personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 26 de 1878.)

Señores redactores de *La Libertad:*

Agradecerémos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876, han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad:*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier,* director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode,* socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz,* director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza,* director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878.)

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

INTRODUCCION.

723.—Al ocuparnos en geometría de los triángulos, hemos visto que, por regla general, cuando se conocen tres de los elementos de un triángulo, pueden determinarse gráficamente los demas, y con ese motivo explicamos en qué casos la cuestion admite una ó varias resoluciones y cuándo es indeterminada. El objeto definitivo de la trigonometría rectilínea, es resolver analítica y numéricamente los mismos problemas y ademas determinar la superficie de un triángulo cuando se tienen los datos suficientes.

El procedimiento usado en trigonometría, tiene una gran superioridad sobre el que explicamos en geometría, por el empleo del análisis para el estudio y fundamento de las cuestiones, y porque resolviendo éstas aritméticamente, se puede alcanzar un grado de aproximacion mucho mayor que al hacerlo gráficamente.

Para resolver de un modo general el problema de que se ocupa la trigonometría, en el que comunmente hay tres incógnitas, se necesita conocer las relaciones que existen entre los lados, los ángulos y la superficie de un triángulo para establecer tres ecuaciones con cantidades diferentes en las que entren las incógnitas, y ademas se presten á una solucion aritmética fácil. De aquí nace naturalmente, la necesidad de estudiar á fondo las diversas relaciones que existen entre los elementos de un triángulo cualquiera, y buscar el mejor modo de hacer entrar en los cálculos los ángulos.

En geometría hemos visto que á los ángulos se sustituyen los arcos del círculo que les son proporcionales; y en trigonometría, con la mira de facilitar las especulaciones, los arcos están representados por varias líneas rectas que con ellos tienen relaciones constantes, y las cuales se llaman líneas trigonométricas. De este modo, á la comparacion de los ángulos, se sustituye la de líneas rectas. Para comprender que este método es posible, basta reflexionar en que la magnitud de una cuerda fija completamente el valor de un arco en un círculo dado. Ademas de la cuerda, hay otras líneas trigonométricas llamadas seno, tangente, etc., que pronto daremos á conocer; pero todas ellas, lo mismo que la cuerda, tienen una relacion fija con el arco, de modo que éste ó el ángulo pueden determinarse por una línea trigonométrica y recíprocamente. El método que hemos explicado para determinar la relacion del diámetro á la circunferencia, inscribiendo á ésta sucesivamente polígonos regulares de 4, 8, 16, etc., lados, y determinando el valor numérico de éstos, da una idea de la posibilidad de construir una tabla en la que se tenga la correspondencia entre los ángulos y las magnitudes de las cuerdas, y cuya tabla podria servir para pasar de los ángulos á sus cuerdas y recíprocamente. Si por otra parte se conocen las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo, fácilmente se concibe que pueden llegarse á determinar en él, los lados por las cuerdas de sus ángulos y recíprocamente. Lo que decimos de la cuerda, es aplicable á las demas líneas trigonométricas que vienen á ser *magnitudes auxiliares,* para resolver el problema general de determinar unos por otros los elementos de un triángulo. Como acabamos de indicarlo, con el intermedio de las líneas trigonométricas, el problema se divide en dos partes distintas: una, que es la construccion de las tablas que expresan la correspondencia entre los valores de los arcos y sus líneas trigonométricas, puede hacerse préviamente una vez para siempre á fin de obtener el ángulo por la línea trigonométrica; y la otra, que lleva por mira determinar los lados de un triángulo dado por medio de las relaciones que los ligan con las líneas trigonométricas de sus ángulos, hay necesidad de ejecutarla aritméticamente en cada caso práctico, pero con suma facilidad despues de construida la tabla de las líneas trigonométricas. Este procedimiento es análogo al de los logaritmos, en el que una vez para todas, se ha calculado una tabla representando los números en ella contenidos, por las diversas potencias de un número constante, y despues un problema numérico se resuelve ejecutando

operaciones correlativas, pero mucho más sencillas con los logaritmos préviamente calculados, y los cuales solo han servido de intermedio entre los datos y el resultado final del problema. El uso de las tablas de las líneas trigonométricas tiene, ademas, la ventaja de conducir desde luego á un valor numérico: objeto definitivo de las investigaciones trigonométricas.

Como en algunos casos, una línea trigonométrica es poco á propósito para representar un ángulo con la suficiente exactitud, hay necesidad de servirse de varias líneas trigonométricas; y como muchas veces hay ventaja en reemplazar las relaciones de unas líneas por las que existen entre otras, conviene en el estudio de la trigonometría, aumentar las líneas trigonométricas y dar un gran desarrollo á las investigaciones de las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y sus más simples funciones, tanto por ser esto de notoria utilidad para poder resolver fácilmente las cuestiones en que entran magnitudes angulares y determinar los elementos desconocidos de un triángulo, como porque sirve de base á multitud de especulaciones teóricas y prácticas en las otras partes de las matemáticas.

Resulta, pues, que la trigonometría tiene que estudiar las relaciones geométricas que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, conocer las diferentes líneas rectas que pueden reemplazar á los ángulos y servir para fijar su magnitud, establecer el número necesario de líneas trigonométricas, conocer las relaciones que existen entre unas y otras, y construir tablas que fácilmente dén los valores de los ángulos conociendo los de sus líneas trigonométricas y viceversa; teniendo la trigonometría por objeto definitivo la resolucion de los problemas en que entran magnitudes angulares y la determinacion de los elementos de un triángulo.

La resolucion de un triángulo y el conocimiento de las fórmulas trigonométricas, es de la mayor importancia en matemáticas, tanto por su inmediata aplicacion á los triángulos, cuanto porque pudiendo descomponerse un polígono cualquiera en triángulos, resulta que las cuestiones de poligonometría se reducen á problemas de trigonometría.

Creemos que lo expuesto es bastante para hacer comprender á los alumnos la siguiente definicion:

724.—*La trigonometría tiene por objeto resolver los problemas relativos á las magnitudes angulares, y determinar los elementos desconocidos de un triángulo.*

En un triángulo consideramos sus lados, sus ángulos y su superficie.

Resolver un triángulo es calcular los valores numéricos de sus elementos desconocidos, cuando para esto tenemos los datos suficientes.

El problema de que casi siempre se ocupa la trigonometría, es: conocidos tres de los elementos de un triángulo, determinar los demas.

725.—Teniendo que figurar en nuestros cálculos los ángulos cuyos valores son proporcionales á los arcos, y debiendo reemplazarse para facilitar las investigaciones, los arcos por otras magnitudes auxiliares, llamadas líneas trigonométricas, que tienen relaciones fijas con los arcos y los ángulos, ántes de ocuparnos especialmente de las líneas trigonométricas daremos, en general, una idea de las funciones circulares.

Se llama funcion, toda expresion analítica que contiene dos cantidades variables, en la que el valor de una de ellas depende del que se asigne á la otra. Por ejemplo: la superficie del círculo es una funcion del radio; porque como hemos visto, estando representada la superficie del círculo por la expresion analítica

$$s=\pi\ r^2$$

á cada valor que tenga ó le demos al radio r, corresponderá otro determinado para la superficie s y recíprocamente. Son pues r y s cantidades variables, pero cuyos valores cambian correlativamente segun una ley cifrada en la fórmula $s=\pi\ r^2$

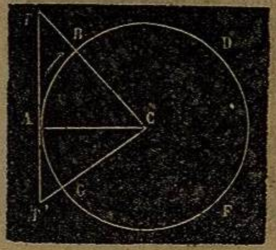
726.—Líneas negativas y positivas.—Hemos dejado indicado (268) que los signos + y — tienen la notable propiedad de indicar analíticamente la oposicion de sentido de que son susceptibles ciertas cantidades. Si sobre una línea recta ó curva F C (Fig. 345) consideramos como positivas las medidas tomadas arriba de A en la direccion indicada por la flecha, las medidas en sentido contrario se considerarán como negativas. Las magnitudes AB, y BC de 3 y de 7 milímetros, irán precedidas del signo +, y las AD, DE y EF respectivamente iguales á 5, 2 y 4 milímetros, estarán marcadas con el signo —. Si suponemos un móvil que partiendo del punto A subió 6 mm., en seguida bajó 10, luego subió 8, y por último bajo 7 mm., su distancia al punto de partida estará expresada por la ecuacion:

(Fig. 345.)

$$x=+6-10+8-7$$
$$x=-3$$

lo que quiere decir que el móvil quedaba 3 mm. abajo de A por estar

el resultado precedido del signo —. Igualmente, si convenimos en considerar como positivas las distancias medidas á la derecha de un plano ó de una recta, serán negativas las medidas en direccion opuesta. Es de notar que el sentido en que se estimen los signos de las cantidades es enteramente arbitrario, pudiendo haberse considerado en el caso de nuestra figura como positivas las distancias tomadas abajo de A, en direccion contraria de la indicada por la flecha; pero entónces serian negativas las medidas hechas hácia arriba.

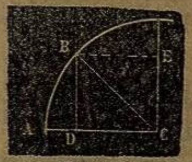


(Fig. 346.)

En el círculo de la figura 346, si tomamos el punto A como orígen de las medidas hechas sobre la circunferencia y consideramos como positivos los arcos medidos en el sentido en que se mueven las manos de un reloj de A hácia B, D, F, G indicado por la flecha, será necesario reputar como negativos y preceder del signo — á los arcos, como AG, AGF tomados en direccion opuesta. En la misma figura, si convenimos en considerar como positiva la tangente AT tomada arriba de A, estimaremos como negativa la tangente A T' que se mide para abajo de A.

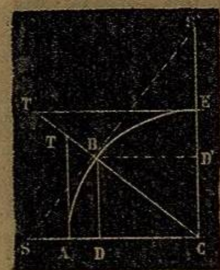
Líneas trigonométricas.

727. *Se llaman líneas trigonométricas á las rectas que tienen una dependencia constante con el arco, de tal manera, que conociendo una cualquiera de ellas, se puede determinar el arco á que corresponde y recíprocamente.*



(Fig. 347.)

Por ejemplo: dado el arco A B, (fig. 347) la recta B D bajada desde uno de sus extremos B perpendicular al radio C A que pasa por el otro extremo A, es una línea trigonométrica que se llama *seno* del arco A B ó del ángulo B C A. Como al arco A B no puede corresponder mas que un solo *seno* B D, en el círculo cuyo radio es A C, resulta que hay una relacion fija entre la magnitud del arco y la de su seno. Si conocido el seno B D, quisiéramos gráficamente determinar la magnitud de su arco, en el punto C levantariamos una perpendicular á A C igual al seno dado B D, y tirando por su extremo E una paralela á A C su interseccion con la circunferencia determinaría el otro extremo del arco A B que tiene por seno á B D.



(Fig. 348.)

728.—Diversas líneas trigonométricas.—Considerando el arco A B (fig. 348) acabamos de ver que la recta B D es su *seno*. *Tangente es la perpendicular* AT *levantada por uno de los extremos del arco, al radio que termina en este punto* A *hasta que encuentra al radio* C B *prolongado que pasa por el otro extremo.* Si por el punto B se tira la tangente B S, la parte S C comprendida entre el extremo S de la tangente y el centro del círculo se llama *secante.** La recta A D, comprendida entre el extremo A del arco y el pié D del seno, se llama *seno verso* del arco A B. En resúmen, *las líneas trigonométricas directas* del arco A B con las abreviaturas con que comunmente se les indica, son las siguientes:

B D=sen. A B
A T=tang. A B
S C=sec. A B
A D=sen. ver. AB

El complemento del arco A B es B E y conforme á las definiciones anteriores B D'=D C será el seno del arco B E, E T' será su tangente, S' C su secante, y E D' su seno verso; pero al seno del complemento de un arco se le llama *coseno,* á la tangente del complemento *cotangente,* á la secante del complemento *cosecante,* y al seno verso del complemento *coseno verso;* por lo cual *las líneas trigonométricas indirectas* del arco A B con las abreviaturas usadas, serán las siguientes:

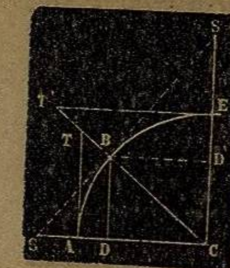
D C =cos. A B
E T'=cot. A B
S' C =cosec. A B
E D'=cos. ver. AB.

729.—Fórmulas fundamentales.—Vamos á determinar las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas de un mismo ángulo y el radio del círculo, que generalmente se toma igual á la unidad con el fin de simplificar las fórmulas.

Considerando el triángulo rectángulo B D C, (fig. 348) y en virtud

* Varios autores toman como secante la recta C T que es igual á S C por ser iguales los triángulos rectángulos S B C y T A C; no haciéndolo nosotros para evitar los inconvenientes que tal sistema presenta para fijar el signo de la secante.

de que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:



(Fig. 348.)

$$B\,C^2=B\,D^2+D\,C^2$$

sustituyendo los valores de estas rectas, representando por r el radio del círculo, y llamando a el arco A B, resulta:

$$r^2=\text{sen}^2 a+\cos^2 a$$

Considerando el triángulo rectángulo S B C, se tiene:

$$S\,C^2=B\,C^2+B\,S^2$$

sustituyendo los valores de estas rectas y atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S B C y T A C (384) B S=A T=tang.a, resulta:

$$\sec^2 a=r^2+\text{tang}^2 a$$

Considerando el triángulo rectángulo S' B C, se tiene:

$$S'\,C^2=C\,B^2+B\,S'^2$$

Atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S' B C y T' E C (384) B S'=E T'=cot a, y sustituyendo los valores de las otras rectas, resulta:

$$\text{cosec}^2 a=r^2+\cot^2 a.$$

Siendo B D paralela á T A, el triángulo B D C será semejante á T A C (514) y á su igual S B C. Comparando los lados homólogos de los dos primeros triángulos, se tiene:

$$A\,T : A\,C :: B\,D : D\,C$$

sustituyendo $\quad \text{tang.a} : r :: \text{sen.a} : \text{cos.a}$

luego $\quad \text{tang.a}=\dfrac{r.\ \text{sen.a}}{\text{cos.a}}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos S B C y B D C, se tiene:

$$S\,C : B\,C :: B\,C : D\,C$$

sustituyendo $\quad \text{sec.a} : r :: r : \text{cos.a}$

de donde $\quad \text{sec.a}=\dfrac{r^2}{\text{cos.a}}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos B D C y S' B C,