D O y S B O iguales, S'O será igual á S O, pero de signo contrario, luego:

$$\sec a = -\sec(180^\circ - a)$$

Si á un arco A B se le agregan 180°, resultará el A C E F y como la secante S O de A B es igual á la S'O de A C E F tomada como signo contrario, resulta que

$$\sec a = -\sec(180^\circ + a)$$

751.—Los valores de la secante, como se habrá observado, varían entre $+1$ y $+\infty$, y entre -1 y $-\infty$ sin poder ser en ningun caso menores que el radio. Para obtener los valores extremos, basta una variacion en el arco de 0° á 180°, y si se prescinde del signo, será suficiente la de 90°.

752.—Dada la magnitud S O de una secante positiva, vamos á determinar todos los arcos á que puede pertenecer. Si en la fig. 357 llevamos de O á S la magnitud de la secante dada, y por S tiramos las tangentes S B y S H, dicha secante pertenecerá á los arcos A B, A C E G H y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=A H, por x y x' los variables que pueden tener la misma secante, y por n un número entero cualquiera, que puede ser cero, tendremos:

$$SO = \sec x = \sec x'$$

siendo $x = a + n.360^\circ$. $x' = (360^\circ - a) + n.360^\circ = 360(n+1) - a$

Si la secante dada es negativa, la llevaremos de O á S' y tirando las tangentes S' D y S' F, pertenecerá á los arcos A D, A C E F y á los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco D E<90°, los arcos á que pertenece la secante negativa tendrán por expresiones:

$$x = 180^\circ - a + n.360^\circ \qquad x' = 180^\circ + a + n.360^\circ$$

ó $$x = 180^\circ(2n+1) - a \qquad x' = 180^\circ(2n+1) + a$$

Conocido uno de los arcos á que pertenece una secante, se determinarán todos los demas agregándole á éste, un número par de semi-circunferencias, que es un múltiplo de 360°; pero si se le agrega un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos á que pertenece la misma secante pero con signo contrario.

753.—Valores correlativos de la cosecante.—Dado el arco A B (fig. 358) su *cosecante* será la recta Z O que consideraremos positiva al estar medida de Z á O, y estimaremos como negativas las cosecantes medidas sobre Z Z' de Z' hácia O.

Si suponemos que partiendo del punto A, se mueve un punto en el sentido de los arcos positivos, éste engendrará todos los arcos positivos imaginables, cuyas cosecantes tratamos de determinar.

Si B coincide con A el arco será nulo, y como la tangente levantada en A es paralela á Z O, la cosecante será infinita; al crecer el arco A B, la cosecante Z O será positiva é irá decreciendo hasta llegar á ser el radio C O cuando el arco sea de 90°. Así, pues, en el primer cuadrante, la cosecante es positiva; decrece al aumentar el arco, cuando éste es 0°, cosec$=\infty$, y para 90°, cosec$=+1$.

Al pasar el punto móvil de C, la cosecante del arco A C D, por ejemplo, es Z O positiva, crece al aumentar el arco, y al ser éste de 180°, la cosec$=+\infty$ por ser la tangente levantada en E paralela á Z O.

[Fig. 358.]

En el tercer cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E F es negativa, decrece al aumentar el arco, y para 270°, cosec$=-1$.

En el cuarto cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E G H es negativa, crece al aumentar el arco, y cuando éste llega á ser de 360° su cosec$=-\infty$.

754.—Si el punto móvil recorre la circunferencia en el sentido A H G F.... engendrará los arcos negativos, y en el primer cuadrante A G la cosecante Z' O será negativa, decrecerá al aumentar el arco y para $-90°$ será igual á -1. En el segundo cuadrante *negativo* G E la cosec. Z' O es negativa, crece como el arco y para $-180°$ es igual á $-\infty$. En el tercer cuadrante *negativo* E C, la cosecante Z O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E D y para $-270°$ es igual á $+1$. En el cuarto cuadrante tambien es positiva, pero crece al aumentar el arco A G E C B, y para $-360°$ es igual á $+\infty$. Resulta que la cosecante de un arco negativo, tiene signo contrario al que tendria si el arco fuese positivo y experimenta variaciones idénticas, por lo que

$$\operatorname{cosec}(-a) = -\operatorname{cosec}.a$$

Como si á un arco se le agrega 360° una ó varias veces, la cosecante vuelve á tener el mismo valor con igual signo, este arco de 360° *es la amplitud del período de la cosecante.*

755.—Examinaremos la relacion que hay entre la cosecante de un arco y *la de su suplemento.* La cosecante del arco A C D es Z O. Si tomamos A B=D E, suplemento de A C D, la cosecante de A B es la misma recta Z O que la de A C D. Luego, *la cosecante de un arco es igual y del mismo signo que la de su suplemento.*

Si al arco A B le agregamos 180° resultará el A C E F cuya cosecante Z' O será igual á la Z O de A B pero de signo contrario. Luego,

$$\text{cosec. a} = -\text{cosec}\ (180+a)$$

756.—Como se habrá notado, los valores de la cosecante varian entre $+1$ y $+\infty$ y entre -1 y $-\infty$ sin que en ningun caso sean menores que el radio. Para que la cosecante obtenga todos los valores de que es susceptible, basta una variacion en el arco de 180° pasando de 90° á 270°, ó de —90° á 90°, y si no se atiende á los signos, basta que la variacion sea de 90°.

757.—Vamos, por último, á determinar todos los arcos á que puede pertenecer la misma cosecante positiva O Z. Llevando de O á Z en la fig. 358 la magnitud de la cosecante dada y tirando las tangentes Z B y Z D, se tendrán los arcos A B, y A C D á que corresponde dicha cosecante, pero ademas pertenecerá á todos los que resulten de agregar á estos una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=D E, por x y x' los arcos variables que tienen la misma cosecante y por n un número entero cualquiera, se tiene:

$$\text{Z O} = \text{cosec x} = \text{cosec x'}$$

$$x = a + n.360° \qquad x' = (180° - a) + n.360°$$

$$\text{ó} \qquad x' = 180°(2\,n+1) - a$$

Si la cosecante es negativa, la llevaremos de O á Z', tiraremos las tangentes Z' H y Z' F y la misma cosecante pertenecerá á los arcos A C E G H, A C E F y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Llamando a el arco A H=F E=B A, tendrán por expresion los arcos que tienen por secante á Z' O:

$$x = (360 - a) + n.360 = 360(n+1) - a$$
$$x' = (180° + a) + n.360° = 180°(2\,n+1) + a$$

Si se conoce uno de los arcos á que pertenece una cosecante, se determinarán todos los demas agregándole un múltiplo cualquiera de 360°, que es un número par de semi-circunferencias; pero si se le agre-

ga un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos que tienen secantes de la misma magnitud pero con signo contrario.

No nos ocuparemos del seno y coseno verso por ser líneas trigonométricas de poco uso, haciendo notar solamente que nunca son negativas, y que sus límites son 0 y 1.

758.—Arcos complementarios.—Del exámen minucioso que hemos hecho de todos los valores que puedan tener las líneas trigonométricas, al pasar un arco desde $-\infty$ hasta $+\infty$ resulta, que cuando se prescinde de los signos, una línea trigonométrica adquiere todas las magnitudes de que es susceptible cuando el arco cambia 90°; pero si ademas de la línea trigonométrica directa, se considera la indirecta que le es correlativa, esto es, la que corresponde á su complemento, bastará la variacion de 45° para tener todos los valores de cada línea trigonométrica. En efecto, por las definiciones de las líneas trigonométricas indirectas, hemos visto que el coseno de un arco es el seno de su complemento; que la cotangente de un arco es la tangente de su complemento, etc., y recíprocamente. Así, pues,

$$\text{sen.a} = \text{cos.}(90° - a) \qquad \text{cos.a} = \text{sen.}(90° - a)$$
$$\text{tang.a} = \text{cot.}(90° - a) \qquad \text{cot.a} = \text{tang.}(90° - a)$$
$$\text{sec.a} = \text{cosec.}(90° - a) \qquad \text{cosec.a} = \text{sec.}(90° - a)$$
$$\text{sen.ver.a} = \text{cos.ver.}(90° - a) \qquad \text{cos.ver.a} = \text{sen.ver.}(90° - a)$$

y como por otra parte hemos visto que cuando se busca la línea trigonométrica de un arco $\pm A$ de un gran número de grados, hay siempre un arco $\pm a < 90°$ que tiene la misma línea trigonométrica, resulta que la determinacion de ésta queda reducida á la de arcos menores que 45° cuando se tienen reglas para fijar los signos de las expresadas líneas trigonométricas.

Cuando se consideran arcos de un gran número de grados, los complementos se estiman con respecto á la línea que en nuestras figuras hemos señalado de 90° á 270°, y *se llama complemento de un arco lo que le falta ó sobrá para un número impar cualquiera de cuadrantes.*

Los suplementos se estiman con respecto á la línea 0°, 180°, y *se llama suplemento de un arco lo que le falta ó sobra para un número par de cuadrantes.*

759.—Leyes de las líneas trigonométricas deducidas de sus fórmulas.—En todo lo que antecede hemos determinado los valores y signos de las líneas trigonométricas, observando en la correspondiente figura cuál es la magnitud y la direccion de la línea que se considera para un arco dado; pero conociendo los valores del seno y coseno para un arco, puede deducirse el de las demas líneas trigonométricas analíticamente, fundándose en las fórmulas generales que hemos demostrado en el número 729.

De las consideraciones geométricas que hemos explicado en los números 733 y 738, resulta que los valores y variaciones del seno y coseno son las que constan en la siguiente tabla:

	Arco de 0°	En el 1er. cuadrante.	Arco de 90°	En el 2° cuadrante.	Arco de 180°	En el 3er. cuadrante.	Arco de 270°	En el 4° cuadrante.
Seno	0	+crece	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece
Coseno	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece	0	+crece

Por otra parte, las fórmulas de las otras líneas trigonométricas, son:

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}},\quad \text{cot.a} = \frac{1}{\text{tang.a}},\quad \text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}},\quad \text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sen.a}}$$

En consecuencia, el signo de *la tangente* dependerá del que tengan el seno y coseno. En los cuadrantes 1° y 3° en que ambos tienen el mismo signo la tangente es positiva, y negativa en el 2° y 4° en que los signos del seno y coseno son diferentes. Las variaciones de la tangente dependen de las que tengan los términos del quebrado $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, y como cuando el seno aumenta el coseno disminuye, y vice-versa, resulta que ambas variaciones cooperan al mismo fin, así es que la tangente seguirá variaciones análogas á las que tiene el seno, que es el numerador de su valor, ó inversas á las del coseno; esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, disminuyendo en el 2° y 4°. Cuando el numerador (el seno) sea 0, tambien lo será el valor de la tangente, y cuando el denominador (el coseno) sea 0, la tangente será infinita. Esto es, será nula cuando el arco sea 0° y 180°, é infinita cuando sea de 90° ó 270°.

Respecto de *la cotangente*, siendo su expresion $\frac{1}{\text{tang.a}}$ en la que el numerador es constante y positivo, su signo dependerá y será igual al de la tangente, siendo positiva en el 1° y 3er. cuadrante, y negativa en el 2° y 4°. Como al crecer la tangente, que es el denominador de la expresion de la cotangente, disminuirá ésta, resulta que las variaciones de *la cotangente* son opuestas á las de la tangente, esto es, decrece en el 1° y 3er. cuadrante, y crece en el 2° y 4°. Cuando la tangente es nula en 0° y 180° la cotangente será infinita, y cuando la tangente es ∞ en 90° y 270° la cotangente será 0.

En cuanto á *la secante*, cuya expresion es $\frac{1}{\text{cos.a}}$, su signo será el del coseno siendo positiva en el 1° y 4° cuadrante, y negativa en el 2° y 3°. Las variaciones de la secante serán opuestas á las del coseno, esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, y decrecerá en el 2° y 4°. En los arcos de 0° y 180° en los que el coseno es igual á +1 y á —1 la secante será +1 y —1, y en los arcos de 90° y 270° en los que el coseno es 0 la secante es infinita.

Por último, *la cosecante* cuya expresion es $\frac{1}{\text{sen.a}}$, tendrá el mismo signo que el seno, siendo positiva en el 1° y 2° cuadrantes, y negativa en el 3° y 4°. Sus variaciones serán opuestas á las del seno, que es el denominador de su valor, por lo que decrece en el 1° y 3er. cuadrantes, y crece en el 2° y 4°. Para los arcos de 0° y 180° en los que el seno es nulo, la cosecante es infinita, y para 90° y 270° en los que el seno es +1 y —1 la cosecante es igual á +1 y á —1.

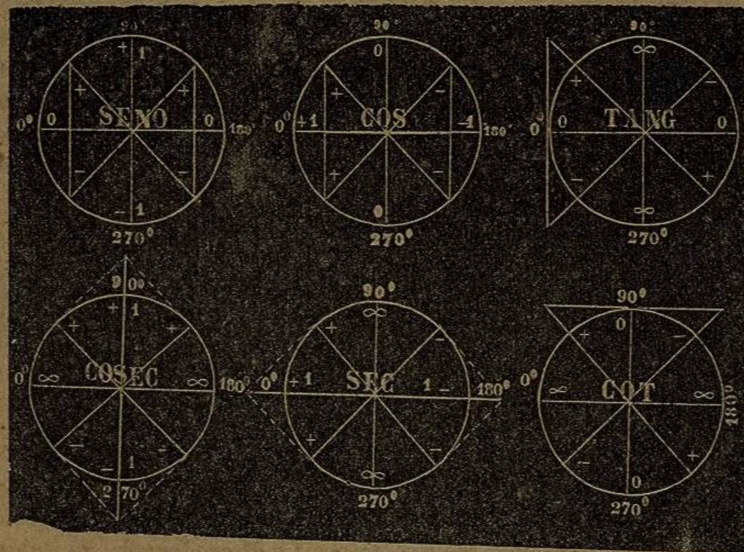
De la fórmula $\text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a} = 1$

inferimos que cuando el seno aumenta, el coseno disminuye, supuesto que la suma de sus cuadrados es constante, y que el mayor valor de cualquiera de estas líneas es el radio, en razon de que un sumando no puede ser mayor que la suma.

De la fórmula $\text{sen.ver.a} = 1 - \text{cos.a}$

inferimos que el seno verso nunca es negativo, supuesto que el coseno no puede ser mayor que 1.

760.—Representacion de los valores correlativos.—Con el objeto de facilitar á los alumnos que retengan en la memoria los valores correlativos de las líneas trigonométricas, indicaremos en la fig. 359 los signos que tienen en cada cuadrante, y sus valores al principio y fin de cada uno de ellos.



[Fig. 359.]

761.—Leyes de los valores correlativos.—Vamos á procurar cifrar en un corto número de reglas las leyes que hemos observado y que se verifican en los valores de las líneas trigonométricas al pasar un arco *positivo* por sus diversas magnitudes. Consideraremos los signos; en qué cuadrante crece y en cuáles decrece cada línea trigonométrica; sus valores límites; la amplitud del período; la relacion de las líneas de los arcos suplementarios y complementarios; y por último, haremos notar las analogías que hay entre las variaciones de diversas líneas.

Signos.—Tienen el mismo signo la tangente y la cotangente, el seno y la cosecante, el coseno y la secante. Todas las líneas trigonométricas son positivas en el 1^er. cuadrante, y lo son igualmente en el 2° el seno y la cosecante, en el 3° la tangente y la cotangente, y en el 4° el coseno y la secante; siendo negativas en los otros dos cuadrantes.

Variaciones.—Las variaciones en magnitud de todas las líneas son alternativas al pasar de un cuadrante al siguiente. Esto es, si crece en el 1°, decrecerá el 2°, crecerá el 3° y decrecerá en el 4°. Todas *las líneas*

directas, seno, tangente y secante crecen en el 1° y 3^er cuadrante; y *las indirectas*, coseno, cotangente y cosecante, decrecen en el 1° y 3^er cuadrante; experimentando unas y otras variaciones en sentido contrario en los otros cuadrantes.

Valores límites.—El seno y coseno varían de 0 á $+1$ y á -1. La tangente y la cotangente de $+\infty$ á $-\infty$. La secante y la cosecante del ∞ á ± 1.

Amplitud del período.—Para la tangente y la cotangente es de 180°, y de 360° para todas las demas.

Arcos suplementarios.—El seno y la cosecante de un arco son iguales y del mismo signo que el seno y la cosecante de su suplemento. Las otras líneas son iguales pero tienen signo contrario.

Arcos complementarios.—Prescindiendo del signo, cualquiera línea trigonométrica directa es igual á la indirecta de su complemento.

Analogías.—Tienen el mismo signo el seno y la cosecante, la tangente y la cotangente, el coseno y la secante. En un cuadrante determinado todas las líneas directas crecen ó todas decrecen, mientras que en el mismo cuadrante todas las indirectas experimentan variaciones contrarias. Los valores límites de las líneas directas son iguales á los de sus indirectas.

762.—Terminaremos esta parte poniendo una tabla de los valores correlativos de los arcos y de las líneas trigonométricas, que los estudiantes podrán consultar en caso de duda, y dando la siguiente

Definicion.—*Se entiende por valores correlativos, la dependencia que existe entre la magnitud y signo de un arco y el valor de sus respectivas líneas trigonométricas.*

El estudio de los valores correlativos tiene por objeto observar las variaciones que en el valor de las líneas trigonométricas produce el cambio de magnitud ó de signo del arco, y determinar el arco menor que un cuadrante, cuya línea trigonométrica es igual á la del arco dado.

TABLA

DE LOS VALORES CORRELATIVOS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

ARCOS	SENO	COS	TANG	COT	SEC	COSEC
0°	0	1	0	∞	1	∞
a	+sen a	+cos a	+tang a	+cot a	+ sec a	+cosec a
—a	—sen a	+cos a	—tang a	— cot a	+ sec a	—cosec a
90°—a	+cos a	+sen a	+cot a	+tang a	+cosec a	+ sec a
90°	1	0	∞	0	∞	1
90°+a	+cos a	—sen a	— cot a	—tang a	—cosec a	+ sec a
180°—a	+sen a	—cos a	—tang a	— cot a	— sec a	+cosec a
180°	0	—1	0	∞	—1	∞
180°+a	—sen a	—cos a	+tang a	+cot a	— sec a	—cosec a
270°—a	—cos a	—sen a	+cot a	+tang a	— cosec a	— sec a
270°	—1	0	∞	0	∞	—1
270°+a	—cos a	+sen a	— cot a	—tang a	+cosec a	— sec a
360°—a	—sen a	+cos a	—tang a	— cot a	+ sec a	—cosec a
360°	0	1	0	∞	1	∞
360°+a	+sen a	+cos a	+tang a	+ cot a	+ sec a	+cosec a
n. 360°—a	—sen a	+cos a	—tang a	— cot a	+ sec a	—cosec a
n. 360°+a	+sen a	+cos a	+tang a	+ cot a	+ sec a	+cosec a
(2k+1)180°—a	+sen a	—cos a	—tang a	— cot a	— sec a	+cosec a
(2k+1)180°+a	—sen a	—cos a	+tang a	+ cot a	— sec a	—cosec a

763.—Funciones inversas.—Las expresiones

$$y = \text{sen } x \qquad y = \cos x \qquad y = \text{tang } x \text{ etc.}$$

en las que tanto y, como el arco x son cantidades variables se les llama *funciones circulares directas*. De ellas resultan las siguientes:

$$x = \text{arc. (sen } y) \qquad x = \text{arc. } (\cos y) \qquad x = \text{arc. (tang } y) \text{ etc.}$$

es decir, x = arco cuyo seno es y, x = arco cuyo coseno es y, etc., que se les llama *funciones circulares inversas*. Por lo que hemos explicado antes, se ve que las funciones inversas son completamente indeterminadas existiendo una infinidad de arcos que corresponden á la misma línea trigonométrica. Cuando se usan estas *funciones inversas*, para el seno, la cosecante, la tangente y la cotangente implícitamente se supone que los arcos están comprendidos entre — 90° y + 90°; y cuando se usan para el coseno y la secante, se supone que el arco está comprendido entre 0° y 180°. Con esta restriccion las expresiones

$$x = \text{arc. (sen } y) \qquad x = \text{arc. } (\cos y) \text{ etc.}$$

resultan determinadas y pueden emplearse como funciones circulares.

764.—Problemas.—I. *Determinar las líneas trigonométricas del arco de 120°*

El seno de 120° será igual al de su suplemento, que en nuestro caso es de 60° y del mismo signo. Con el seno de $60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\text{sen. } 120° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

El coseno de 120° será negativo é igual al seno de 30°, que es el exceso sobre 90°. Esto es:

$$\cos.\ 120° = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } 120° = \frac{\text{sen } 120}{\cos 120} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \div -\tfrac{1}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\cot.\ 120° = \frac{1}{\text{tang } 120} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec.\ 120° = \frac{1}{\cos 120°} = 1 \div -\tfrac{1}{2} = -2$$

$$\text{cosec. } 120° = \frac{1}{\text{sen. } 120°} = 1 \div \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

II.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 225°.

Estando el arco comprendido entre 180° y 270°, sabemos que en el 3ᵉʳ cuadrante son positivas la tangente y la cotangente, y negativas todas las demas. Si del arco de 225° restamos 180° quedan 45° cuyas líneas trigonométricas tendrán el mismo valor que las del arco de 225° Por tanto:

$$\text{sen. } 225° = -\text{sen. } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos. } 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tang. } 225° = \text{cot. } 225° = +1$$

$$\text{sec. } 225° = \text{cosec. } 225° = -\sqrt{2}$$

III.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 2580°.

Si dividimos 2580° por 360° nos queda de resta 60°, luego las líneas trigonométricas de 2580° serán las de 60° y por estar este arco en el 1ᵉʳ cuadrante, todas las líneas trigonométricas serán positivas. Esto es,

$$\text{sen. } 2580° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{cos. } ,, = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } ,, = \sqrt{3}$$

$$\text{cot. } ,, = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sec. } ,, = 2$$

$$\text{cosec. } ,, = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

IV.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco negativo* —2460°.

Dividiendo 2460° por 360° se tiene la resta 300°; luego las líneas trigonométricas de 2460° tendrán la misma magnitud que las del arco de 300°. Para determinar su signo, notaremos que en el 4° cuadrante negativo, el seno y el coseno son positivos, así como todas las demas líneas trigonométricas. Como la diferencia de 300° á 360° es 60° las líneas que buscamos son las que corresponden á 60° por su valor absoluto, afectándolas del signo correspondiente á — 300°. Así, pues,

$$\text{sen. } -2460° = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{cos. } ,, = +\tfrac{1}{2}$$

$$\text{tang. } ,, = +\sqrt{3}$$

$$\text{cot. } ,, = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sec. } ,, = 2$$

$$\text{cosec. } ,, = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

V.—¿A qué arcos corresponden los mismos senos y las mismas cosecantes?

A los arcos suplementarios y á todos los que resultan de agregar á uno y á otro una y varias veces 360°.

VI.—¿A qué arcos corresponden las mismas tangentes y cotangentes?

A los que resultan de agregar al arco que tiene la tangente ó cotangente dada, una ó varias veces 180°.

VII.—¿A qué arcos corresponden los mismos cosenos y las mismas secantes?

A todos los que resulten de agregar una ó varias veces 360° al arco que tiene el coseno ó la secante dada.

VIII.—¿Cuáles son los valores de los arcos, cuyas líneas trigonométricas son: 1° seno $= -\frac{1}{2}$; 2° tang. $= -1$, y 3° sec. $= +2$?

1° Siendo el seno $-\frac{1}{2}$ negativo, corresponderá á un arco negativo ó á uno que esté en el 4° ó 3ᵉʳ cuadrante. Como $\frac{1}{2} =$ sen. 30, tomando el arco negativo podrá corresponder á los arcos — 30, y — 150 que es su suplemento y á todos los que resulten agregándoles una ó varias veces — 360°. Tomando los arcos positivos, $-\frac{1}{2}$ es el seno de $180°+30° = 210$ y de $360° - 30° = 330°$, y ademas de todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°

2° La tang. $= -1$ corresponderá á un arco negativo ó uno comprendido en el 2° y 4° cuadrante. Como $1 =$ tang. 45°. Los arcos negativos á que puede corresponder, serán: $-x = -45 - \text{n. } 180°$ y los positivos $x = (180° - 45) + \text{n. } 180° = 135° + \text{n. } 180°$.

3° Como la secante es positiva en el 1° y 4° cuadrante y $2 = \sec. 60°$ la secante igual á 2 corresponderá á los arcos de 60° y $360° - 60 = 300°$ y á todos los que resulten de agregarles n. veces 360°.

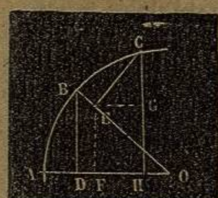
IX.—¿A qué arcos corresponden: 1° cotangente $= -\sqrt{3}$, y 2° $\cos. = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

1° Considerando los arcos positivos, como la cotangente es negativa en el 2° y 4° cuadrantes, como $\cot. 30° = \sqrt{3}$ y el período de la cotangente es el arco de 180°, resulta que los arcos á que pertenece $\cot. = -\sqrt{3}$ serán: $x = 30° + n. 180°$ Los arcos negativos que tienen la misma cotangente, serán $-x = -30 - n. 180°$.

2° Los arcos á que pertenece $\cos. = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ serán $\pm 45°$ y $\pm 315° = 360° - 45$ y todos los que resulten de agregarles $\pm$ n. 360°.

Fórmulas generales de las líneas trigonométricas.

765.—Fórmulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos.—*Conocidos los senos y cosenos de dos arcos* a *y* b, *se trata de determinar la expresion del seno y coseno de la suma y diferencia de estos arcos.*



[Fig. 360].

Sea AB=a (fig. 360) y BC=b; tendremos AC=a+b

BD=sen.a, D O=cos.a, C E=sen.b, E O=cos.b

C H=sen. (a+b), H O=cos. (a+b)

Por el punto E, pié del seno del arco C B, tiremos E F perpendicular á A O y E G paralela á este radio, y nos resultarán los triángulos E F O y E G C semejantes á B D O el primero por ser E F paralela á B D y el segundo por ser los lados de E G C perpendiculares á los de B D O. De la inspeccion de la figura resulta:

$$C H = \text{sen.}\ (a+b) = E F + C G \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$H O = \cos.\ (a+b) = O F - E G \ldots\ldots\ldots (B)$$

Vamos á determinar los valores de las cuatro rectas, E F, C G, O F y E G, en funcion de los senos y cosenos de *a* y de *b*, á cuyo fin compararemos los triángulos E F O y E G C con su semejante B D O. Así, pues,

E F : E O :: B D : B O ó E F : cos.b :: sen.a : r luego $E F = \dfrac{\text{sen.a cos.b}}{r}$

C G : C E :: D O : B O C G : sen.b :: cos.a : r $C G = \dfrac{\text{sen.b cos.a}}{r}$

O F : E O :: D O : B O O F : cos.b :: cos.a : r $O F = \dfrac{\text{cos.a cos.b}}{r}$

E G : C E :: B D : B O E G : sen.b :: sen.a : r $E G = \dfrac{\text{sen.a sen.b}}{r}$

Sustituyendo los valores de estas cuatro líneas en las ecuaciones (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}(a+b) = \frac{\text{sen.a cos.b} + \text{sen.b cos.a}}{r}$$

$$\cos.(a+b) = \frac{\text{cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b}}{r}$$

y haciendo r=1, como anteriormente, á fin de simplificar nuestras fórmulas:

$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.a cos.b} + \text{sen.b cos.a} \ldots (12)$$

$$\cos.(a+b) = \text{cos.a cos.b} - \text{sen.a sen.b} \ldots (13)$$

Como las fórmulas que anteceden se han sacado geométricamente de una figura en la que se ha supuesto $a+b < 90°$ y en la que los arcos son positivos, vamos á demostrar analíticamente que son aplicables á todos los casos cualesquiera que sean los valores de dichos arcos. Para llegar á esta conclusion general demostraremos: 1° que las expresadas fórmulas subsisten para todos los valores de *a* y de *b* comprendidos entre 0° y 90°; 2° que subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos se le agrega 90°; 3° que son aplicables para todos los valores positivos de los arcos; y 4° que lo son igualmente para los valores negativos.

1°.—*Las fórmulas* [12] *y* [13] *subsisten para todos los valores de* a *y de* b *comprendidos entre 0° y 90°.*

Habiéndose establecido estas fórmulas para el caso en que $a+b < 90°$, vamos á suponer que se tenga:

$$a+b > 90°$$

Sean a' y b' los complementos respectivos de *a* y de *b*, tendremos: