**Volúmen de los cuerpos.**

688.—*Volúmen es la extension en sus tres dimensiones, longitud, latitud y grueso.*

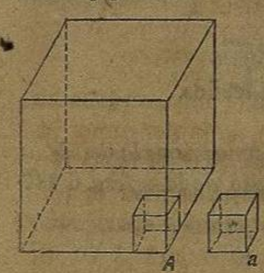

Figura 323.

El volúmen de un cuerpo es la extension comprendida entre las superficies que lo limitan. Así como la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea tomada por unidad y determinando el número de veces que está contenida en ella, para valuar un volúmen es necesario averiguar cuántas veces contiene á la unidad de volúmen. Al explicar el sistema de pesos y medidas (182 y 185) dijimos que la unidad de volúmen es el *cubo,* que tiene la unidad lineal por lado. Así, por ejemplo, si el cubo a (figura 323) representa la unidad de volúmen, y quisiéramos determinar el volúmen del cuerpo A, tendriamos que averiguar cuántas veces el primer cubo cabe en el segundo. En la figura de que nos servimos, pueden colocarse en la base del cubo A 16 cubos iguales á a, y cabiendo 4 hiladas, una encima de otra, de 16 cubos, diriamos que el volúmen del cuerpo A es de 64 medios centímetros cúbicos; porque es el medio centímetro cúbico el volúmen que en este caso hemos tomado por unidad. La medida ó valuacion de volúmenes raras veces puede hacerse si no es valiéndose de métodos indirectos.

*Cuerpos equivalentes en volúmen son los que tienen volúmenes iguales.* Así, por ejemplo, un paralelipípedo, en el que quepan 64 cubos iguales á a, será equivalente á A, sin ser igual ni aun semejante á este cuerpo.

689.—*Dos paralelipípedos de la misma base é igual altura, son equivalentes en volúmen.*

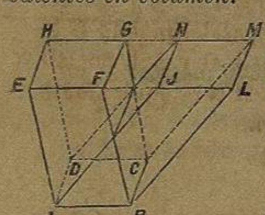

Figura 324.

Siendo las bases iguales, siempre se podrán hacer coincidir como en la figura 324, en A C, y por ser iguales las alturas, las otras bases E G y J M quedarán en el mismo plano H L.

Esto supuesto, pueden ocurrir dos casos:

1° Cuando quedan en un mismo plano las caras A F y A L de los dos prismas, los triángulos E A J y F B L son iguales por tener





iguales los ángulos en A y en B, formados por lados respectivamente iguales como lados opuestos de paralelógramos. Ahora bien: los prismas E A J H y F B L G, que tienen los expresados triángulos E A J y F B L por bases, son sobreponibles por tener todos sus elementos iguales, y si del sólido total B D H L se quitan sucesivamente los prismas triangulares iguales E A J H y F B L G, nos quedarán los paralelipípedos B D N L y B D H F, que serán equivalentes.

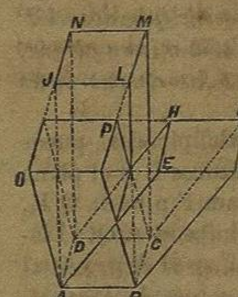

Figura 325.

2° Cuando no quedan en el mismo plano las caras A F y A L (fig. 325), si prolongamos los lados de las bases superiores E F, G H, J N y LM, por sus respectivas intersecciones se formará el paralelógramo O P igual á ellas, y por consiguiente igual á la base comun A C. Si unimos los vértices de O P con los de la base A C, se formará un nuevo paralelipípedo A P que se hallará en las circunstancias del 1er. caso con los paralelipípedos A G y A M, y será equivalente á cada uno de ellos, luego estos paralelipípedos A G y A M serán tambien equivalentes entre sí.

690.—*Un paralelipípedo cualquiera puede trasformarse en otro rectangular recto que sea equivalente á él.*

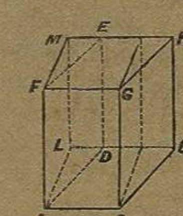

Figura 326.

En los vértices de la base A B C D (fig. 326) del paralelipípedo dado, levantemos perpendiculares á la base, iguales á la altura del mismo paralelipípedo, y se tendrá otro paralelipípedo A C H E F recto y equivalente al propuesto, que, para evitar confusion, no hemos representado en la figura. En seguida levantemos en A y B perpendiculares á A B, y sobre el rectángulo A J construiremos el paralelipípedo B M equivalente á B E, por tener ambos la misma base A G y A L por altura; luego el paralelipípedo recto y rectangular B M será equivalente al propuesto, que no se ha representado en la figura.

691.—*Dos paralelipípedos rectangulares de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

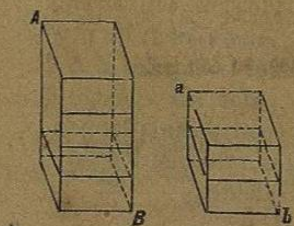

Figura 327.

Puede suceder que las alturas de los dos paralelipípedos sean conmensurables ó inconmensurables, y en uno ó en otro caso haciendo pasar planos por los puntos de division, resultarian paralelipípedos iguales (fig. 327), y repitiendo el raciocinio que hicimos en el número 557 con las figuras 234 y 235, fácilmente demostrariamos la verdad del teorema.

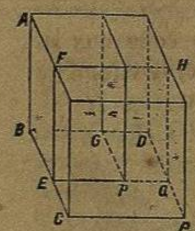

Figura 328.

692.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos A P y A p* (fig. 328) *rectangulares de la misma altura, son proporcionales á las superficies de sus bases B P y B p.*

Siendo rectangulares los paralelipípedos, puede hacerse coincidir uno de sus triedros B y el plano de sus bases. Prolonguemos la cara F p hasta Q H, y nos resultará un nuevo paralelipípedo A Q. Llamarémos P al paralelipípedo A P, p al A p, y Q al A Q. Comparando P con Q, que tienen la misma base A D, se tiene [691]:

$$P : Q :: BC : BE$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base B F, se tiene:

$$Q : p :: BD : BG$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta:

$$P : p :: BC \times BD : BE \times BG$$

que es lo que se queria demostrar.

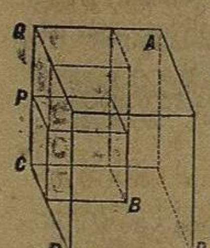

Figura 329.

693.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos rectangulares cualesquiera A P y B p* (fig. 329), *son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si prolongamos las caras del paralelipípedo B p, nos resultará uno nuevo B Q. Llamando P al paralelipípedo A P, p al B p, y Q al B Q, tendrémos, comparando P con Q, que tienen la misma altura:





$$P : Q :: CD : CB$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base, se tendrá:

$$Q : p :: CQ : Cp$$

multiplicando las proporciones, resulta:

$$P : p :: CD \times CQ : CB \times Cp$$

que es lo que se debia demostrar.

694.—Si en la última proporcion p nos representa un cubo que se tome como unidad de volúmen, por lo que sus lados serán iguales á la unidad de longitud, la expresada proporcion se cambia en

$$P : 1 : CD \times CQ : 1 \times 1$$

luego

$$P = CD \times CQ$$

Esto es, *cuando se toma por unidad de volúmen el cubo que tiene por lado la unidad lineal, el volúmen de un paralelipípedo rectangular recto tiene por valor el producto de su base por su altura;* pero debe tenerse presente que las cantidades que forman la última ecuacion son números abstractos que representan relaciones con la unidad respectiva. P representa el número de veces que el paralelipípedo que se considera contiene al cubo que se ha tomado por unidad, y expresará metros cúbicos, varas cúbicas, pulgadas cúbicas, segun que sus dimensiones se hayan estimado respectivamente en metros, en varas ó en pulgadas. La base C D expresará las veces que la unidad superficial está contenida en ella; y por último, la altura C Q expresará las veces que la unidad lineal está contenida en dicha altura. Además el número P que representa el volúmen, tiene que estar indicado en la unidad correspondiente á la lineal que ha servido para estimar las dimensiones del paralelipípedo. Por ejemplo, si éstas se han tomado en metros, el volúmen resultará valuado en metros cúbicos; si se han tomado en decímetros, el volúmen resultará en litros; si se han tomado en piés, el volúmen resultará en piés cúbicos, etc.

Siendo el *cubo* un paralelipípedo recto cuyos lados son iguales, *su volúmen tiene por valor la 3ª potencia de uno de sus lados.* De aquí la denominacion de cubo á la 3ª potencia.

Como el volúmen de un paralelipípedo oblícuo es equivalente al de uno recto rectangular de la misma altura y de base equivalente [689], resulta: que *el volúmen de un paralelipípedo cualquiera tiene por valor el producto de su base por su altura.*

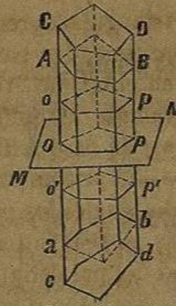


Figura 330.

695.—*Un prisma oblícuo A D* (fig. 330), *es equivalente á otro recto O p cuya generatriz P p=B D y su base O P es la proyeccion de la A B del primero.*

Prolonguemos las aristas C A, B D.... tiremos el plano M N perpendicular á estas aristas, tomemos P p = B D y hagamos pasar el plano o p paralelo á M N. De este modo resulta el prisma recto O p cuya generatriz es igual á la de A D, y su base O P es la proyeccion de la base A B. Vamos á demostrar que los prismas A D y O p son equivalentes.

Si consideramos los prismas truncados o D y O B, veremos que son iguales, pues por una parte sus bases O P y o p lo son como bases de un mismo prisma O p, y por otra sus aristas respectivas tambien lo son, esto es, P B = p D, O A = o C, etc. En efecto, por construccion P p=B D agregando á estas rectas la parte p B resulta P B=p D, y lo mismo con las demás aristas. Ahora bien, si de los prismas truncados O B y o D se quita la parte comun o B, resulta: prisma recto O p = al oblícuo A D; que es lo que teniamos que demostrar.

696.—*Los prismas simétricos A D y a d* (fig. 330) *son equivalentes.*

Para que el prisma a d sea simétrico á A D, se necesita que las rectas D d, C c.... sean perpendiculares al plano M N, y además que D P = d P, O C = O c, P B = P b, O A = O a....

Tomemos P p=P p'=D B y hagamos pasar por p y p' planos paralelos á M N. Nos resultarán los prismas O p y O p' iguales, por ser rectos, por tener la misma base é iguales sus generatrices. Ahora bien: O p es equivalente á A D (695), y O p' lo es á a d, luego A D y a d serán equivalentes; que es lo que se tenia que demostrar.

697.—*Un paralelipípedo cualquiera A c* (fig. 321) *está formado de dos prismas triangulares A B D b d a y C B D d b c, equivalentes entre sí.*

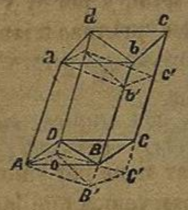


Figura 331.

Si por las diagonales d b y D B de las bases se hace pasar un plano, resultarán dos prismas triangulares A D B a y C D B c, cuyas partes constitutivas son iguales, pero que, por no estar dispuestas en el mismo órden, no serán sobreponibles. Para demostrar que los volúmenes de estos prismas son equivalentes, tiremos dos planos a c' y A C' perpendiculares á las aristas, y prolongando éstas nos resultarán el paralelipípedo recto A c' y los prismas triangulares rectos A B' O a y C' B' O c'. Estos prismas son iguales por serlo las partes de que se componen, y estar en ambos distribuidas en el mismo órden (666). Además, el prisma recto A B' O a es equivalente al oblícuo A B D b d a, porque tienen la misma generatriz A a y su base A B' O es la proyeccion de la A B D (695). Por igual razon, el prisma recto C' B' O c' es equivalente al C B D b d c; luego siendo iguales los prismas rectos, serán equivalentes entre sí los prismas A B D b d a y C B D b d c, y por lo mismo equivalentes á la mitad del paralelipípedo A c.



698.—*El volúmen de un prisma cualquiera tiene por valor el producto de la superficie de su base por su altura.*

1° Si el prisma es un paralelipípedo recto, hemos visto [694] que esa es la medida de su volúmen.

2° Si es un paralelipípedo oblícuo, su volúmen es equivalente al de uno recto de la misma altura y de base equivalente en superficie [689].

3° En el caso de que el prisma tenga por base un triángulo como A B D b d a (fig. 331), segun acabamos de verlo, éste será la mitad del paralelipípedo cuya base fuera un paralelógramo A B C D doble del triángulo. Ahora bien, como el volúmen del paralelipípedo tiene por expresion el producto de la superficie del paralelógramo de su base por su altura, el volúmen del prisma triangular será igual á la mitad de esta expsesion; ó lo que es lo mismo, al producto de la superficie del triángulo que le sirve de base por la altura del prisma.

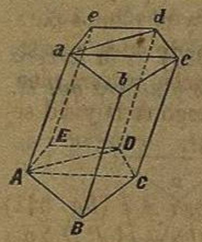


Figura 332.

4° Si la base del prisma es un polígono, podemos descomponerlo en prismas triangulares, haciendo pasar planos por una de sus aristas laterales A A' (fig. 332) y todas las opuestas. Siendo el volúmen del prisma poligonal A C' la suma de los prismas triangulares en que ha quedado descompuesto, si representamos por V el volúmen total, y por v, v', v'' los volúmenes respectivos de los prismas triangulares, tendrémos:

$$V = v + v' + v''$$

Por otra parte, el volúmen de cada prisma triangular tiene por valor el producto de su base por su altura. Así es que si observamos que las alturas de todos los prismas parciales son iguales á la del prisma total, en razon de ser paralelas las bases A C y A' C', representando por a esta altura comun y sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta:

$$V = A\,B\,C \times a + A\,C\,D \times a + A\,D\,E \times a$$

y sacando á a como factor comun y reemplazando la suma de los triángulos por el polígono que forman, se tiene:

$$V = A\,B\,C\,D\,E \times a$$

que es lo que debiamos demostrar.

699.—Si llamamos P el volúmen de un prisma cuya base es B y A su altura; y representamos por p el volúmen de otro prisma cuya base sea b y a su altura, tendrémos:

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

luego *los volúmenes de dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Si las bases son iguales, esto es, si B=b los volúmenes de los prismas serán proporcionales á sus alturas; y si por el contrario, lar alturas son iguales, sus volúmenes serán proporcionales á sus bases.

700.—*El volúmen de un cilindro, recto ú oblícuo, tiene por valor el producto de la área de su base por su altura.*

Supuesto que un cilindro no es mas que un prisma cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados. Si representamos por v el volúmen del cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura, tendrémos como expresion del volúmen del cilindro $v = \pi\, r^2\, h.$

701.—*El volúmen de un tetraedro D A B C* (fig. 333) *es la tercera parte del de un prisma A B C F D E de la misma base y altura que él.*

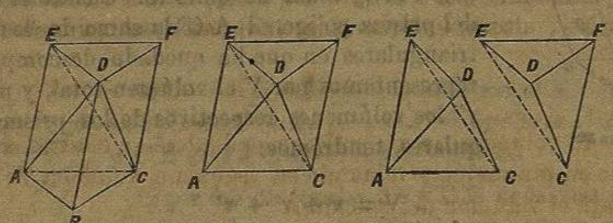


Figura 333.

Sobre la base A B C de nuestro tetraedro, levantemos aristas iguales y paralelas á D B, con lo que se formará el prisma A B C E D F de la misma base y altura que el tetraedro. Si quitamos éste nos quedará la





pirámide cuadrangular D A C F E, que para mayor claridad hemos representado en la figura 2ª. En esta pirámide el plano D C E la divide en dos tetraedros, representados por separado en las figuras 3ª y 4ª, de los que el C D E F es equivalente tanto al D A B C como al D A C E. En efecto, C D E F es equivalente á D A B C por tener sus bases E D F y A B C iguales (658) y la misma altura, que es la distancia de las bases del prisma. El mismo tetraedro D C E F es equivalente al D A C E porque sus bases E C F y A C E son triángulos iguales y tienen la misma altura, que es la distancia de D á la cara A C F E. Luego siendo equivalentes entre sí los tres tetraedros en que hemos dividido el prisma, el volúmen de uno de ellos D A B C será la tercera parte del del prisma.

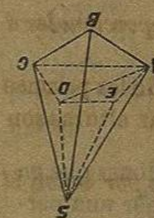

Figura 334.

702.—Haciendo pasar planos por las aristas de una pirámide S A B C.... (fig. 334) puede descomponerse en tetraedros, que tienen la misma altura que la pirámide. El volúmen de la pirámide es la suma de los volúmenes de los tetraedros, así como su base es la suma de los triángulos que sirven respectivamente de bases á los tetraedros, y como el volúmen de cada tetraedro tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura, se infiere que el *volúmen de una pirámide cualquiera tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.*

703.—Como el cono es una pirámide de base circular, *el volúmen del cono recto ú oblícuo tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Si representamos por v el volúmen del cono, por r el radio de su base y por h su altura, tendrémos con expresion del volúmen del cono:

$$v = \tfrac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$$

704.—El volúmen de un poliedro cualquiera se obtiene descomponiéndolo en pirámides y valuando en seguida el volúmen de éstas: su suma dará el volúmen del poliedro.

705.—*Las pirámides de igual altura y de bases equivalentes, tienen el mismo volúmen.*

Supuesto que el volúmen de las pirámides tendrá por valor la tercera parte del producto de factores iguales.

706.—*El volúmen de un trozo de prisma triangular A B C F D E* (fig. 335) *tiene por valor la tercera parte del producto de su base A B C* *por la suma de las distancias de los tres vértices D, E y F á la misma base.*

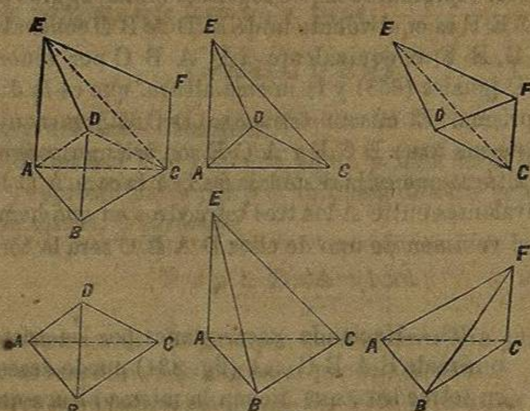


Figura 335.

Si en el prisma truncado A B F hacemos las mismas secciones que en el número 701, primero con el plano D A C nos resultará por una parte el tetraedro D A B C, que hemos representado en la figura 1ª de abajo, y la pirámide cuadrangular D A C F E. Esta pirámide cuadrangular, cortada por el plano D C E, se descompone en los tetraedros D C A E y D C F E. Así es que el volúmen del trozo será la suma de los volúmenes de los tres tetraedros D A B C, D C A E y D C F E. El primer tetraedro de la figura 1ª tiene por base la del trozo A B C, y por altura la distancia del vértice opuesto D á esta misma base, y su volúmen será el tercio del producto de estas dos cantidades, lo cual está conforme con el enunciado del teorema que venimos demostrando. El segundo tetraedro D C A E es equivalente al B C A E representado en la figura 2ª de abajo, que resultaria haciendo pasar un plano por los vértices B E C del trozo de prisma, porque tiene la misma base C A E é igual altura por ser la arista B D paralela á la cara A E. El tercer tetraedro D C F E es equivalente al B C F A, representado en la figura 3ª de abajo, que resultaria al cortar el trozo por un plano que pasara por los vértices F, A y B, porque tienen bases equivalentes y la misma altura. Los triángulos C F E y C F A que sirven de bases á estos tetraedros son equivalentes, porque tienen la misma base C F, y por altura la distancia de las dos aristas paralelas C F y A E. Las alturas de los tetraedros D C F E y B C F A son iguales, porque la arista D B es paralela á la cara A F del trozo. En último análisis, el volúmen del





trozo A F es equivalente á la suma de los volúmenes de los tetraedros de las figuras 1ª, 2ª y 3ª de abajo, que tienen por base la del trozo A B C y por alturas respectivamente las distancias de los vértices opuestos D, E y F á esta base; luego el volúmen del prisma truncado tendrá por valor lo que expresa el teorema.

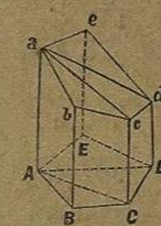


Figura 336.

707.—*El volúmen de un prisma truncado* A D' (figura 336) *de base cualquiera, tiene por valor la suma de los volúmenes de los trozos de los prismas triangulares* A B C A', A C D A', y A D E A' *en que se puede descomponer haziendo pasar planos por una arista* A A' *y las opuestas* C C', D D'.

708.—*El volúmen de un trozo de pirámide de bases paralelas, es igual á la tercera parte del producto de la altura del trozo por la suma de la base inferior, más la superior, más una média proporcional entre ambas.*

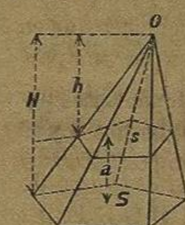


Figura 337.

Llamemos S la base inferior del trozo (fig. 337), S' su base superior y a su altura. Completando la pirámide de que forma parte del trozo, llamarémos: V el volúmen de la pirámide total O S, y H su altura: v el volúmen de la pirámide superior O S' y H' su altura. El volúmen del trozo que representarémos por T, será igual á V—v. Esto supuesto, tendrémos

$$V=\tfrac{1}{3}\,S\,H,\quad v=\tfrac{1}{3}\,S'\,H',\quad V-v=\tfrac{1}{3}\,S\,H-\tfrac{1}{3}\,S'\,H'$$

Como $H = a + H'$ sustituyendo en el último valor

$$V - v = T = \tfrac{1}{3}\,S\,(a + H') - \tfrac{1}{3}\,S'\,H'$$

ejecutando la multiplicacion $T = \frac{1}{3}\Big(S\,a + H'\,(S - S')\Big) \ldots.$ (1)

Vamos á determinar el valor de H' en funcion de a, S y S' para sustituirlo en esta ecuacion. Conforme á lo demostrado en el número 644, se tiene:

$$S : S' :: H^2 : H'^2$$

extrayendo raíz y sustituyendo

$$\sqrt{S} : \sqrt{S'} :: a + H' : H'$$