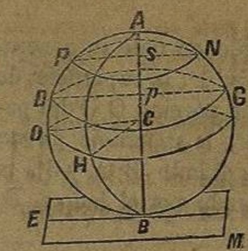

Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales,* porque todos tienen por rádio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su direccion, corta la esfera segun un círculo. Si este plano fuera por ejemplo F N, levantando el diámetro A B perpendicular, podria suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A F O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente (669) la seccion hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. F N y D G son círculos menores.

Se llama zona la parte de la superficie de la esfera F D G N comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.

Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera F N A limitada por una circunferencia F N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como M* (fig. 320), *no tiene mas que un punto B de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su rádio, resulta que el rádio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener mas que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente al punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular A B C....* (fig. 321) *gira al rededor del diámetro A O del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la parte del perímetro que se considera sobre el eje A O de revolucion.*

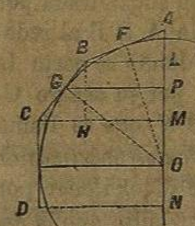

Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, consideraremos tres casos: 1º, la superficie de un cilindro engendrada por una porcion C D del polígono paralela al eje A O; 2º, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3º, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1º La superficie del cilindro originado por la rotacion de C D tiene por valor (672): circf. D N×C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O×M N, que es lo que expresa el principio que vamos demostrando.

2º La superficie de trozo de cono engendrado por la rotacion de B C al rededor del eje tiene por medida (680):

$$C B \times \text{circf. } G P \dots . \ (1)$$

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:

$$C B : B H :: G O : G P$$
$$G O : G P :: \text{circf. } G O : \text{circf. } G P$$
luego $$C B : L M :: \text{circf. } G O : \text{circf. } G P$$

formando el producto de extremos y medios

$$C B \times \text{circf. } G P = \text{circf. } G O \times L M$$

y como el primer miembro de esta ecuacion es la área lateral del trozo de cono, se ve que esta segun lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando:

3º La superficie del cono engendrado por la rotacion de A B al rededor del eje tiene por valor (679):

$$\tfrac{1}{2} \text{ circf. } B L \times A B \dots . \ (2)$$

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L=A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

$$A L : A F :: B L : F O$$
$$B L : F O :: \text{circf. } B L : \text{circf. } F O$$
luego: $$A L : A F :: \text{circf. } B L : \text{circf. } F O$$

formando el producto de los medios y de los extremos

$$\text{circf. } B L \times A F = \text{circf. } F O \times A L$$
sustituyendo $$\text{circf. } B L \times \tfrac{1}{2} A B = \text{circf. } G O \times A L$$

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuacion, que es la expresion algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posicion del lado del polígono generador de la superficie, el valor de ésta se determina por la regla que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados la superficie que engendra es la de la esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podremos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona F D G N (fig. 320) la representamos por h, tendremos:

área de la zona esférica $= s = 2 \pi R. h$

En el casquete esférico si representamos por a su altura s A, tendremos:

área del casquete esférico $= s = 2 \pi R. a$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

la área de la esfera $= S = 2 \pi R. = 4 \pi R^2$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendremos por expresion del área de la esfera:

$$S = \pi D^2$$

Se llama *huso á la porcion de la superficie de la esfera* A O B H A (fig. 320) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro comun A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de division se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendremos: sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo luego, *la superficie de un huso es igual á la de la esfera multiplicada por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo del huso y* 360°

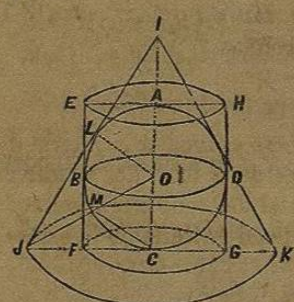

Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relacion que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera $= S = 4 \pi R^2$.

Respecto al cilindro [672] tenemos:

2° área lateral del cilindro $= S' = 2 \pi R \times 2 R = 4 \pi R^2$

3° área total del cilindro $= S'' = 4 \pi R^2 + 2 \pi R^2 = 6 \pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por establecer el valor del rádio de su base J C, que por razon del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J, en funcion del rádio de la esfera. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo

O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M = 60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J = 30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J = M C = R. Por último se tendrá, J O = 2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$J C^2 = J O^2 - O C^2$$

y sustituyendo $\quad J C^2 = 4 R^2 - R^2 = 3 R^2$

por otra parte $\quad 2 J C = J I$

Ahora bien: la área total del cono [679] es

$$S''' = \pi J C [2 J C + J C] = 3 \pi J C^2$$

y sustituyendo $\quad S''' = 9 \pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $= 4 \pi R^2$
la lateral del cilindro $= 4 \pi R^2$
la total del cilindro $= 6 \pi R^2$
y la total del cono $= 9 \pi R^2$

De lo que resulta: 1° que la área de la esferra es igual á la lateral de cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito; y 4° que la área del cilindro es media proporcional entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6 \pi R^2 = \sqrt{4 \pi R^2 \times 9 \pi R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s''.... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S', S''.... las de su semejante: l, l', l''.... las líneas del primer poliedro, y L, L', L''.... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene [579]:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

Por ser las caras semejantes, tendremos:

$$l : L :: l' : L' :: l'' : L''....$$

elevando al cuadrado $l^2 : L^2 :: l'^2 : L'^2 :: l''^2 : L''^2....$

luego $s : S :: s' : S' :: s'' : S''... :: l^2 : L^2$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente [318—8°] resulta:

$$s + s' + s''... : S + S' + S'' + ... :: l^2 : L^2$$

que es lo que se queria demostrar.

Las áreas de dos cilindros engendrados por rectángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los de sus radios.

Si representamos por s y S las áreas laterales de los cilindros, por r y R los radios de sus bases, y por h y H sus respectivos alturas. Como los rectángulos generadores tienen por lados los radios y las alturas, y por el supuesto son semejantes, tendremos:

$$h : H :: r : R$$

por otra parte $s : S :: 2\pi r h : 2\pi R H....$ [1]

multiplicando ordenanamente, y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

y si la proporcion [1] se multiplica por la siguiente:

$$r : R :: h : H$$

resulta: $s : S :: h^2 : H^2$

que es lo que se debia demostrar.

Las áreas laterales de los conos engendrados por triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices y á los de sus radios.

Representando por s y S las áreas laterales de los conos, por a y A sus respectivas generatrices, y por r y R los radios de sus bases: siendo los triángulos generadores semejantes, cuyas hipotenusas y catetos homólogos son a, A y r, R, se tiene:

$$a : A :: r : R$$

por otra parte [679] $s : S :: \pi r a : \pi R A$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

elevando al cuadrado los términos de la 1ª proporcion:

$$a^2 : A^2 :: r^2 : R^2$$

se tiene igualmente $s : S :: a^2 : A^2$

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los de sus diámetros.

Siendo la área de la esfera $= 4\pi R^2 = \pi D^2$, [684] si representamos por s y S las áreas de las esferas, por r y R sus radios, y por d y D sus respectivos diámetros, se tiene:

$$s : S :: 4\pi r^2 : 4\pi R^2 :: \pi d^2 : \pi D^2$$

y suprimiendo los factores comunes resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2 :: d^2 : D^2$$

687.—Problemas.—I.—*Determinar la superficie lateral de un prisma recto de base pentagonal, cuyo lado es de 8 centímetros y su arista tiene tres metros y medio.*

Para que la superficie esté valuada en una unidad dada, comenzarémos por expresar las dimensiones del prisma en la misma unidad lineal, en metros ó en centímetros. Adoptando la primera, tendrémos que el perímetro de la base será $= \overset{m}{0}'08 \times 5 = 0'40$.

La arista del prisma $= \overset{m}{3}'50$, y por último, la área lateral será

$$s = \overset{m}{0}'40 \times 3'50 = \overset{m.\,cd.}{1}'40$$

un metro cuadrado y 40 centésimos de metro cuadrado.

Si hubiésemos adoptado por unidad lineal el centímetro, la superficie la habriamos obtenido en centímetros cuadrados, é igual 1400 centímetros cuadrados.

II.—*Se quiere determinar el lado de un cubo cuya diagonal mide* $\overset{m}{5,1961}$.

Si llamamos l el lado del cubo y d su diagonal, hemos visto [668] que

$$d^2 = 3\,l^2$$

despejando á l y sustituyendo por d su valor, se tiene:

$$l = \sqrt{\frac{5{'}1961^2}{3}} = 3 \text{ metros próximamente.}$$

III.—*Determinar la área total de un cilindro recto, cuya altura es de* $\overset{m}{1{'}8}$ *y el radio de su base* $\overset{m}{0{'}6}$.

La fórmula correspondiente [673] es:

$$s = 2\,\pi\,r\,[h + r]$$

sustituyendo los valores del problema

$$s = 2 \times 3{'}141593 \times \overset{m}{0{'}6} \times \overset{m}{1{'}8} = \overset{m.\,cd.}{6{'}78584}$$

IV.—*Determinar la superficie lateral de una pirámide exagonal recta y regular, en la que el lado de la base es de 3 pulgadas y su apotema tiene 11 pulgadas.*

El perímetro de la base será $3 \times 6 = 18$ pulgadas, y la área lateral [676] es:

$$s = \tfrac{1}{2}\,p.\,A = \tfrac{1}{2}\,18 \times 11 = 99 \text{ pulg. cuadradas.}$$

V.—*Determinar la superficie lateral de un trozo de pirámide regular cuadrangular, en la que los lados de las bases son $2\frac{1}{2}$ piés y 2 piés, y la altura de uno de los trapecios que le sirve de cara 1 pié y 9 pulgadas.*

El perímetro de la base inferior será $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ piés.

El perímetro de la base superior $2 \times 4 = 8$ piés.

La área lateral del trozo será $= \frac{1}{2}\,[10 + 8]\,1{'}75 = 15{'}75$ piés cuadrados.

VI.—*Determinar la superficie total de un cono recto cuya generatriz es de* $\overset{m}{11{'}25}$, *y el rádio de su base* $\overset{m}{4{'}72}$.

La fórmula correspondiente [679] es:

$$S = \pi\,r\,(A + r)$$

sustituyendo $\quad S = 3{'}141593 \times 4{'}72 \times 15{'}97 = \overset{m\,cd.}{236{,}808}$

VII.—*Calcular la superficie de una zona glacial de la tierra, que es un casquete esférico cuya altura aproximada es de 526'6 kilómetros y el rádio de la esfera 6 367 kilómetros.*

La fórmula correspondiente (684) es

$$s = 2\,\pi\,R\,a$$

sustituyendo: $\quad s = 2 \times 3{'}141593 \times \overset{\text{kilóms.}}{6367} \times \overset{\text{kilóms.}}{526{'}6}$

$\qquad = 21\ 066\ 657$ kilómetros cuadrados.

VIII.—*Determinar la superficie de una de las zonas templadas de la tierra, siendo su altura 3 305 kilómetros, y el radio de la esfera 6 367 kilómetros.*

La fórmula respectiva (684) es:

$$s = 2\,\pi\,R\,h$$

sustituyendo $\quad s = 2 \times 3{'}141593 \times 6367 \times 3305$

próximamente $\quad = 132\ 216\ 674$ kilómetros cuadrados ó miriaras.

IX.—*Dado el radio de una esfera, que es de 6 367 kilómetros, determinar su superficie.*

Para resolver este problema haremos uso de la fórmula:

$$S = 4\,\pi\,R^2 \quad (684)$$

sustituyendo $\quad S = 4 \times 3{'}141593 \times 6\,367^2$

próximamente $\quad = 509\ 424\ 070$ kilómetros cuadrados.

X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de 282 743'37 metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi\,D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\dfrac{282743{'}37}{3{'}141593}} = 300$ metros.
