formando é igualando el producto de extremos y medios,

$$H' \sqrt{S} = a\sqrt{S'} + H' \sqrt{S'}$$

despejando á $$H' = \frac{a\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \ldots. \ (2)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1)

$$T = \tfrac{1}{3}\left(S a + \frac{a\sqrt{S'}\ (S - S')}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \right)$$

sacando a como factor comun y considerando que

$S = \sqrt{S^2}$, $S' = \sqrt{S'^2}$ y que $S - S' = (\sqrt{S} + \sqrt{S'})\ (\sqrt{S} - \sqrt{S'})$, (251—3°)

tendremos:

$$T = \tfrac{1}{3} a \left(S + \frac{\sqrt{S'}\ (\sqrt{S} + \sqrt{S'})(\sqrt{S} - \sqrt{S'})}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \right)$$

y finalmente $$T = \tfrac{1}{3} a\ (S + S' + \sqrt{S S'}) \ldots. \ (3)$$

que es lo que teniamos que demostrar.

709.—Como el trozo de cono, lo es de una pirámide cuyas bases paralelas son círculos, llamando t su volúmen y sustituyendo por S y S' sus valores, se tiene:

$$t = \tfrac{1}{3} a\ (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

ó $$t = \tfrac{1}{3} \pi a\ (R^2 + r^2 + R r)$$

expresion que servirá para valuar el volúmen de un trozo de cono.

710.—*Un triángulo* A B C (fig. 338) *que gira al rededor de una recta cualquiera* C I *situada en su plano y que pasa por uno de sus vértices* C, *engendra un volúmen que tiene por valor la tercera parte del producto de la perpendicular* C D *bajada de este vértice sobre la base* A B, *multiplicada por la superficie engendrada por esta base* A B.

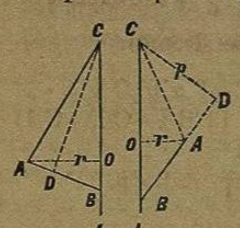

Figura 338.

Llamarémos p á la perpendicular C D bajada sobre la base A B, R á la A O, y para simplificar dirémos vol. B A C para expresar el volúmen engendrado por la rotacion del triángulo B A C al rededor de C I, y sup. A B para indicar la superficie engendrada por la rotacion de la recta A B. Esto supuesto, considerarémos tres casos:

1° Cuando el triángulo C A B gira al rededor de uno de sus lados C B (fig. 338). Se tiene:

$$\text{vol. } C A B = \text{cono } C O A + \text{cono } B O A$$
$$\text{vol. } C A B = \tfrac{1}{3}\pi R^2 (C O + O B) = \tfrac{1}{3}\pi R.\ R \times C B$$

$R \times C B$, que es el duplo de la superficie del triángulo C A B, es igual á $A B \times p$, y sustituyendo se tiene:

$$\text{vol. } C A B = \tfrac{1}{3}\pi R.\ A B \times p$$

pero como $\pi R.\ A B$ expresa la superficie cónica engendrada, por la rotacion de A B (679), finalmente resulta:

$$\text{vol. } C A B = \tfrac{1}{3} \text{ sup. } A B \times p$$

que es lo que expresa el teorema. Cualquiera que sea el valor del ángulo en A, serán aplicables los raciocinios de esta demostracion.

2° Cuando el triángulo C A B (fig. 339) gira al rededor de una línea exterior C I. En este caso tendrémos.

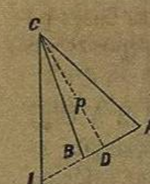

Figura 339.

$$\text{vol. } C A B = \text{vol. } C A I - \text{vol. } C B I$$

sustituyendo los valores de vol. C A I y de vol. C B I conforme á lo demostrado en el primer caso, se tiene:

$$\text{vol. } C A B = \tfrac{1}{3} p. \text{ sup. } A I - \tfrac{1}{3} p. \text{ sup. } B I$$

ó $$\text{vol. } C A B = \tfrac{1}{3} p. (\text{sup. } A I - \text{sup. } B I) = \tfrac{1}{3} p. \text{ sup. } A B$$

que es lo que se tenia que demostrar.

3° Cuando la base A B (fig. 340) es paralela al eje de rotacion. En este caso se tiene:

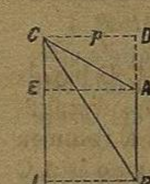

Figura 340.

$$\text{vol. } C A B = \text{cilindro } A B I E + \text{cono } C A E - \text{cono } C B I$$

sustituyendo los valores respectivos tendremos:

$$\text{vol. } C A B = \pi p^2 E I + \tfrac{1}{3}\pi p^2 C E - \tfrac{1}{3}\pi p^2 C I$$
$$= \pi p^2 (E I + \tfrac{1}{3} C E - \tfrac{1}{3} C I) = \tfrac{1}{3}\pi p^2 (3 E I + C E - C I)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi p^2 (3 E I - E I) = \tfrac{1}{3}\pi p^2\, 2 E I$$

ó $$\text{vol. } C A B = 2\pi p E I \times \tfrac{1}{3} p = \tfrac{1}{3} \text{ sup. } A B \times p.$$

que es lo que se tenia que demostrar.

711.—Este teorema nos servirá de fundamento para determinar el volúmen de la esfera, del *sector* y del *segmento* esférico.

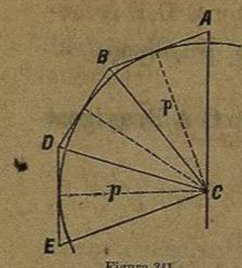

Figura 341.

En efecto, si nos imaginamos un polígono regular A B D E.... (fig. 341) circunscrito á un círculo, y que éste gire al rededor de un diámetro A C, el volúmen engendrado por la rotacion del polígono será igual á la suma de los volúmenes producidos por los triángulos A B C, B D C, D C E.... y tendrá por expresion $\frac{1}{3}$ p (sup. A B + sup. B D + sup. D E....) Esto es, el volúmen engendrado por el polígono tiene por valor la tercera parte del producto del rádio por la superficie engendrada por los lados del polígonos. Cuando los lados de éste sean infinitamente pequeños *el volúmen se convertirá en el de la esfera cuyo valor será la tercera parte del producto de su superficie por el rádio.*

Y como la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos (684), el volúmen de la esfera tendrá por expresion:

$$v = 4\,\pi\,R^2 \times \tfrac{1}{3}\,R = \tfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

ó

$$v = \tfrac{1}{6}\,\pi\,D^3$$

sustituyendo por R su valor en funcion del diámetro, que es $\frac{D}{2}$.

712.—*Se llama sector esférico la porcion de la esfera* C D E A (fig. 342) *limitada por la superficie cónica* D C E *que tiene por vértice el centro de la esfera y por el casquete esférico* A D E. El sector esférico puede concebirse engendrado por la rotacion del sector circular A C D al rededor del radio A C.

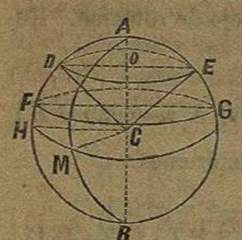

Figura 342.

El volúmen del sector esférico, conforme al teorema demostrado (710), *tendrá por valor la tercera parte del producto del radio de la esfera por la superficie del casquete esférico D E A.*

Llamando a la altura A O del casquete esférico, y recordando (684) que la área de éste está expresada por $2\,\pi$ R. a, el volúmen del sector esférico tendrá por expresion:

$$v = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,a$$

713.—Se llama *segmento esférico* la porcion de la esfera D E A (fig.

342), engendrada por la rotacion del segmento circular D O E A al rededor de la flecha O A.

El volúmen del segmento esférico es igual al del sector C D E A ménos el del cono C D E, y tendrá por valor:

$$v = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,a - \tfrac{1}{3}\,\pi\,D\,O^2 \times O\,C \ldots.(1)$$

$$D\,O^2 = B\,O \times O\,A\ (538) = (2\,R - a)\,a = 2\,R\,a - a^2$$

$$O\,C = R - a$$

$$D\,O^2 \times O\,C = (2\,R\,a - a^2)\,(R - a) = 2\,R^2\,a - 3\,R\,a^2 + a^3$$

sustituyendo en [1]

$$v = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,a - \tfrac{1}{3}\,\pi\,[2\,R^2\,a - 3\,R\,a^2 + a^3]$$

ejecutando la multiplicacion, reduciendo y sacando como factor comun á $\frac{1}{3}\,\pi\,a^2$, se tiene finalmente:

$$\textit{volúmen del segmento esférico} = v = \tfrac{1}{3}\,\pi\,a^2\,[3\,R - a]$$

El volúmen de un segmento de dos bases paralelas F G E D, es igual á la diferencia de los volúmenes de los segmentos que se apoyan sobre los círculos que respectivamente le sirven de bases.

Para determinar el volúmen engendrado por la revolucion del segmento circular A i B D [fig. 342 bis] girando al rededor del diámetro E F, supondremos que para fijar la magnitud del segmento se conozca la cuerda A B, y que para determinar la posicion del mismo segmento con relacion al eje de revolucion se da la proyeccion O H de su cuerda A B. Esto supuesto el volúmen engendrado por la revolucion del segmento A i B D es igual al engendrado por el sector A C B D ménos el engendrado por el triángulo A C B girando ambas figuras al rededor de E F. Así pues:

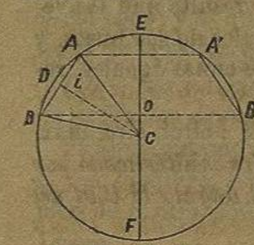

Figura 342 bis.

vol. seg. A i B D=vol. sector A C B D—vol. triángulo A C B....[1]

conforme á lo demostrado [710]

vol. sector A C B D=sup. zona A D B$\times\frac{R}{3}$=2 π R$\times$H O$\times\frac{R}{3}$ [684]

vol. sector A C B D=$\frac{2}{3}\,\pi$ R$^2\times$H O..............................[2]

Ahora conforme á lo demostrado [683 y 710]

$$\text{vol. triáng. A C B} = 2\,\pi\,\text{Ci}\times\text{H O}\times\tfrac{\text{Ci}}{3} = \tfrac{2}{3}\,\pi\,\text{Ci}^2\times\text{H O}$$

como en el triángulo rectángulo A i C

$$\text{Ci}^2 = \text{A C}^2 - \text{A D}^2 = \text{R}^2 - \frac{\text{A B}^2}{4}$$

tendremos:

$$\text{vol. triáng. A C B} = \tfrac{2}{3}\,\pi\,\text{H O}\left(\text{R}^2 - \frac{\text{A B}^2}{4}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

sustituyendo los valores de las ecuaciones [2] y [3] en la [1] resulta:

$$\text{vol. seg. A i B D} = \tfrac{2}{3}\,\pi\,\text{R}^2\,\text{H O} - \tfrac{2}{3}\,\pi\,\text{H O}\left(\text{R}^2 - \frac{\text{A B}^2}{4}\right)$$

ejecutando las operaciones y reduciendo:

$$\text{vol. seg. A i B D} = \tfrac{1}{6}\,\pi\,\text{H O}\times\text{A B}^2$$

que es la expresion del volúmen engendrado por la rotacion de un segmento circular en funcion de su cuerda y de la proyeccion de esta sobre el eje de rotacion.

Se llama cuña á la porcion del volúmen de la esfera A B M A H (figura 342) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro A B y la superficie de un huso A H B M.*

Como si dividimos en dos, tres ó más partes iguales el ángulo H C M del huso que fija la magnitud de la cuña, resultará ésta dividida en dos, tres ó igual número de partes, por ser sobreponibles las cuñas de la misma esfera que corresponden á husos iguales, resulta que los volúmenes de las cuñas son proporcionales á los ángulos de sus husos, y siendo la esfera el conjunto de un número dado de cuñas iguales, resulta:

vol. cuña A B M A H : vol. esfera :: como arco H M : circf. círc. máx.
luego *el volúmen de una cuña es igual al de la esfera multiplicado por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo H C M del huso de la cuña y* 360°.

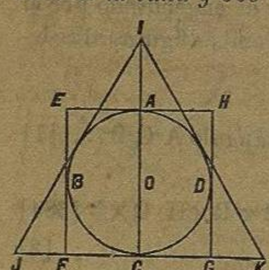

Figura 343

714.—Si al círculo A B C D (fig. 343) circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K, y nos imaginamos que gira este sistema al rededor del eje I A C, resultarán un cilindro y un cono circunscritos á la esfera, y tendrémos:

1° El volúmen de la esfera que lo representaremos por v,

$$\text{v} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\text{R}^3$$

2° El del cilindro que lo llamarémos v',

$$\text{v}' = \pi\,\text{R}^2\times 2\,\text{R} = 2\,\pi\,\text{R}^3$$

3° El volúmen del cono circunscrito que representarémos por

$$\text{v}'' + \tfrac{1}{3}\,\pi\,\text{C J}^2\times\text{C I}$$

Ahora bien, hemos visto (685) que $\text{J C}^2 = 3\,\text{R}^2$ y que $\text{J I} = 2\,\text{J C}$, luego $\text{J I}^2 = 4\,\text{J C}^2 = 12\,\text{R}^2$

Para determinar el valor de C I, considerarémos el triángulo rectángulo I C J, en el que

$$\text{I C} = \sqrt{\text{J I}^2 - \text{J C}^2} = \sqrt{12\,\text{R}^2 - 3\,\text{R}^2} = 3\,\text{R}$$

sustituyendo en el valor de v'' los de C J^2 y de C I, se tiene:

$$\text{v}'' = \tfrac{1}{3}\,\pi\,3\,\text{R}^2\times 3\,\text{R} = 3\,\pi\,\text{R}^3$$

En resúmen, el volúmen de la esfera $= \tfrac{4}{3}\,\pi\,\text{R}^3$
,, del cilindro $= 2\,\pi\,\text{R}^3$
,, del cono $= 3\,\pi\,\text{R}^3$

Comparando estas cantidades, se ve que son entre sí como 4 : 6 : 9, de lo que se deduce: 1° que el volúmen de la esfera es los dos tercios de el del cilindro circunscrito: 2° que es igual á los cuatro novenos de el del cono; y 3° que el volúmen del cilindro es medio proporcional entre el de la esfera y el del cono, supuesto que $6 = \sqrt{4\times 9}$.

715.—*Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si representamos por P el volúmen de una pirámide cuya base sea B y A su altura, tendrémos (702): $\text{P} = \tfrac{1}{3}\,\text{B. A}$; y llamando p el volúmen de la otra pirámide, b su base y a su altura, se tiene: $\text{p} = \tfrac{1}{3}\,\text{b. a.}$ Luego

$$\text{P} : \text{p} :: \tfrac{1}{3}\,\text{B. A} : \tfrac{1}{3}\,\text{b. a.}$$

multiplicando por 3 la 2ª razon

$$\text{P} : \text{p} :: \text{B. A} : \text{b. a}$$

que es lo que se queria demostrar.

716.—*Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas ó al de sus líneas homólogas.*

Conforme al teorema del número anterior, se tiene:

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

por ser las pirámides semejantes (644)

$$B : b :: A^2 : a^2$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$P : p :: A^3 : a^3$$

y como por ser las pirámides semejantes, todas sus líneas homólogas son proporcionales entre sí; llamando L y l las líneas que se escojan, se tiene:

$$A : a :: L : l$$

ó $A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$

luego $P : p :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$.

717.—*Los volúmenes de los poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los poliedros; P, P', P''...... las pirámides en que se puede descomponer el primer poliedro V, y p, p', p''.... las pirámides semejantes de que se compone el segundo poliedro v; L, L', L''.... las líneas de uno, y l, l', l''...... las homólogas del otro. Se tiene (716):

$$P : p :: L^3 : l^3 \qquad P' : p' :: L'^3 : l'^3 \text{ etc.}$$

por ser semejantes los poliedros, lo serán sus caras y tendrémos:

$$L : l :: L' : l' ....$$

elevando al cubo $L^3 : l^3 :: L'^3 : l'^3 ....$

luego $P : p :: P' : p' :: P'' : p'' .... :: L^3 : l^3$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente (318—8°) resulta:

$$P+P'+P'' .... : p+p'+p'' .... :: L^3 : l^3$$

ó $V : v :: L^3 : l^3$

que es lo que debiamos demostrar.

718.—*Los volúmenes de los cilindros rectos engendrados por rectángulos semejantes son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus alturas.*

Representarémos por V el volúmen de un cilindro, por R el radio de su base, y por H su altura; por v el volúmen del otro cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura. Tendrémos (700):

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h .... [1]$$

como los rectángulos generadores son semejantes, y los lados de estos rectángulos son los radios y las alturas de los respectivos cilindros, se tiene:

$$H : h :: R : r$$

multiplicando ordenadamente y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: R^3 : r$$

Igualmente, si la proporcion [1] se multiplica por la

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

resulta: $V : v :: H^3 : h$

que es lo que se debia demostrar.

719.—*Los volúmenes de los conos rectos engendrados por triángulos rectángulos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los conos, H y h sus respectivas alturas, R y r sus radios, y A, a sus generatrices. Por ser semejantes sus triángulos generadores, se tiene:

$$R : r :: H : h :: A : a .... [1]$$

Por otra parte (703) $V : v :: \frac{1}{3} \pi R^2 H : \frac{1}{3} \pi r^2 h .... [2]$

Elevando al cuadrado la primera proporcion de la série de razones [1]

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

multiplicando los términos de esta proporcion por los de la [2] y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: H^2 : h^2$$

si elevamos al cubo los términos de las razones iguales [1] se tiene:

$$R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

luego $$V : v :: R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

que es lo que se queria demostrar.

720.—*Los volúmenes de las esferas son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus diámetros.*

Hemos visto (711) que el volúmen de la esfera tiene por expresion $\frac{4}{3}\pi R^3$ ó $\frac{1}{6}\pi D^3$, así es que si representamos por V y v los volúmenes de las esferas, por R y r sus respectivos radios, y por D y d sus diámetros, tendrémos:

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 :: \tfrac{1}{6}\pi D^3 : \tfrac{1}{6}\pi d^3$$

y suprimiendo los factores comunes

$$V : v :: R^3 : r^3 :: D^3 : d^3$$

que es lo que se queria demostrar.

721.—*Los volúmenes de los poliedros simétricos son iguales.*

Si imaginándonos dos poliedros P y P' simétricos con relacion á un plano, tomamos un punto O en el interior de uno de ellos, y su simétrico o' en el otro, y desde estos puntos tiramos rectas á todos los vértices, nos resultarán divididos los dos poliedros en el mismo número de pirámides respectivamente simétricas. Estas pirámides tienen sus bases y sus alturas iguales [657], luego serán equivalentes en volúmen considerándolas de dos en dos, y en consecuencia la suma de todas las que forman el poliedro P será igual á la suma de las pirámides que constituyen el poliedro P'.

722.—Problemas.—I.—*Determinar el volúmen de un paralelipípedo rectangular, en el que los tres lados de uno de sus triedros miden:* $\overset{m}{1'50}$, *42 centímetros y 50 centímetros.*

Comenzarémos por expresar las dimensiones lineales referidas á la misma unidad. Elegirémos el metro para que el volúmen resulte en metros cúbicos. Llamando V el volúmen que buscamos, tendrémos (694):

$$V = \overset{m}{1'50} \times \overset{m}{0'42} \times \overset{m}{0'50} = \overset{m\ cúb.}{0'315}$$

Si hubiéramos querido determinar el volúmen en litros, las dimensiones lineales las habriamos reducido á decímetros, y nos habria resultado: $V = \overset{d}{15} \times 4'2 \times 5 = 315$ litros.

II.—*Determinar el volúmen de un cilindro cuya base tiene 40 centímetros de rádio, y 60 centímetros de altura.*

La fórmula correspondiente es [700]:

$$v = \pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = 3'141593 \times 40^2 \times 60 = \overset{cent.\ cúb.}{301\ 592'928}$$

$$v = \overset{litros}{301'592\ 928}$$

III.—*Calcular el volúmen de un cono cuya altura es de* $\overset{m}{2'5}$ *y el radio de su base de* $\overset{m}{0'30}$.

La fórmula que expresa el volúmen de un cono es [703]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\,3'141\ 593 \times \overset{m}{0'30}{}^2 \times 2'5$$

de donde $$v = \overset{m.\ cúb.}{0'235\ 619\ 475} = \overset{litros.}{235'619\ 475}$$

IV.—*Calcular el volúmen de un trozo de cono, cuya altura es de* $\overset{m}{1'2}$, *y los radios de sus bases son* $\overset{m}{0'7}$ *y* $\overset{m}{0'9}$.

La fórmula respectiva es [709]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi a (R^2 + r^2 + R\,r)$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\,3'141593 \times 1'2\,(0'9^2 + 0'7^2 + 0'9 \times 0'7)$$

ó $$v = \overset{m.\ cúb.}{2'425309796}$$

V.—*Calcular el volúmen de una esfera cuyo diámetro es de* $\overset{m}{12'5}$.

La fórmula que expresa el volúmen de la esfera es [711]:

$$v = \frac{1}{6}\pi D^3$$

sustituyendo $v = \frac{1}{6}\, 3'141593 \times 12'5^3$

y resulta $v = \overset{\text{m. cúb.}}{1026'537}$

VI.—*Determinar el radio de una esfera cuyo volúmen es de* $\overset{\text{litros.}}{2144'661}$.

De la fórmula que expresa el volúmen de la esfera [711]:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

despejarémos á $r = \sqrt[3]{\frac{3\,v}{4\,\pi}}$

sustituyendo $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2144'661}{4 \times 3'141593}}$

ejecutando la operacion resulta:

$r = 8$ que serán decímetros, por estar estimado el volúmen en litros.

VII.—*Determinar el volúmen de un sector esférico cuya altura es de* $\overset{\text{m}}{4'5}$*, y el radio de la esfera 12 metros.*

La fórmula que expresa el valor del volúmen del sector esférico es (712):

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

sustituyendo $v = \frac{2}{3}\, 3'141593 \times 12^2 \times 4'5$

ó $v = \overset{\text{m. cúb.}}{1357'168}$

VIII.—*Determinar el volúmen de un segmento esférico cuya altura es la mitad del radio de la esfera, que tiene 16 decímetros.*

El volúmen del segmento esférico está expresado por la fórmula (713)

$$v = \frac{1}{3}\pi a^2 (3\,R - a)$$

sustituyendo $v = \frac{1}{3}\, 3'141593 \times 8^2 (3 \times 16 - 8)$

ó $v = \overset{\text{litros.}}{2680'826}$

IX.—*Se quiere determinar el volúmen de un cubo cuya diagonal es de 8 decímetros.*

Representando por d la diagonal del cubo, y por a una de sus aristas, tendrémos:

$$d^2 = 3\,a^2 \quad (668)$$

y el volúmen del cubo $v = a^3$ (694)

despejando en la primera ecuacion á a, y sustituyendo su valor en la segunda, resulta:

$$v = \frac{d^3}{\sqrt{27}}$$

sustituyendo el valor numérico de la diagonal del cubo en nuestro problema, se tiene:

$$v = \frac{8^3}{\sqrt{27}} = \overset{\text{litros}}{98'5344}$$

X.—*Determinar gráficamente el radio de una esfera* C (fig. 344).

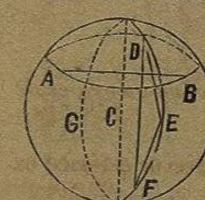

Figura 344.

Tomemos dos puntos cualesquiera sobre la esfera, A y B, haciendo centro en ellos, y con un compás de puntas curvas determinemos sucesivamente con tres radios diferentes tres puntos D, E y F equidistantes de A y B, por lo cual el plano que pasa por D, E y F será perpendicular al medio de la recta A B, y todos sus puntos estarán equidistantes de A y de B; luego pasará por el centro de la esfera, siendo un círculo máximo de ésta la seccion D E F G. Esto supuesto, si sobre un plano llevamos las distancias D E, E F y D F construirémos el triángulo D E F, y si circunscribimos al triángulo un círculo, determinando el radio de este círculo obtendrémos el de la esfera.

FIN.