$$\text{cosec.}30^\circ=\frac{1}{\text{sen. }30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\text{sen.ver.}30^\circ=1-\text{cos.}30^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\text{cos.ver.}30^\circ=1-\text{sen.}30^\circ=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

En resúmen, *las líneas trigonométricas de* 30° serán:

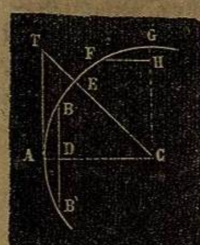
$$\text{sen.}30^\circ=\tfrac{1}{2},\ \text{cos.}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{tang.}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{cot.}=\sqrt{3},\ \text{sec.}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cosec.}=2,\qquad \text{sen.ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{cos.ver.}=\tfrac{1}{2}$$

Tomando como base que $\text{cos.}60^\circ=\frac{1}{2}$ y siguiendo el mismo procedimiento se determinarian con facilidad los valores de todas las líneas trigonométricas del arco de 60°; pero supuesto que las líneas directas de un arco son iguales á las indirectas de su complemento, tendremos que *las líneas trigonométricas de* 60°, serán:

$$\text{sen.}60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{cos.}=\tfrac{1}{2},\ \text{tang.}=\sqrt{3},\ \text{cot.}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{sec.}=2$$

$$\text{cosec.}60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \text{sen.ver.}=\tfrac{1}{2},\ \text{y cos.ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$



(Fig. 351.)

IX.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 45° (fig. 351).—Siendo el arco E A de 45° medida del ángulo E C A, el triángulo rectángulo T A C de que hace parte la tangente será isósceles, supuesto que los ángulos T y T C A, valdrán cada uno 45°. En consecuencia, T A=A C luego:

$$\text{tang.}45^\circ=1$$
$$\text{sec.}45^\circ=\sqrt{1+\text{tang}^2 45^\circ}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\qquad \text{ó cos.a}=\frac{1}{\text{sec.a}}$$

luego $$\text{cos.}45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen.}45^\circ=\sqrt{1-\text{cos}^2 45}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{cot.}45^\circ=\frac{1}{\text{tang.}45^\circ}=1$$

$$\text{cosec.}45^\circ=\frac{1}{\text{sen.}45^\circ}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ=1-\text{cos.}45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos.ver.}45^\circ=1-\text{sen.}45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En resúmen, *para el arco de* 45° *las líneas trigonométricas serán:*

$$\text{sen.}45^\circ=\text{cos.}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{tang.}45^\circ=\text{cot.}=1,\quad \text{sec.}45^\circ=\text{cosec.}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ=\text{cos.ver.}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

X.—*Construir un ángulo de* 30, *de* 45 *y* 60 *grados.*

Para construir el ángulo de 30° nos bastará tomar una recta igual á la mitad del radio, la cual nos representará el *seno* del arco buscado, y el problema se convierte en este otro: conocido el radio y el seno, determinar el arco, cuya resolucion hemos indicado (727).

Si el ángulo que trata de construirse es de 45°, tomaremos la tangente ó la cotangente de la misma magnitud que el radio.

Por último, si el ángulo que trata de construirse es de 60°, tomaremos su coseno igual á la mitad del radio, y procederemos como en el problema VI.

Valores correlativos entre los arcos y sus líneas trigonométricas.

732.—Vamos á examinar los diversos valores que pueden tomar las líneas trigonométricas cuando se hace variar el arco á que pertenecen desde 0° hasta $+\infty$ y desde 0° hasta $-\infty$, considerando sus signos, sus magnitudes y los valores que les son correlativos en arcos menores que 90°.

Para facilitar la inteligencia de este importante punto, que servirá de fundamento no solo á las especulaciones de la trigonometría, sino tambien á otros ramos de las matemáticas, consideraremos, sucesiva-

4

mente, cada una de las líneas trigonométricas observando sus variaciones al pasar el arco por sus diversas magnitudes.

733.—Valores correlativos del seno.—Si en la fig. 352, tomamos el punto A como orígen de los arcos, considerando como positivos los medidos en el sentido A B C.... indicado por la flecha, (que es en el que se mueven las manitas de un reloj), y negativos los arcos medidos en direccion opuesta, al moverse el lado B O girando al rededor del punto O, segun se verifique en un sentido ó en otro, engendrará el punto B todos los arcos positivos comprendidos entre 0° y el ∞ y los negativos entre 0° y — ∞.

Ya hemos dicho que el seno del ángulo A O B se determina bajando desde el extremo B, la perpendicular B J al otro lado, así es que consideramos como positivos los senos medidos en el sentido de B á J, de arriba para abajo, y reputaremos como negativos, los que se midan en sentido contrario. El radio del círculo lo seguiremos considerando igual á la unidad.

Si el punto B coincidiera con A, el arco seria nulo y el valor de la perpendicular B J, ó del seno tambien lo seria. Luego el seno de 0° es cero. Al ir aumentando el ángulo en el primer cuadrante entre A y C, el seno B J continuará siendo positivo é irá creciendo hasta llegar á ser igual á 1 cuando el arco A C es de 90°.

(Fig. 352.)

Al pasar al 2° cuadrante el lado móvil del ángulo, y tomar una posicion cualquiera como O D, el seno D K decrece; pero como el sentido de la perpendicular es el mismo que entre 0 y 90°, el seno sigue siendo positivo. Al llegar á coincidir el lado móvil con O F, el ángulo y el arco tendrán el valor de 180° y el seno será nulo. Así, pues, en el 2° cuadrante, el seno decrece de + 1 á 0 siendo siempre positivo, é igual á 0 cuando el arco vale 180°.

Al pasar el lado móvil del ángulo al tercer cuadrante, como el sentido en que se baja la perpendicular G L es contrario á aquel en que se ha bajado en los dos primeros cuadrantes, resulta que el seno es negativo y va creciendo desde 0 hasta — 1, teniendo este último valor, cuando el ángulo es de 270°.

Si el lado móvil pasa de H, el seno I M en el tercer cuadrante es negativo y va decreciendo desde — 1 hasta 0 cuando el arco llega al valor de 360°.

Si el ángulo continúa creciendo en el mismo sentido, el seno vuelve

á tomar los valores y signos que tuvo en los ángulos que son el exceso sobre 360°. Otro tanto sucederá si el ángulo se compone de cualquier múltiplo de 360° más un arco menor que la circunferencia. Resulta, pues, que si á un ángulo se le agrega 360°, 2×360°, 3×360°.... el seno no cambia de signo ni de valor, y como se llama *amplitud del período el arco que puede añadirse á un arco dado para que la suma tenga la misma línea trigonométrica,* 360° será la amplitud del período del seno.

734.—Consideremos ahora los arcos negativos, para lo cual tendrémos que suponer que, el punto móvil del ángulo, gira en la direccion A I H G.... Vemos que en el primer cuadrante negativo — A H, el seno es negativo lo mismo que en el segundo — H F, creciendo y decreciendo lo mismo que en los dos primeros cuadrantes positivos. En el tercero y cuarto cuadrantes negativos, F C y C A, el seno es positivo, esto es, tiene signo contrario al que tenia cuando el arco era positivo, y crece y decrece lo mismo que cuando considerábamos el tercero y cuarto cuadrantes positivos. En resúmen, cuando el arco es negativo, el seno es el mismo que corresponde al arco positivo, pero tiene signo contrario, lo cual se cifra en la siguiente ecuacion:

$$\text{sen.}(-a) = -\text{sen.}\,a$$

735.—Veamos qué relacion existe entre los senos de los *arcos suplementarios.* El seno del ángulo A O D es D K. El suplemento de A O D, es D O F. El arco D F=A B, por ser arcos del mismo círculo comprendidos entre paralelas, y como el seno de A B, que es B J=D K, por lados opuestos del paralelógramo D J, se infiere que *el seno de un ángulo es igual al seno de su suplemento teniendo ambos el mismo signo.*

De la inspeccion de la figura, resulta igualmente que el seno del arco A C F G=180°+F G es el mismo que el del arco F G, pero tomado con signo contrario. Si seguimos agregando al arco 180°, el seno va teniendo el mismo valor absoluto, pero alternativamente cambia de signo. En consecuencia, llamando á un arco cualquiera *a*, se tiene que:

$$\text{sen.}\,a = \text{sen.}\,(180° - a)$$

y

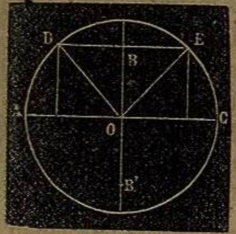
$$\text{sen.}\,a = -\text{sen.}\,(180° + a)$$

736.—Haremos notar, que cuando el radio del círculo se ha tomado igual á la unidad, todos los valores que puede adquirir el seno, están comprendidos entre +1 y —1 cuyos límites no puede sobrepasar. Para alcanzar estos límites, basta que el ángulo cambie 180°, pasando de

—90° á +90° ó de 90° á 270°. Por último, si se prescinde del signo, el seno toma todos los valores de que es susceptible en una amplitud de 90°.

Para determinar el *seno* de un arco $\pm$A mayor que una circunferencia, se dividirá por 360°, que es el período del seno, y la resta de la division ($\pm$A— n. 360°) nos servirá para fijar el signo y la magnitud del seno. Si el fin del arco de la resta queda en el primero ó en el segundo cuadrante el seno será *positivo*, y si queda en el tercero ó en el cuarto, será *negativo*. En cuanto á la magnitud del arco cuyo seno es igual al de $\pm$A, bastará observar que si la resta de la division no llega á 90°, desde luego se tendrá el arco cuyo seno es igual al dado. Si la resta queda en el segundo ó en el tercer cuadrante, se tomará la diferencia á 180°, supuesto que sen.(180°$\pm$a)=$\mp$sen.a, y si queda en el cuarto se buscará la diferencia á 360° una vez que sen.(360°—a)=—sen.a. Por ejemplo: sen.3175°=—sen.65°; porque siendo 3175=8$\times$360+295, el seno de 3175° será el 295°; quedando este arco en el tercer cuadrante el seno será negativo, y el mismo que corresponde al arco 65°=360°—295°.

737.—De las consideraciones que anteceden, resulta que á un arco dado corresponde un solo seno; pero que por el contrario á un seno pueden corresponder una infinidad de arcos. Vamos á explicar algo mas esto y á determinar los valores de todos los arcos que tienen el mismo seno.



(Fig. 353.)

Si en la fig. 353 el radio del círculo es la unidad, y estando en A el orígen, se conoce el seno s=O B de los arcos que buscamos, llevaremos la magnitud de este seno conocido de O á B y tirando por B la recta D E paralela al diámetro A C, tendremos desde luego que el seno B O corresponde al arco A D y al A D E que es su suplemento. Ademas, corresponderá igualmente á todos los arcos que resulten de agregar á A D y á A D E, 360° ó cualquier múltiplo de 360°. De suerte que si representamos por *a* el arco A D y por x y x' los arcos variables á que puede corresponder el mismo seno B O, tendremos:

$$\text{B O}=\text{sen x}=\text{sen x'}$$

siendo $\quad$ x=a+n.360° $\qquad$ x'=180°—a+n.360°=180°(2n+1)—a

en estas ecuaciones *n* representa un número entero cualquiera, cuyo valor tambien puede ser cero.

Si el seno es negativo, como B'O, los arcos tambien lo serán y cambiando el signo de *a* en los valores de x y x' los arcos á que pertenece el mismo seno negativo, estarán representados por las ecuaciones:

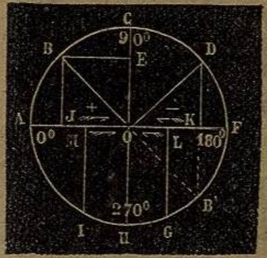
$$\text{x=n.360°—a} \qquad \text{x'=180°(2 n+1)+a.}$$

En general, sea cual fuere la magnitud del arco *a*, si se le agrega á este arco n$\times$360° ó un número par de semi-circunferencias, todos estos arcos tendrán el mismo seno; pero si se le agrega solo (2 n+1)180° ó un número impar de semi-circunferencias, como una de sus extremidades se trasportará del extremo de un diámetro á su opuesto, el seno será de la misma magnitud pero de signo contrario.

738.—Valores correlativos del coseno.—Ya hemos dicho que el coseno del arco A B (fig. 354), es el seno B E de su complemento B C, ó lo que es igual á B E, la parte J O del radio comprendida entre el pié J del seno y el centro O. Consideraremos, pues, como positivos, los cosenos medidos en la direccion de J á O; dejando subsistentes las demas convenciones que establecimos al tratar del seno, como son el sentido de los arcos positivos, que el radio es la unidad, etc.

Cuando el arco es nulo, esto es, cuando el punto B coincide con A, el coseno será el radio AO. A medida que el arco crece, el coseno disminuye hasta llegar á ser nulo cuando el arco A C es de 90°. Así, pues, en el primer cuadrante el coseno es positivo, va decreciendo al aumentar el arco; para 0° el cos=1, y para 90° el cos=0.

Cuando el valor del arco pasa de 90° como A C D, su coseno es K O, y como la medida de esta recta se hace en direccion opuesta á la de J O, el coseno será negativo, é irá creciendo á medida que el arco aumenta hasta llegar á ser igual —1 cuando D coincide con F. Esto es, en el segundo cuadrante el coseno es negativo, su valor crece al aumentar el ángulo, siendo 0 para 90° y —1 para 180°.



(Fig. 354.)

Si el valor del arco es mayor que 180° como A C F G su coseno L O será negativo, decrecerá al ir aumentando el arco hasta ser nulo para el arco A C F H. Esto es, en el tercer cuadrante el coseno es negativo; decrece al aumentar el arco, siendo —1 para 180° y 0 para el arco de 270°.

Cuando el arco pasa de 270° como A C F H I su coseno será M O y como se mide en la misma direccion que el J O del primer cuadrante será positivo; crecerá al aumentar el arco hasta ser igual con el radio

A O cuando el arco sea de una circunferencia completa. Por tanto en el cuarto cuadrante, el coseno es positivo; crece al aumentar el ángulo; siendo 0 para el arco de 270° y —1 para el de 360°.

Si el arco sigue creciendo en el mismo sentido, el coseno volverá á pasar por los valores que tuvo para los ángulos que son el exceso sobre 360° y con los mismos signos. Otro tanto sucederá si el arco pasa de 2, 3, etc., circunferencias. Este arco de 360° es la *amplitud del período del coseno.*

Se habrá notado que tanto el seno como el coseno cambian de signo cuando su valor pasa por cero, y veremos que lo mismo sucede con las demas líneas trigonométricas, y con todas las cantidades.

739.—Si suponemos ahora que el arco sea negativo y se miden en el sentido A I H G.... se observará que en el 1er cuadrante negativo el coseno M O es positivo, como lo era en el cuadrante A C, y decrece de $+1$ á o: que en el 2° cuadrante negativo H F el coseno L O es negativo y crece de o á -1, y así en los otros cuadrantes. Esto es, el coseno de un arco negativo es igual y del mismo signo que el que corresponde al arco considerado como positivo, lo cual se cifra en la siguiente ecuacion:

$$\cos.(-a)=\cos.a$$

740.—Véamos qué relacion existe entre el coseno de un ángulo y el *de su suplemento.* En la misma (fig. 354) se tiene que el arco D F suplemento del A C D es igual á A B, y O K=O J por ser iguales los triángulos O B J y O D K; pero como el sentido en que se mide K O es contrario al en que se mide J O, resulta que *el coseno de* A C D *es igual al coseno de su suplemento tomado con signo contrario.* Esto es,

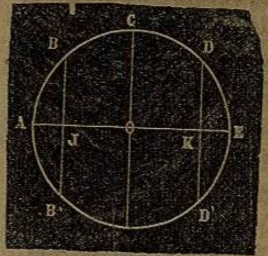
$$\cos.a=-\cos.(180-a)$$

Si á un arco cualquiera A B se le agregan 180° resultará un arco A C F B', cuyo coseno O K será igual al de A B, pero de signo contrario. Esto es

$$\cos.a=-\cos.(180°+a)$$

741.—Los valores que puede adquirir el coseno, cualquiera que sea la magnitud del arco positivo ó negativo, están comprendidos entre $+1$ y -1 lo mismo que los del seno; pero á medida que el seno crece, el coseno decrece, y vice-versa. Para alcanzar sus límites el coseno basta que el arco varíe de 0° á 180° ó de 180° á 360°, y si se prescinde del signo basta que el arco cambie 90°.

Para determinar el *coseno* de un arco $\pm A$, mayor que una circunferencia, se dividirá por 360°, que es el periodo del coseno, y la resta $\pm A - n.360°$ servirá para obtener el signo y la magnitud del coseno. Para determinar el signo se observará en qué cuadrante queda el fin del arco de la resta, siendo *positivo* el coseno en el 1° y en el 4°, y *negativo* en el 2° ó en el 3er cuadrante. En caso de que la resta no llegue á 90° este arco tendrá un coseno igual al del dado $\pm A$. Si el fin del arco de la resta queda en el 2° ó 3er cuadrante se tomará la diferencia á 180°; y si queda en el 4° se restará de 360° para tener un arco menor que 90°, cuyo coseno es igual al de $\pm A$, supuesto que $\cos.(180°\pm a)=-\cos.a$ y que $\cos.(360°-a)=\cos.a$. Por ej. $\cos.2028°=-\cos.48°$; porque $2028°=5\times360+228°$, y como la resta 228° queda en el 3er cuadrante, el coseno será negativo é igual al del arco de $48°=228-180°$.



(Fig. 355).

742.—Dada la magnitud $c=$O J (fig. 355) del coseno positivo, véamos cuáles son los diferentes arcos á que puede corresponder el mismo coseno. Si llevamos la magnitud de O J sobre el radio O A, y por el punto J levantamos la perpendicular B B', tendremos que el coseno dado corresponderá á los arcos A B, y A C E B' así como á todos los que resulten de agregarles 360° y los múltiplos de 360°. Si representamos por *a* el arco A B=A B', por x y x' los arcos variables á que puede corresponder el mismo coseno, y por *n* un número entero que puede tener toda clase de valores incluso el de cero, tendremos

$$OJ=\cos.x=\cos.x'$$

siendo $\quad x=a+n.360 \quad x'=(360°-a)+n.360°=360(n+1)-a$

Si el coseno dado O K es negativo, lo llevaremos de O á K y levantando por K la perpendicular D D' dicho coseno pertenecerá á los arcos A C D y A C E D', así como á todos los que resulten de agregarles 360° y los múltiplos de 360°. Llamando *a* el arco D E, los diferentes arcos á que pertenece el coseno $-c=$K O estarán representados por

$$x=180°-a+n\,360° \qquad x'=180°+a+n\,360°$$

ó $\quad x=180°(2n+1)-a \qquad x'=180°(2n+1)+a$

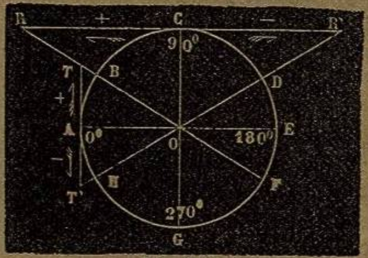
Para no complicar nuestras explicaciones, prescindimos de los arcos negativos á que puede pertenecer el mismo coseno.

Determinado uno de los ángulos á que pertenece un coseno, pertenecerá igualmente á todos los que resulten de agregarle sucesivamente 360°; y si se le agrega 180° ó un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos á que corresponde el coseno con signo cambiado.

743.—VALORES CORRELATIVOS DE LA TANGENTE Y COTANGENTE.—Dado el arco A B (fig. 356) su tangente será la recta A T, y su cotangente la línea C R. Reputaremos como positivas las tangentes medidas arriba de A en la direccion de A á T, y como negativas las medidas abajo de A hácia T'. Respecto de las cotangentes consideraremos como positivas las medidas de C hácia R, y como negativas las medidas de C para R'.

Esto supuesto, si el punto B coincidiera con A, el ángulo seria nulo y la tang. A T tambien lo seria. Al crecer el ángulo la tangente será positiva é irá aumentando hasta llegar á ser infinita cuando el arco sea A C, por ser entónces paralelas las rectas A T y O C. En cuanto á la contangente C R es infinita cuando el arco es nulo, su valor disminuye al crecer el arco y es nula cuando éste adquiere la magnitud A C. En consecuencia, en el 1er cuadrante la tang. y la cotangente son positivas: cuando el arco aumenta la tang. crece y la cot. decrece: para el arco de 0° la tang.$=$o y la cot.$=\infty$, y para 90° la tang.$=\infty$ y la cot.$=$o.

Al pasar el arco al 2° cuadrante y tener un valor como A C D, tendremos que tomar la tang. para abajo de A, á fin de que pueda encontrar el lado D O prolongado en T', por lo que la tangente será negativa, lo mismo que la cotangente, que es C R'. Al ir creciendo el arco A C D la tangente va disminuyendo y la contangente irá aumentando, de modo que cuando el arco sea A C E la tangente será nula y la contangente ∞. Esto es, en el 2° cuadrante la tangente y la cotangente son negativas, al crecer el ángulo la tangente disminuye y la cotangente aumenta, siendo para el arco de 180° la tang.$=$o y la cot.$=\infty$.



(Fig. 356).

Cuando el arco pasa de 180° como A C E F, la tangente será A T y su cotangente C R, ambas positivas. Al aumentar el arco la tangente crecerá y la cotangente disminuirá, hasta llegar á ser infinita la tangente y nula la cotangente cnando el arco sea A C E G. Esto es, en el 3er cuadrante la tangente y la cotangente son positivas, al aumentar el arco la tangente crece y la cotangente disminuye, y cuando es de 270° la tang.$=\infty$ y la cot.$=$o.

Cuando pasa el arco de 270° como A C E G H, la tangente es A T' y su cotangente C R', ambas líneas negativas. Al aumentar el arco la tangente disminuye y la cotangente crece, llegando á ser nula la primera é infinita la segunda cuando el arco es de una circunferencia. Así, pues, en el 4° cuadrante son negativas la tangente y la cotangente, la primera disminuye y la segunda crece al aumentar el ángulo, y para 360° la tang.$=$o y la cot.$=-\infty$.

Debemos hacer notar, que al pasar por el infinito los valores de la tangente y la cotangente siempre cambian de signo y veremos que lo mismo pasa con las demas líneas.

744.—Si el arco es negativo y se mide en el sentido A H G.... en el 1er cuadrante A G la tangente A T' y la cotangente C R' serán negativas; al crecer el arco la tangente aumentará mientras que el valor de la cotangente disminuye, y al ser el arco $=-90°$ la tang.$=-\infty$ y la cotangente$=$o. En el 2° cuadrante negativo la tangente A T y la cotangente C R son positivas, la primera línea decrece y la segunda aumenta, siendo nula la tangente para el arco $=-180°$ y la cotangente $=+\infty$. En el 3° y 4° cuadrantes negativos se observará que los signos de las líneas que estudiamos serán contrarios á los que tuvieron en los mismos cuadrantes positivos, teniendo variaciones y valores idénticos. Así, pues, en general:

$$\text{tang}\ (-a)=-\text{tang.}a$$
$$\text{cot.}\ (-a)=-\text{cot.}a$$

745.—Examinemos la relacion que existe entre la tangente y la cotangente de un ángulo y la de *su suplemento*. En la (fig. 356) si se toma D E$=$A B se tiene que la tangente A T' del arco A C D es igual á la A T del arco A B, pero de signo contrario, supuesto que son iguales los triángulos O A T y O A T'. Respecto de las cotangentes, C R' que es la cotangente de A C D, es igual á C R, cotangente de su suplemento A B, pero de signo contrario; luego

$$\text{tang.}a=-\text{tang.}\ (180°-a)$$
$$\text{cot.}a=-\text{cot.}\ (180°-a)$$

Si al arco A B se le agregan 180° resultará el A C E F cuya tangente A T y su cotangente C R, son las mismas que corresponden á E F$=$A B exceso sobre 180° y con el mismo signo. En general:

$$\text{tang.}a=\text{tang.}\ (180^\circ+a)$$
$$\text{cot.}a=\text{cot.}\ (180^\circ+a)$$

De esto resulta, que *el arco de* 180° *es la amplitud del período de la tangente y de la cotangente.*

746.—Los valores de la tangente y cotangente varían entre $+\infty$ y $-\infty$ y para adquirir estos valores basta un cambio en el arco de 180°.

Si se tiene un arco $\pm A$ de un gran número de grados, dividiéndolo por 180°, amplitud del período, se tendrá una resta $\pm a<180^\circ$ cuya tangente y cotangente tendrán el mismo valor y signo que las de $\pm A$.

747.—Dada la magnitud A T (fig. 356) de la tangente, ó la C R de la cotangente, determinar todos los arcos que tienen las mismas líneas trigonométricas.

Si en el punto A levantamos la perpendicular A T, reuniendo el punto T con el centro, tendremos que la tangente A T corresponde al arco A B, y á todos los que resulten de agregarle 180°. En cuanto á la cotangente levantando en C una perpendicular igual á C R y reuniendo R con O, tendremos que esta cotangente corresponderá al arco A B y á todos los que resulten de agregarle 180°, que es la amplitud del período. Llamando a el arco A B, x los arcos variables que tienen la misma tangente ó cotangente, y n un número entero cualquiera, cuyo valor puede ser cero, tendremos:

$$\text{A T}=\text{tang.}x$$
$$\text{C R}=\text{cot.}x$$

siendo $\qquad x=a+n.\ 180^\circ$

En el caso de que la tangente y cotangente fuesen negativas como A T' y C R', los diferentes arcos á que estas líneas podrian corresponder, representando por $-a$ el arco A H, serian:

$$x=360^\circ-a+n.\ 180^\circ=180^\circ\ (2+n)-a$$

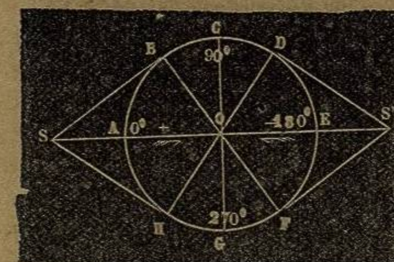
No creemos necesario ocuparnos del caso en que el arco sea negativo, cuyos valores es fácil determinar.

748.—Valores correlativos de la secante.—Dado el arco A B (fig. 357) su secante será S O que consideraremos como positiva al estar medida en la direccion de S á O, y serán negativas las secantes medidas sobre la misma recta S S' en sentido contrario de S' á O.

Si el punto B del arco A B coincidiera con A, éste seria nulo y con-

fundiéndose S con A, la secante S O seria igual al radio; al crecer el arco, la secante tambien creceria siendo positiva, y al llegar el punto B á C, la secante seria infinita por ser S O paralela á la tangente en C. Se ve, pues, que en el 1er cuadrante, la secante es positiva; que su valor aumenta al crecer el arco; que para 0° sec. $=1$, y para 90° sec $=+\infty$.

Al pasar el extremo móvil del arco al 2° cuadrante y llegar, por ejemplo á D, la secante S'O será negativa é irá decreciendo al aumentar el arco hasta llegar á ser igual al radio E O cuando el arco es de 180° Así, pues, en el 2° cuadrante, la secante es negativa, decrece al aumentar el arco y para 180°, sec $=-1$.



[Fig. 357].

En el 3er cuadrante, la secante S'O es negativa, crece al aumentar el arco A C E F y cuando llega á 270°, la secanse será igual á $=-\infty$ por ser paralela S'O á la tangente que pasara por G.

En el 4° cuadrante, la secante vuelve á ser S O positiva; al crecer el arco A C E G H disminuye, y para el arco de 360° será igual á $+1$.

749.—Si el arco es negativo y se mide en el sentido A H G F.... la secante S O en el 1er cuadrante negativo A G es positiva, crece con el arco y cuando es de -90° la sec. $=+\infty$. En el 2° cuadrante negativo G E, la secante S'O es negativa, decrece al aumentar el arco y para -180°, sec $=-1$. En el 3er cuadrante negativo E C, la secante S'O es negativa, crece con el arco A G E D y para -270°, sec. $=-\infty$. En el 4° cuadrante la secante S O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E C B, y para -360°, sec. $=+1$. Se ve, pues, que la secante de un arco negativo, tiene signo igual á la que corresponde al arco considerado como positivo, y sufre variaciones idénticas á éste, por lo que

$$\text{sec}\ (-a)=+\ \text{sec}\ a.$$

Como si á un arco positivo ó negativo se le agrega una ó varias circunferencias completas, la secante vuelve á tener el mismo valor é igual signo, el arco de 360° será la *amplitud del período de la secante.*

750.—Examinemos la relacion que existe entre una secante y la de *su suplemento.* La secante del arco A C D es S'O, y si tomamos A B $=$ D E suplemento de A C D, tendrémos que por ser los triángulos S'