Dividiendo todos los términos de esta expresion por *cot.a*, se le puede dar otra forma en que suele usarse:

$$\cot.\ 2\ a=\tfrac{1}{2}\ (\cot.a-\tan g.a)$$

Si en la expresion (31) sustituimos por las tangentes sus valores en funcion de la cotangente,

$$\tan g.a=\frac{1}{\cot.a}$$

tendremos:

$$\frac{1}{\cot.3\ a}=\frac{\dfrac{3}{\cot.a}-\dfrac{1}{\cot^3 a}}{1-\dfrac{3}{\cot^2 a}}=\frac{\dfrac{3\ \cot^2 a}{\cot^3 a}-\dfrac{1}{\cot^3 a}}{\dfrac{\cot^3 a}{\cot^3 a}-\dfrac{3\ \cot.a}{\cot^3 a}}$$

ó

$$\frac{1}{\cot.3\ a}=\frac{3\ \cot^2 a-1}{\cot^3 a-3\ \cot.a}$$

luego

$$\cot\ 3\ a=\frac{\cot^3 a-3\ \cot.a}{3\ \cot^2 a-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (33)$$

770.—Fórmulas de los arcos de la mitad.—Para determinar el seno de un arco en funcion del seno y coseno de la mitad, si en la expresion (26)

$$\text{sen.}\ 2\ a=2\ \text{sen.}a\ \cos.a$$

reemplazamos por *a*, $\frac{1}{2}$ *a*, tendrémos:

$$\text{sen.}a=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (34)$$

Para determinar el seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno, si en la fórmula (27)

$$\cos.\ 2\ a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a$$

reemplazamos igualmente *a* por $\frac{1}{2}$ *a*, tendrémos:

$$\cos.a=\cos^2\tfrac{1}{2}\ a-\text{sen}^2\ \tfrac{1}{2}a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (35)$$

Por otra parte (729) $1=\text{sen}^2\frac{1}{2}\ a+\cos^2\frac{1}{2}\ a$

Con el objeto de eliminar $\cos^2\frac{1}{2}$ a, que tiene el mismo signo en estas ecuaciones, restarémos de la última ecuacion la (35) y se tiene:

$$1-\cos.a=2\ \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\ a$$

de la que resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a=\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (36)$$

Para eliminar $\text{sen}^2\frac{1}{2}$ a, que tiene signos diferentes en las mismas ecuaciones, las sumarémos, y se tiene:

$$1+\cos.a=2\ \cos^2\tfrac{1}{2}\ a$$

de la que resulta: $\cos.\ \frac{1}{2}\ a=\sqrt{\dfrac{1\ +\ \cos\ a}{2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (37)$

Estando expresados el seno y coseno de la mitad por un radical de 2º grado, implícitamente precedido del signo $\pm$, cada una de estas líneas tiene dos valores iguales y de signo contrario, habiéndonos resultado ambas en funcion del coseno de *a*. La razon de esto es, que todo coseno corresponde á dos arcos (738) que podemos representar por el arco $n.360°+a$ y $n.360°-a$, en cuyas expresiones *n* es un número entero cualquiera que puede ser nulo. De consiguiente, si se busca sen $\frac{1}{2}$ a ó cos. $\frac{1}{2}$ a en funcion de cos. a, el cálculo debe dar al mismo tiempo los senos de las mitades de todos los arcos comprendidos en las expresiones $n.360°+a$ y $n.360°-a$, así como los cosenos de estas mismas mitades; es decir, que se deben tener todos los valores comprendidos en sen. $\left(\dfrac{n.\ 360°\pm a}{2}\right)$ ó en la de cos. $\left(\dfrac{n.\ 360°\pm a}{2}\right)$

En la práctica, cuando se conoce el valor numérico del arco *a* ó siquiera el cuadrante á que pertenece, valiéndonos de los valores correlativos del seno y coseno, siempre es fácil determinar el signo que debe tomarse. Por ejemplo, si $a<90°$, que es el caso mas comun, $\frac{a}{2}<45$, y como el seno y coseno de un arco menor que 90° son positivos, tomarémos para sen. $\frac{1}{2}$ a y cos $\frac{1}{2}$ a el signo + del radical. Esto es, nuestras fórmulas, sen $\frac{1}{2}$ a $=\sqrt{\dfrac{1-\cos.a}{2}}$ y cos $\frac{1}{2}$ a$=\sqrt{\dfrac{1\ +\ \cos.a}{2}}$ son las adecuadas para el caso en que el arco *a* sea menor que 90°.

Considerando el triángulo rectángulo formado por el radio, el seno y el coseno, si el ángulo del centro es menor que 45°, el ángulo formado por el radio y el seno será mayor que 45°, y como al ángulo mayor está opuesto el mayor lado, resulta que para arcos menores que 45° el coseno es mayor que el seno.

En las fórmulas obtenidas, el seno y coseno de la mitad están en funcion de cos.a Si se quieren determinar en funcion del seno operaremos como sigue. Se sabe que

$$1 = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\, a + \cos^2 \tfrac{1}{2}\, a$$
$$\text{sen.}a = 2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a \cos \tfrac{1}{2}\, a$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se tiene:

$$1 + \text{sen.}a = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\, a + 2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a \cos \tfrac{1}{2}\, a + \cos^2 \tfrac{1}{2}\, a = (\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a + \cos \tfrac{1}{2}\, a)^2 \ldots (A)$$

Si se restan las mismas ecuaciones, se tiene:

$$1 - \text{sen.}a = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\, a - 2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a \cos.\ \tfrac{1}{2}\, a + \cos^2 \tfrac{1}{2}\, a = (\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a - \cos \tfrac{1}{2}\, a)^2 \ldots (B)$$

Extrayendo raiz á las ecuaciones (A) y (B) resulta:

$$\sqrt{1 + \text{sen.}a} = \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a + \cos \tfrac{1}{2}\, a$$
$$\sqrt{1 - \text{sen.}a} = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\, a - \cos.\ \tfrac{1}{2}\, a$$

Conociendo la suma y la diferencia de sen. ½ a y cos ½ a, la mayor de estas cantidades será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia (226 V) Así, pues:

$$\text{Cuando sen}\ \tfrac{1}{2}\, a > \cos \tfrac{1}{2}\, a \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \\ \cos\ \tfrac{1}{2}\, a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \end{array} \right.$$

$$\text{Cuando sen}\ \tfrac{1}{2}\, a < \cos \tfrac{1}{2}\, a \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen.}\tfrac{1}{2}\, a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \\ \cos.\tfrac{1}{2}\, a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \end{array} \right.$$

Estas expresiones pueden reasumirse en las dos siguientes:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \ldots\ldots\ldots (38)$$
$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\, a = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen.}a} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen.}a} \ldots\ldots\ldots (39)$$

Cuyos signos se determinarán conociendo el valor del arco a y sabiendo si el seno de ½ a es mayor ó menor que cos. ½ a, segun acabamos de explicarlo.

771.—TANGENTE DE LA MITAD.—Fundándonos en la expresion (4)

(729) $\text{tang.}a = \dfrac{\text{sen. }a}{\cos.a}$, tenemos:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\, a}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\, a}$$

Reemplazando por sen. ½a y por cos. ½ a sus valores (36) y (37) y reduciendo resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{1 + \cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

á esta expresion se le suele dar otras formas. Multiplicando los dos términos dentro del radical por (1+cos.a), se tiene:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{(1 - \cos a)\ (1 + \cos.a)}{(1 + \cos.a)^2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{1 + \cos.a} = \frac{\sqrt{\text{sen}^2 a}}{1 + \cos.a}$$

luego: $$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\text{sen.}a}{1 + \cos.a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Si los términos del quebrado de la expresion (40) se multiplican por (1—cos.a), resulta:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{1 - \cos.a}{\text{sen.}a} \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Si se quiere determinar el valor de tang. ½ a en funcion de *tang.a*, procederémos como sigue:

La expresion (30) da: $$\text{tang.}\ 2\, a = \frac{2\ \text{tang.}a}{1 - \text{tang.}^2 a}$$

Reemplazando a por ½ a, resulta:

$$\text{tang.}a = \frac{2\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a}{1 - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} a}$$

se trata, pues, de despejar á tang. ½ a de esta ecuacion. Quitando el denominador, se tiene:

$$\text{tang.}a - \text{tang.}a\ \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, a = 2\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a$$

trasladando y dividiendo todos los términos por tang.a, resulta:

$$1 = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} a + \frac{2}{\text{tang.}a}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, a$$

Despejando á tang. ½ a en esta ecuacion mixta de segundo grado, resulta:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{-1}{\text{tang.}a} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2 a} + 1}$$

incorporando el entero al quebrado dentro del radical y sacando fuera de éste el denominador, se tiene definitivamente:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = -\frac{1}{\text{tang.a}} \pm \frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}} \cdots\; (43)$$

De esta expresion, resultan dos valores para tang. $\frac{1}{2}$ a segun sea el signo que se tome del radical, lo cual procede de que como hemos visto (745) toda tangente corresponde igualmente al arco *a* y á 180° + a, siendo como es 180° la amplitud del período de la tangente; pero cuando se conoce el valor del arco *a* ó por lo menos el cuadrante en que termina, desde luego puede determinarse el signo que debe adoptarse para tang. $\frac{1}{2}$ a. Por ejemplo, si a < 90° tang. $\frac{1}{2}$ a, lo mismo que tang.a, serán positivas y la fórmula correspondiente debe ser en este caso:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = -\frac{1}{\text{tang.a}} + \frac{1}{\text{tang.a}}\sqrt{1+\text{tang}^2\text{a}}$$

772.—Cotangente de la mitad.—Siendo el valor de $\text{cot.a} = \frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$,

se tiene $$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{ a}}{\text{sen. } \frac{1}{2}\text{ a}}$$

reemplazando por cos. $\frac{1}{2}$ a y sen. $\frac{1}{2}$ a sus valores (37) y (36) y reduciendo, resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \sqrt{\frac{1+\text{cos. a}}{1-\text{cos. a}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\; (44)$$

si se multiplican los dos términos del quebrado por (1 + cos.a), resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \frac{1+\text{cos. a}}{\text{sen.a}} \cdots\cdots\cdots\cdots\; (45)$$

y si se multiplican por (1 — cos.a), se tendrá:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \frac{\text{sen.a}}{1-\text{cos.a}} \cdots\cdots\cdots\cdots\; (46)$$

Si se quiere el valor de cot. $\frac{1}{2}$ a en funcion de cot.a, procederémos como sigue:

Fórmula (32) $$\text{cot. } 2\text{ a} = \frac{\text{cot}^2\text{a}-1}{2\text{ cot.a}}$$

reemplazando *a* por $\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$\text{cot. a} = \frac{\text{cot.}^2\frac{1}{2}\text{a}-1}{2\text{ cot. } \frac{1}{2}\text{ a}}$$

quitando el denominador: $2\text{ cot.a cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \text{cot}^2\tfrac{1}{2}\text{ a} - 1$

trasladando: $1 = \text{cot}^2\tfrac{1}{2}\text{ a} - 2\text{ cot.a cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a}$

despejando á cot. $\frac{1}{2}$ a de esta ecuacion mixta de segundo grado, resulta:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{ a} = \text{cot.a} \pm \sqrt{\text{cot}^2\text{a}+1} \cdots\cdots\cdots\; (47)$$

Despues de habernos ocupado de las fórmulas relativas á la suma y diferencia de los arcos, de las de los arcos múltiplos y de los arcos de la mitad, vamos á establecer otras expresiones que fácilmente se deducen de estas fórmulas.

773.—Expresiones del cuadrado de algunas líneas.—Hemos visto que

$$\text{cos.2 a} = \text{cos}^2\text{a} - \text{sen}^2\text{a} \ldots \text{fórmula (18)}$$

reemplazando por cos^2a su valor: $1-\text{sen}^2$a, se tiene:

$$\text{cos.2 a} = 1 - 2\text{ sen}^2\text{a}$$

despejando á $$\text{sen}^2\text{a} = \frac{1-\text{cos. 2 a}}{2} \cdots\cdots\cdots\; (48)$$

si se sustituye el valor de $\text{sen}^2\text{a} = 1 - \text{cos}^2\text{a}$ en la misma fórmula (18), se tiene:

$$\text{cos. 2 a} = \text{cos}^2\text{a} - 1 + \text{cos}^2\text{a} = 2\text{ cos}^2\text{a} - 1$$

despejando á $$\text{cos}^2\text{a} = \frac{1+\text{cos. 2 a}}{2} \cdots\cdots\cdots\; (49)$$

Dividiendo la (48) por la (49) y en virtud de que $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} = \text{tang.a}$, resulta:

$$\text{tang}^2\text{a} = \frac{1-\text{cos. 2 a}}{1+\text{cos. 2 a}} \cdots\cdots\cdots\; (50)$$

Dividiendo la (49) por la (48), y en razon de que $\cot.a = \frac{\cos.a}{\text{sen}.a}$, se tiene:

$$\cot^2 a = \frac{1+\cos.\ 2\,a}{1-\cos.\ 2\,a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Hemos visto (729) que

$$\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$$
$$\text{sen}^2 b = 1 - \cos^2 b$$

restando estas ecuaciones, miembro á miembro, resulta:

$$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

774.—Relaciones del seno y coseno de la suma al seno y coseno de la diferencia.—En el número 765 hemos demostrado las siguientes expresiones:

fórmula (12) $\text{sen}.(a+b) = \text{sen}.a \cos.b + \text{sen}.b \cos.a$
(14) $\text{sen}.(a-b) = \text{sen}.a \cos.b - \text{sen}.b \cos.a$
(13) $\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b$
(15) $\cos.(a-b) = \cos.a \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b$

Dividiendo la ecuacion (12) por la (14), se tiene:

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} = \frac{\text{sen}.a \cos.b + \text{sen}.b \cos.a}{\text{sen}.a \cos.b - \text{sen}.b \cos.a}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2º miembro por *cos.a cos.b*, resulta:

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} = \frac{\text{tang}.a + \text{tang}.b}{\text{tang}.a - \text{tang}.b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Si se dividen miembro á miembro la ecuacion (13) por la (15), se tiene:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b}{\cos.a \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b}$$

dividiendo los términos del quebrado del 2º miembro por *cos.a sen.b*, resulta:

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cot.b - \text{tang}.a}{\cot.b + \text{tang}.a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

775.—Productos de los senos y cosenos.—Considerando las fórmulas (12) y (14), tenemos:

$$\text{sen}.(a+b) = \text{sen}.a \cos.b + \text{sen}.b \cos.a$$
$$\text{sen}.(a-b) = \text{sen}.a \cos.b - \text{sen}.b \cos.a$$

Combinando estas fórmulas por adicion y sustraccion, se tiene:

$$\text{sen}.(a+b) + \text{sen}.(a-b) = 2\ \text{sen}.a \cos.b$$
$$\text{sen}.(a+b) - \text{sen}.(a-b) = 2\ \text{sen}.b \cos.a$$

De las que resulta:

$$\text{sen}.a \cos.b = \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.(a+b) + \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.(a-b) \ldots\ldots (55)$$
$$\text{sen}.b \cos.a = \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.(a+b) - \tfrac{1}{2}\ \text{sen}.(a-b) \ldots\ldots (56)$$

Las fórmulas (13) y (15):

$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$
$$\cos.(a-b) = \cos.a \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

combinándolas por adicion y sustraccion, dan:

$$\cos.(a+b) + \cos.(a-b) = 2 \cos.a \cos.b$$
$$\cos.(a-b) - \cos.(a+b) = 2\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

De las que resulta:

$$\cos.a \cos.b = \tfrac{1}{2} \cos.(a+b) + \tfrac{1}{2} \cos.(a-b) \ldots\ldots\ldots (57)$$
$$\text{sen}.a\ \text{sen}.b = \tfrac{1}{2} \cos.(a-b) - \tfrac{1}{2} \cos.(a+b) \ldots\ldots\ldots (58)$$

776.—Suma y diferencia de las líneas trigonométricas.—En el párrafo anterior hemos visto que combinando por adicion y sustraccion las fórmulas relativas al seno y coseno de la suma de dos arcos con las de su diferencia, se tiene:

$$\text{sen}.(a+b) + \text{sen}.(a-b) = 2\ \text{sen}.a \cos.b$$
$$\text{sen}.(a+b) - \text{sen}.(a-b) = 2\ \text{sen}.b \cos.a$$
$$\cos.(a+b) + \cos.(a-b) = 2 \cos.a \cos.b$$
$$\cos.(a-b) - \cos.(a+b) = 2\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b$$

Ahora bien: si hacemos $a+b=p$, y $a-b=q$, resultará: (266 V.)

$$a = \tfrac{1}{2}(p+q) \quad b = \tfrac{1}{2}(p-q)$$

y sustituyendo estos valores en las cuatro ecuaciones anteriores, resulta:

$$\text{sen.p}+\text{sen.q}=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \dots\dots\dots(59)$$

$$\text{sen.p}-\text{sen.q}=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \dots\dots\dots(60)$$

$$\text{cos.q}+\text{cos.p}=2\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \dots\dots\dots(61)$$

$$\text{cos.q}-\text{cos.p}=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \dots\dots\dots(62)$$

Debemos hacer notar, que siendo el arco $p>q$ se tiene $\text{cos.p}<\text{cos.q}$, porque en el 1er. cuadrante al aumentar el arco disminuye el coseno. Estas cuatro últimas fórmulas suelen ser de uso frecuente, especialmente para hacer adecuadas al empleo de los logaritmos algunas expresiones trigonométricas, supuesto que una funcion de suma y diferencia se trasforma en otra de producto.

$$\text{tang.a}+\text{tang.b}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}+\frac{\text{sen.b}}{\text{cos.b}}=\frac{\text{sen.a cos.b}+\text{sen.b cos.a}}{\text{cos.a cos.b}}$$

$$\text{luego (12) tang.a}+\text{tang.b}=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{cos.a cos.b}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(63)$$

$$\text{tang.a}-\text{tang.b}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}-\frac{\text{sen.b}}{\text{cos.b}}=\frac{\text{sen.a cos.b}-\text{sen.b cos.a}}{\text{cos.a cos.b}}$$

$$\text{luego (14) tang.a}-\text{tang.b}=\frac{\text{sen.}(a-b)}{\text{cos.a cos.b}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(64)$$

$$\text{cot.a}+\text{cot.b}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}+\frac{\text{cos.b}}{\text{sen.b}}=\frac{\text{cos.a sen.b}+\text{sen.a cos.b}}{\text{sen.a sen.b}}$$

$$\text{luego (12) cot.a}+\text{cot.b}=\frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.a sen.b}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(65)$$

$$\text{cot.a}-\text{cot.b}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}-\frac{\text{cos.b}}{\text{sen.b}}=\frac{\text{cos.a sen.b}-\text{cos.b sen.a}}{\text{sen.a sen.b}}$$

$$\text{luego (14) cot.a}-\text{cot.b}=\frac{\text{sen.}(b-a)}{\text{sen.a sen.b}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(66)$$

777.—Relaciones entre la suma y diferencia de las líneas trigonométricas.—Las siguientes expresiones se obtienen dividiendo sucesivamente las ecuaciones:

$$\text{59 por 60 y simplificando da:}\ \frac{\text{sen.p}+\text{sen.q}}{\text{sen.p}-\text{sen.q}}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\ (p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}\ (p-q)}\ \dots\dots\dots(67)$$

$$\text{59 por 61}\qquad \frac{\text{sen.p}+\text{sen.q}}{\text{cos.q}+\text{cos.p}}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \dots\dots\dots(68)$$

$$\text{59 por 62}\qquad \frac{\text{sen.p}+\text{sen.q}}{\text{cos.q}-\text{cos.p}}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \dots\dots\dots(69)$$

$$\text{60 por 61}\qquad \frac{\text{sen.p}-\text{sen.q}}{\text{cos.q}+\text{cos.p}}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \dots\dots\dots(70)$$

$$\text{60 por 62}\qquad \frac{\text{sen.p}-\text{sen.q}}{\text{cos.q}-\text{cos.p}}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \dots\dots\dots(71)$$

$$\text{61 por 62}\qquad \frac{\text{cos.q}+\text{cos.p}}{\text{cos.q}-\text{cos.p}}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}(p+q)\text{cot.}\tfrac{1}{2}(p-q).(72)$$

$$\text{63 por 64}\qquad \frac{\text{tang.a}+\text{tang.b}}{\text{tang.a}-\text{tang.b}}=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)}\ \dots\dots\dots(73)$$

$$\text{65 por 66}\qquad \frac{\text{cot.a}+\text{cot.b}}{\text{cot.a}-\text{cot.b}}=\frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}(b-a)}\ \dots\dots\dots(74)$$

778.—Las fórmulas fundamentales y las que hemos demostrado en los párrafos anteriores, las reuniremos en la siguiente tabla con el doble objeto de que los alumnos las graben en su memoria, y para que, consultándola, puedan fácilmente resolver cualquiera duda. En todas se ha supuesto el radio igual á 1.

Tabla de las principales fórmulas de Trigonometría rectilínea.

$$1=\text{sen}^2\text{a}+\text{cos}^2\text{a}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\text{sec}^2\text{a}=1+\text{tang}^2\text{a}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\text{cosec}^2\text{a}=1+\text{cot}^2\text{a}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(6)$$

$$\text{cot.a}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen,a}}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(7)$$

$$\cot.a = \frac{1}{\text{tang}.a} \qquad (8)$$

$$\text{tang}.a = \frac{1}{\cot.a} \qquad (9)$$

$$\text{sen.ver}.a = 1 - \cos.a \qquad (10)$$

$$\cos.\text{ver}.a = 1 - \text{sen}.a \qquad (11)$$

$$\text{sen}.(a+b) = \text{sen}.a \cos.b + \text{sen}.b \cos.a \qquad (12)$$

$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b \qquad (13)$$

$$\text{sen}.(a-b) = \text{sen}.a \cos.b - \text{sen}.b \cos.a \qquad (14)$$

$$\cos.(a-b) = \cos.a \cos.b + \text{sen}.a\ \text{sen}.b \qquad (15)$$

$$\text{sen}.(a+b+c) = \text{sen}.a \cos.b \cos.c + \text{sen}.b \cos.a \cos.c + \text{sen}.c \cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b\ \text{sen}.c \qquad (16)$$

$$\cos.(a+b+c) = \cos.a \cos.b \cos.c - \cos.a\ \text{sen}.b\ \text{sen}.c - \cos.b\ \text{sen}.a\ \text{sen}.c - \cos.c\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b \qquad (17)$$

$$\text{sen}.(a-b-c) = \text{sen}.a \cos.b \cos.c - \text{sen}.b \cos.a \cos.c - \text{sen}.c \cos.a \cos.b - \text{sen}.a\ \text{sen}.b\ \text{sen}.c \qquad (18)$$

$$\cos.(a-b-c) = \cos.a \cos.b \cos.c - \cos.a\ \text{sen}.b\ \text{sen}.c + \cos.b\ \text{sen}.a\ \text{sen}.c + \cos.c\ \text{sen}.a\ \text{sen}.b \qquad (19)$$

$$\text{tang}.(a+b) = \frac{\text{tang}.a + \text{tang}.b}{1 - \text{tang}.a\ \text{tang}.b} \qquad (20)$$

$$\text{tang}.(a-b) = \frac{\text{tang}.a - \text{tang}.b}{1 + \text{tang}.a\ \text{tang}.b} \qquad (21)$$

$$\text{tang}.(a+b+c) = \frac{\text{tang}.a + \text{tang}.b + \text{tang}.c - \text{tang}.a\ \text{tang}.b\ \text{tang}.c}{1 - \text{tang}.a\ \text{tang}.b - \text{tang}.a\ \text{tang}.c - \text{tang}.b\ \text{tang}.c} \qquad (22)$$

$$\text{tang}.(a-b-c) = \frac{\text{tang}.a - \text{tang}.b - \text{tang}.c - \text{tang}.a\ \text{tang}.b\ \text{tang}.c}{1 + \text{tang}.a\ \text{tang}.b + \text{tang}.a\ \text{tang}.c - \text{tang}.b\ \text{tang}.c} \qquad (23)$$

$$\cot.(a+b) = \frac{\cot.a \cot.b - 1}{\cot.b + \cot.a} \qquad (24)$$

$$\cot.(a-b) = \frac{\cot.a \cot.b + 1}{\cot.b - \cot.a} \qquad (25)$$

$$\text{sen}.2\,a = 2\ \text{sen}.a \cos.a \qquad (26)$$

$$\cos.2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \qquad (27)$$

$$\text{sen}.3\,a = 3\ \text{sen}.a - 4\ \text{sen}^3 a \qquad (28)$$

$$\cos.3\,a = 4 \cos^3 a - 3 \cos.a \qquad (29)$$

$$\text{tang}.2\,a = \frac{2\ \text{tang}.a}{1 - \text{tang}^2 a} \qquad (30)$$

$$\text{tang}.3\,a = \frac{3\ \text{tang}.a - \text{tang}^3 a}{1 - 3\ \text{tang}^2 a} \qquad (31)$$

$$\cot.2\,a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot.a} \qquad (32)$$

$$\cot.3\,a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot.a}{3 \cot^2 a - 1} \qquad (33)$$

$$\text{sen}.a = 2\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,a \cos.\tfrac{1}{2}\,a \qquad (34)$$

$$\cos.a = \cos^2 \tfrac{1}{2}\,a - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}\,a \qquad (35)$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{2}} \qquad (36)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 + \cos.a}{2}} \qquad (37)$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}\,a = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen}.a} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen}.a} \qquad (38)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,a = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + \text{sen}.a} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \text{sen}.a} \qquad (39)$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{1 + \cos.a}} \qquad (40)$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,a = \frac{\text{sen}.a}{1 + \cos.a} \qquad (41)$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos.a}{\text{sen}.a} \qquad (42)$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang}.a} \pm \frac{1}{\text{tang}.a} \sqrt{1 + \text{tang}^2 a} \qquad (43)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 + \cos.a}{1 - \cos.a}} \qquad (44)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a = \frac{1 + \cos.a}{\text{sen}.a} \qquad (45)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a = \frac{\text{sen}.a}{1 - \cos.a} \qquad (46)$$

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,a=\text{cot.}a\pm\sqrt{\text{cot}^2a+1}\dots\dots\quad(47)$$

$$\text{sen}^2a=\frac{1-\text{cos.}2\,a}{2}\dots\dots\quad(48)$$

$$\text{cos}^2a=\frac{1+\text{cos.}2\,a}{2}\dots\dots\quad(49)$$

$$\text{tang}^2a=\frac{1-\text{cos.}2\,a}{1+\text{cos.}2\,a}\dots\dots\quad(50)$$

$$\text{cot}^2a=\frac{1+\text{cos.}2\,a}{1-\text{cos.}2\,a}\dots\dots\quad(51)$$

$$\text{sen}^2a-\text{sen}^2b=\text{cos}^2b-\text{cos}^2a\dots\dots\quad(52)$$

$$\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)}=\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{\text{tang.}a-\text{tang.}b}\dots\dots\quad(53)$$

$$\frac{\text{cos.}(a+b)}{\text{cos.}(a-b)}=\frac{\text{cot.}b-\text{tang.}a}{\text{cot.}b+\text{tang.}a}\dots\dots\quad(54)$$

$$\text{sen.}a\ \text{cos.}b=\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}(a+b)+\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}(a-b)\dots\dots\quad(55)$$

$$\text{sen.}b\ \text{cos.}a=\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}(a+b)-\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}(a-b)\dots\dots\quad(56)$$

$$\text{cos.}a\ \text{cos.}b=\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}(a+b)+\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}(a-b)\dots\dots\quad(57)$$

$$\text{sen.}a\ \text{sen.}b=\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}(a-b)-\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}(a+b)\dots\dots\quad(58)$$

$$\text{sen.}p+\text{sen.}q=2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(59)$$

$$\text{sen.}p-\text{sen.}q=2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\dots\dots\quad(60)$$

$$\text{cos.}q+\text{cos.}p=2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(61)$$

$$\text{cos.}q-\text{cos.}p=2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(62)$$

$$\text{tang.}a+\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{cos.}a\ \text{cos.}b}\dots\dots\quad(63)$$

$$\text{tang.}a-\text{tang.}b=\frac{\text{sen.}(a-b)}{\text{cos.}a\ \text{cos.}b}\dots\dots\quad(64)$$

$$\text{cot.}a+\text{cot.}b=\frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}\dots\dots\quad(65)$$

$$\text{cot.}a-\text{cot.}b=\frac{\text{sen.}(b-a)}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}\dots\dots\quad(66)$$

$$\frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\text{sen.}p-\text{sen.}q}=\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)}\dots\dots\quad(67)$$

$$\frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\text{cos.}q+\text{cos.}p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\dots\dots\quad(68)$$

$$\frac{\text{sen.}p+\text{sen.}q}{\text{cos.}q-\text{cos.}p}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(69)$$

$$\frac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\text{cos.}q+\text{cos.}p}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(70)$$

$$\frac{\text{sen.}p-\text{sen.}q}{\text{cos.}q-\text{cos.}p}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\dots\dots\quad(71)$$

$$\frac{\text{cos.}q+\text{cos.}p}{\text{cos.}q-\text{cos.}p}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)\dots\dots\quad(72)$$

$$\frac{\text{tang.}a+\text{tang.}b}{\text{tang.}a-\text{tang.}b}=\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)}\dots\dots\quad(73)$$

$$\frac{\text{cot.}a+\text{cot.}b}{\text{cot.}a-\text{cot.}b}=\frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}(b-a)}\dots\dots\quad(74)$$

Demostracion geométrica de algunas fórmulas generales.

779.—Como habrá podido notarse, valiéndonos de las relaciones geométricas en una figura adecuada, hemos establecido las fórmulas llamadas fundamentales y las del seno y coseno de la suma de dos arcos, y en seguida por puros procedimientos algebraicos, hemos deducido todas las demas; resultando que, siendo las primeras ciertas para cualquiera clase de arcos, las últimas, conforme al carácter de los métodos analíticos, tienen la mayor generalidad, interpretando, como lo hemos dicho, el significado de los símbolos algebraicos en los valores correlativos de los arcos y sus líneas trigonométricas. Los métodos de la geometría especial, envuelven casi siempre, en oposicion de los procedimientos analíticos, cierto espíritu de individualidad, lo cual hace que los teoremas demostrados por una figura, no se les puede considerar como ciertos, sino para los casos representados en ella; sin embargo, como los procedimientos geométricos hacen más perceptibles las verdades, vamos á demostrar geométricamente, algunas de las fórmulas deducidas por el cálculo, lo cual servirá para hacer comprender á los alumnos, la dependencia forzosa que siempre existe entre unos y otros métodos.