3° Como la secante es positiva en el 1° y 4° cuadrante y $2 = \sec. 60°$ la secante igual á 2 corresponderá á los arcos de 60° y 360°—60 =300° y á todos los que resulten de agregarles n. veces 360°.

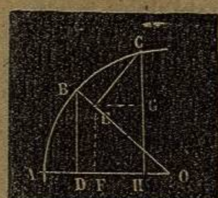
IX.—¿A qué arcos corresponden: 1° cotangente $= -\sqrt{3}$, y 2° cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$?

1° Considerando los arcos positivos, como la cotangente es negativa en el 2° y 4° cuadrantes, como cot. $30° = \sqrt{3}$ y el período de la cotangente es el arco de 180°, resulta que los arcos á que pertenece cot. $= -\sqrt{3}$ serán: $x = 30° + n.\ 180°$ Los arcos negativos que tienen la misma cotangente, serán $-x = -30 - n.\ 180°$.

2° Los arcos á que pertenece cos. $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ serán $\pm 45°$ y $\pm 315° = 360° - 45$ y todos los que resulten de agregarles $\pm$ n. 360°.

Fórmulas generales de las líneas trigonométricas.

765.—FÓRMULAS RELATIVAS AL SENO Y COSENO DE LA SUMA DE DOS ARCOS.—*Conocidos los senos y cosenos de dos arcos* a *y* b, *se trata de determinar la expresion del seno y coseno de la suma y diferencia de estos arcos.*


[Fig. 360].

Sea AB=a(fig. 360) y BC=b; tendremos AC=a+b

BD=sen.a, DO=cos.a, CE=sen.b, EO=cos.b

CH=sen. (a+b), HO=cos. (a+b)

Por el punto E, pié del seno del arco CB, tiremos EF perpendicular á AO y EG paralela á este radio, y nos resultarán los triángulos EFO y EGC semejantes á BDO el primero por ser EF paralela á BD y el segundo por ser los lados de EGC perpendiculares á los de BDO. De la inspeccion de la figura resulta:

$$CH = \text{sen.}\ (a+b) = EF + CG \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$HO = \cos.\ (a+b) = OF - EG \ldots\ldots\ldots (B)$$

Vamos á determinar los valores de las cuatro rectas, EF, CG, OF y EG, en funcion de los senos y cosenos de *a* y de *b*, á cuyo fin compararemos los triángulos EFO y EGC con su semejante BDO. Así, pues,

$EF : EO :: BD : BO$ ó $EF : \cos.b :: \text{sen.}a : r$ luego $EF = \dfrac{\text{sen.}a \cos.b}{r}$

$CG : CE :: DO : BO \quad CG : \text{sen.}b :: \cos.a : r \qquad CG = \dfrac{\text{sen.}b \cos.a}{r}$

$OF : EO :: DO : BO \quad OF : \cos.b :: \cos.a : r \qquad OF = \dfrac{\cos.a \cos.b}{r}$

$EG : CE :: BD : BO \quad EG : \text{sen.}b :: \text{sen.}a : r \qquad EG = \dfrac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}{r}$

Sustituyendo los valores de estas cuatro líneas en las ecuaciones (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}(a+b) = \frac{\text{sen.}a \cos.b + \text{sen.}b \cos.a}{r}$$

$$\cos.(a+b) = \frac{\cos.a \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b}{r}$$

y haciendo r=1, como anteriormente, á fin de simplificar nuestras fórmulas:

$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.}a \cos.b + \text{sen.}b \cos.a \ldots. (12)$$

$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b \ldots. (13)$$

Como las fórmulas que anteceden se han sacado geométricamente de una figura en la que se ha supuesto $a+b<90°$ y en la que los arcos son positivos, vamos á demostrar analíticamente que son aplicables á todos los casos cualesquiera que sean los valores de dichos arcos. Para llegar á esta conclusion general demostraremos: 1° que las expresadas fórmulas subsisten para todos los valores de *a* y de *b* comprendidos entre 0° y 90°; 2° que subsisten igualmente cuando á cualquiera de los arcos se le agrega 90°; 3° que son aplicables para todos los valores positivos de los arcos; y 4° que lo son igualmente para los valores negativos.

1°.—*Las fórmulas* [12] *y* [13] *subsisten para todos los valores de* a *y de* b *comprendidos entre* 0° *y* 90°.

Habiéndose establecido estas fórmulas para el caso en que $a+b<90°$, vamos á suponer que se tenga:

$$a+b>90°$$

Sean a' y b' los complementos respectivos de *a* y de *b*, tendremos:

$$a = 90^\circ - a'$$
$$b = 90^\circ - b'$$

Sumando estas ecuaciones: $a+b = 180^\circ - (a'+b')$. Así, pues, $(a+b)$ es suplemento de $(a'+b')$

Despejando $\qquad a'+b' = 180^\circ - (a+b)$

y como $(a+b) > 90^\circ$ se infiere $a'+b' < 90^\circ$, por lo cual las fórmulas (12) y (13) serán aplicables para los arcos a' y b'. Esto es,

$$\text{sen.}(a'+b') = \text{sen.}a' \cos.b' + \text{sen.}b' \cos.a'$$

y como el seno de un arco $(a'+b')$ es igual y del mismo signo que el de su suplemento $(a+b)$, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo en la última expresion, resulta:

$$\text{sen.}(a+b) = \cos.a\ \text{sen.}b + \cos.b\ \text{sen.}a$$

ó $\qquad \text{sen.}(a+b) = \text{sen.}a \cos.b + \text{sen.}b \cos.a$

luego la fórmula (12) subsiste cuando $(a+b) > 90^\circ$ lo mismo que cuando era menor que 90°.

Siendo aplicable la fórmula (13) demostrada geométricamente para los arcos a' y b' tendremos:

$$\cos.(a'+b') = \cos.a' \cos.b' - \text{sen.}a'\ \text{sen.}b'$$

Como el coseno de un arco $(a'+b')$ es igual al coseno de su suplemento $(a+b)$ tomado con signo contrario, y el seno de un arco es igual al coseno de su complemento y recíprocamente, sustituyendo, resulta:

$$-\cos.(a+b) = \text{sen.}a\ \text{sen.}b - \cos.a \cos.b$$

cambiando signos $\qquad \cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b$

luego la fórmula (13) subsiste para el caso en que $(a+b) > 90^\circ$.

2°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *subsisten igualmente cuando á cual quiera de los arcos* a *ó* b *se le agrega* 90°.

Por la hipótesis, las fórmulas (12) y (13) siendo aplicables á los arcos *a* y *b*, se tiene:

$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.}a \cos.b + \text{sen.}b \cos.a$$
$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b$$

Si á uno de estos arcos, *a* por ejemplo, le agregamos 90°, tendremos:

$$a' = a + 90^\circ$$

de donde $\qquad a = a' - 90^\circ$

Sustituyendo en las fórmulas anteriores, se tiene:

$$\text{sen.}(a'+b-90^\circ) = \text{sen.}(a'-90^\circ) \cos.b + \text{sen.}b \cos.(a'-90^\circ) \ldots\ldots (A)$$

$$\cos.(a'+b-90^\circ) = \cos.(a'-90^\circ) \cos.b - \text{sen.}(a'-90^\circ)\ \text{sen}\ b \ldots\ldots (B)$$

Fundándonos en que $\text{sen.}(-a) = -\text{sen.}a$ y en que $\cos.(-a) = \cos.a$, si representamos por x un arco cualquiera, tendremos en general:

$$\text{sen.}(x-90^\circ) = -\text{sen.}(90^\circ - x) = -\cos.x$$
$$\cos.(x-90^\circ) = \cos.(90^\circ - x) = \text{sen.}x$$

En vista de cuyos resultados puede trasformarse la expresion (A) en

$$-\cos.(a'+b) = -\cos.a' \cos.b + \text{sen.}b\ \text{sen.}a'$$

cambiando signos: $\qquad \cos.(a'+b) = \cos.a' \cos.b - \text{sen.}a'\ \text{sen.}b$

y la (B) en $\qquad \text{sen.}(a'+b) = \text{sen.}a' \cos.b + \cos.a'\ \text{sen.}b$

luego las fórmulas (12) y (13) subsisten igualmente cuando á uno de los arcos *a* se le agrega 90°, y se trasforma en *a'*.

3°—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son aplicables para todos los valores positivos de los arcos* a *y* b.

Supongamos, en efecto, que los arcos positivos *a* y *b* contengan respectivamente el primero *m* cuadrantes y el segundo *n* cuadrantes, de modo que

$$a = m.90^\circ + a'$$
$$b = n.\ 90^\circ + b'$$

Como a' y b' son ambos menores que 90°, para ellos serán aplicables las fórmulas (12) y (13), y se tendrá:

$$\text{sen.}(a'+b') = \text{sen.}a' \cos.b' + \text{sen.}b' \cos.a'$$
$$\cos.(a'+b') = \cos.a' \cos.b' - \text{sen.}a'\ \text{sen.}b'$$

Ahora bien: como segun el principio 3º, estas fórmulas subsisten si sucesivamente se agrega á a' ó b' una, dos, tres.... etc., veces, 90º, resulta que subsistirán para el caso en que *a'* se convierta en $a'+m\,90^\circ=a$ y b' se cambie en $b'+n\,90^\circ=b$, en consecuencia las fórmulas (12) y (13) son aplicables á dos arcos positivos, cualquiera que sea su magnitud.

4º—*Las fórmulas* (12) *y* (13) *son tambien aplicables para cuando* a *y* b *son negativos.*

Supongamos que cualquiera de estos arcos, ó ambos sean negativos, y designemos por *m* y *n* números bastante grandes para que $m.360^\circ-a=a'$ y $n.360^\circ-b=b'$ dén los arcos *a'* y *b'* positivos. Para estos arcos serán aplicables las fórmulas, (12) y (13) y se tendrá:

$$\text{sen.}(a'+b')=\text{sen.}a'\ \cos.b'+\text{sen.}b'\ \cos.a' \ldots\ldots (12)$$

sustituyendo:

$$\text{sen.}[(m+n)360^\circ-(a+b)]=\text{sen.}(m.360^\circ-a)\cos.(n.360^\circ-b)$$
$$+\text{sen.}(n.360^\circ-b)\cos.(m.360^\circ-a)$$

Recordando que $\text{sen.}m.360^\circ-a=-\text{sen.}a$

y que $\cos.m.360^\circ-a=+\cos.a$

tendremos:

$$-\text{sen.}(a+b)=-\text{sen.}a\ \cos.b-\text{sen.}b\ \cos.a$$

y cambiando signos resulta:

$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a$$

que es la fórmula (12) aplicada á los arcos negativos *a* y *b*.

Ahora $\cos.(a'+b')=\cos.a'\ \cos.b'-\text{sen.}a'\ \text{sen.}b' \ldots\ldots (13)$

sustituyendo:

$$\cos.[(m+n)360^\circ-(a+b)]=\cos.(m.360^\circ-a)\cos.(n.360^\circ-b)$$
$$-\text{sen.}(m.360^\circ-a)\text{sen.}(n.360^\circ-b)$$

ó $\cos.(a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b$

que es la fórmula (13) aplicada á los arcos negativos.

En consecuencia, la generalidad de las fórmulas (12) y (13) queda completamente establecida.

De paso haremos notar, que como se habrá observado al tratar del 2º principio, la fórmula (13) puede deducirse de la (12) y recíprocamente reemplazando *a* por $90^\circ+a$, ó *b* por $90^\circ+b$.

1 766.—Seno y coseno de la diferencia de dos arcos.—Si en las fórmulas (12) y (13) reemplazamos $+b$ por $-b$, y recordamos que $\text{sen.}(-a)=-\text{sen.}a$ y que $\cos.(-a)=\cos.a$, tendremos:

$$\text{sen.}(a-b)=\text{sen.}a\ \cos.b-\text{sen.}b\ \cos.a \ldots\ldots\ldots (14)$$
$$\cos.(a-b)=\cos.a\ \cos.b+\text{sen.}a\ \text{sen.}b \ldots\ldots\ldots (15)$$

1 767.—Seno y coseno de la suma y diferencia de varios arcos.—Si en la fórmula (12) reemplazamos el arco *b* por $b+c$, tendremos:

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a\ \cos.(b+c)+\text{sen.}(b+c)\cos.a$$

poniendo por $\cos.(b+c)$ y $\text{sen.}(b+c)$ sus valores conforme á las fórmulas (12) y (13) se tiene:

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a(\cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \text{sen.}c)+(\text{sen.}b\ \cos.c+\text{sen.}c\ \cos.b)\cos.a$$

$$\text{sen.}(a+b+c)=\text{sen.}a\ \cos.b\ \cos.c+\text{sen.}b\ \cos.a\ \cos.c+\text{sen.}c\ \cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c \ldots\ldots (16)$$

Si en esta fórmula reemplazáramos *c* por $c+d$, fácilmente obtendriamos la expresion del $\text{sen.}(a+b+c+d)$, y se concibe el procedimiento que habria que emplear para obtener el seno de la suma de un número cualquiera de arcos.

Ahora, si en la fórmula (13) reemplazamos *b* por $b+c$, tendremos:

$$\cos.(a+b+c)=\cos.a\ \cos.(b+c)-\text{sen.}a\ \text{sen.}(b+c)$$

poniendo por $\cos.(b+c)$ y por $\text{sen.}(b+c)$ sus valores, se tiene:

$$\cos.(a+b+c)=\cos.a\ (\cos.b\ \cos.c-\text{sen.}b\ \text{sen.}c)-\text{sen.}a\ (\text{sen.}b\ \cos.c+\text{sen.}c\ \cos.b)$$

$$\cos.(a+b+c)=\cos.a\ \cos.b\ \cos.c-\cos.a\ \text{sen.}b\ \text{sen.}c-\cos.b\ \text{sen.}a\ \text{sen.}c-\cos.c\ \text{sen.}a\ \text{sen.}b \ldots\ldots (17)$$

Si en las fórmulas (16) y (17) cambiamos signos á los arcos *b* y *c*, resulta:

sen. $(a-b-c)$=sen.a cos.b cos.c—sen.b cos.a cos.c—sen.c cos.a cos.b—sen.a sen.b sen.c............................(18)

cos. $(a-b-c)$ = cos.a cos.b cos.c — cos.a sen.b sen.c + cos.b sen.a sen.c + cos.c sen.a sen.b...............................(19)

De este modo pueden obtenerse las expresiones del seno y coseno de la diferencia entre un arco *a* y un número cualquiera *b. c, d....*

768.—Tangente y cotangente de la suma y la diferencia.— Hemos visto (729) que

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}},\ \text{luego}$$

$$\text{tang.}(a+b)=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{cos.}(a+b)}$$

poniendo por sen. $(a+b)$ y por cos. $(a+b)$ sus valores (12) y (13)

$$\text{tang.}(a+b)=\frac{\text{sen.a cos.b}+\text{sen.b cos.a}}{\text{cos.a cos.b}-\text{sen. a sen.b}}$$

dividiendo todos los términos por *cos.a cos.b*, se tiene:

$$\text{tang.}(a+b)=\frac{\frac{\text{sen.a cos.b}}{\text{cos.a cos.b}}+\frac{\text{sen.b cos.a}}{\text{cos.a cos.b}}}{\frac{\text{cos.a cos.b}}{\text{cos.a cos.b}}-\frac{\text{sen.a sen.b}}{\text{cos.a cos.b}}}$$

reduciendo, y teniendo presente que $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$=tang.a, resulta:

$$\text{tang.}(a+b)=\frac{\text{tang.a}+\text{tang.b}}{1-\text{tang.a tang.b}}\ldots.(20)$$

Si en esta expresion cambiamos $+b$ por $-b$, y recordamos que tang.$(-b)$=—tang.b, se tiene:

$$\text{tang.}(a-b)=\frac{\text{tang.a}-\text{tang.b}}{1+\text{tang.a tang.b}}\ldots.(21)$$

Si en la fórmula (20) reemplazamos *b* por *b+c*, tendremos:

$$\text{tang.}(a+b+c)=\frac{\text{tang.a}+\text{tang.}(b+c)}{1-\text{tang.a tang.}(b+c)}$$

poniendo por tang.$(b+c)$ su valor

$$\text{tang.}(a+b+c)=\frac{\text{tang.a}+\frac{\text{tang.b}+\text{tang.c}}{1-\text{tang.b tang.c}}}{1-\text{tang.a}\frac{\text{tang.b}+\text{tang.c}}{1-\text{tang.b tang.c}}}$$

incorporando el entero al quebrado, tanto en el numerador como en el denominador

$$\text{tang.}(a+b+c)=\frac{\frac{\text{tang.a}-\text{tang.a tang.b tang.c}+\text{tang.b}+\text{tang.c}}{1-\text{tang.b tang.c}}}{\frac{1-\text{tang.b tang.c}-\text{tang.a tang.b}-\text{tang.a tang.c}}{1-\text{tang.b tang.c}}}$$

multiplicando el numerador y el denominador por (1—*tang.b tang.c*) y ordenando los términos, resulta:

$$\text{tang.}\ (a+b+c)=\frac{\text{tang.a}+\text{tang.b}+\text{tang.c}-\text{tang.a tang.b tang.c}}{1-\text{tang.a tang.b}-\text{tang.a tang.c}-\text{tang.b tang.c}}(22)$$

Si cambiamos los signos á los arcos *b* y *c*, sus tangentes serán negativas y tendremos:

$$\text{tang.}\ (a-b-c)=\frac{\text{tang.a}-\text{tang.b}-\text{tang.c}-\text{tang.a tang.b tang.c}}{1+\text{tang.a tang.b}+\text{tang.a tang.c}-\text{tang.b tang.c}}(23)$$

Se comprende que empleando el mismo procedimiento obtendriamos las expresiones de tang. $(a+b+c+d+...)$ y tang.$(a-b-c-d-....)$

Como cot.a=$\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$, tendremos:

$$\text{cot.}(a+b)=\frac{\text{cos.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ (a+b)}=\frac{\text{cos.a cos.b}-\text{sen.a sen.b}}{\text{sen.a cos.b}+\text{sen.b cos.a}}$$

dividiendo todos los términos por sen.a sen.b

$$\text{cot.}\ (a+b)=\frac{\frac{\text{cos.a cos.b}}{\text{sen.a sen.b}}-\frac{\text{sen.a sen.b}}{\text{sen.a sen.b}}}{\frac{\text{sen.a cos.b}}{\text{sen.a sen.b}}+\frac{\text{sen.b cos.a}}{\text{sen.a sen.b}}}$$

reduciendo, y en virtud de que $\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}=\text{cot.a}$, resulta:

$$\text{cot. }(a+b)=\frac{\text{cot.a cot.b}-1}{\text{cot.b}+\text{cot.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

Si se reemplaza $+b$ por $-b$, y se tiene presente que cot.$(-a)=-$cot.a, se tiene:

$$\text{cot. }(a-b)=\frac{-\text{cot.a cot.b}-1}{-\text{cot.b}+\text{cot.a}}$$

cambiando signos al numerador y al denominador, resulta:

$$\text{cot. }(a-b)=\frac{\text{cot.a cot.b}+1}{\text{cot.b}-\text{cot.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Empleando el mismo procedimiento que con la tangente, se pueden fácilmente determinar las expresiones de cot.$(a+b+c)$, cot.$(a-b-c)$, cot. $(a\pm b\pm c\pm d\ldots.)$

769.—Fórmulas de los arcos múltiplos.—Si en la expresion

$$\text{sen. }(a+b)=\text{sen.a cos.b}+\text{sen.b cos.a}$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\text{sen. }2\,a=2\text{ sen.a cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

Si en la expresion:

$$\text{cos. }(a+b)=\text{cos.a cos.b}-\text{sen.a sen.b}$$

hacemos $b=a$, resultará:

$$\text{cos. }2\,a=\text{cos}^2a-\text{sen}^2a\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Para obtener sen.3 a haremos en la expresion (12) de sen. $(a+b)$, $b=2\,a$, y tendremos:

$$\text{sen. }3\,a=\text{sen.a cos. }2\,a+\text{sen. }2\,a\text{ cos.a}$$

sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores (26) y (27):

$$\begin{aligned}\text{sen. }3\,a&=\text{sen.a }(\text{cos}^2a-\text{sen}^2a)+2\text{ sen.a.cos.a.cos.a}\\&=\text{sen.a cos}^2a-\text{sen}^3a+2\text{ sen.a cos}^2a=3\text{ sen.a cos}^2a-\text{sen}^3a\\&=3\text{ sen.a }(1-\text{sen}^2a)-\text{sen}^3a\end{aligned}$$

$$\text{sen. }3\,a=3\text{ sen.a}-4\text{ sen}^3a\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Para obtener cos. 3 a, en la expresion (13) de cos. $(a+b)$ haremos $b=2\,a$, y tendremos:

$$\text{cos. }3\,a=\text{cos.a cos.}2\,a-\text{sen.a sen.}2\,a$$

Sustituyendo por sen.2 a y por cos.2 a sus valores, se tiene:

$$\begin{aligned}\text{cos. }3\,a&=\text{cos.a }(\text{cos}^2a-\text{sen}^2a)-\text{sen.a }2\text{ sen.a cos.a}\\&=\text{cos}^3a-\text{cos.a sen}^2a-2\text{ sen}^2a\text{ cos.a}\\&=\text{cos}^3a-3\text{ cos.a sen}^2a=\text{cos}^3a-3\text{ cos.a }(1-\text{cos}^2a)\end{aligned}$$

$$\text{cos. }3\,a=4\text{ cos}^3a-3\text{ cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Ampliando este procedimiento pueden obtenerse las fórmulas de los senos y cosenos de los arcos 4 a, 5 a, etc.

Si en la expresion (20)

$$\text{tang. }(a+b)=\frac{\text{tang.a}+\text{tang.b}}{1-\text{tang.a tang.b}}$$

hacemos $b=a$, se tiene

$$\text{tang. }2\,a=\frac{2\text{ tang.a}}{1-\text{tang}^2a}\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

Si en la misma expresion (20) hacemos $b=2\,a$, tendremos:

$$\text{tang. }3\,a=\frac{\text{tang. a}+\text{tang. }2\,a}{1-\text{tang.a tang.}2\,a}=\frac{\text{tang.a}+\frac{2\text{ tang.a}}{1-\text{tang}^2a}}{1-\text{tang.a}\frac{2\text{ tang.a}}{1-\text{tang}^2a}}$$

reduciendo los enteros á la forma de los quebrados que los acompañan, y suprimiendo despues el denominador $1-\text{tang}^2a$, que es comun á los dos términos del quebrado, resulta:

$$\text{tang. }3\,a=\frac{3\text{ tang.a}-\text{tang}^3a}{1-3\text{ tang}^2a}\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

Si en la fórmula (24)

$$\text{cot. }(a+b)=\frac{\text{cot.a cot.b}-1}{\text{cot.b}+\text{cot.a}}$$

hacemos $b=a$, se tiene:

$$\text{cot. }2\,a=\frac{\text{cot}^2a-1}{2\text{ cot.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$