$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a=\cot.a\pm\sqrt{\cot^2 a+1} \qquad (47)$$

$$\text{sen}^2 a=\frac{1-\cos.2\,a}{2} \qquad (48)$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos.2\,a}{2} \qquad (49)$$

$$\text{tang}^2 a=\frac{1-\cos.2\,a}{1+\cos.2\,a} \qquad (50)$$

$$\cot^2 a=\frac{1+\cos.2\,a}{1-\cos.2\,a} \qquad (51)$$

$$\text{sen}^2 a-\text{sen}^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a \qquad (52)$$

$$\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)}=\frac{\text{tang}.a+\text{tang}.b}{\text{tang}.a-\text{tang}.b} \qquad (53)$$

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)}=\frac{\cot.b-\text{tang}.a}{\cot.b+\text{tang}.a} \qquad (54)$$

$$\text{sen}.a\ \cos.b=\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.(a+b)+\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.(a-b) \qquad (55)$$

$$\text{sen}.b\ \cos.a=\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.(a+b)-\tfrac{1}{2}\,\text{sen}.(a-b) \qquad (56)$$

$$\cos.a\ \cos.b=\tfrac{1}{2}\,\cos.(a+b)+\tfrac{1}{2}\,\cos.(a-b) \qquad (57)$$

$$\text{sen}.a\ \text{sen}.b=\tfrac{1}{2}\,\cos.(a-b)-\tfrac{1}{2}\,\cos.(a+b) \qquad (58)$$

$$\text{sen}.p+\text{sen}.q=2\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cos.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (59)$$

$$\text{sen}.p-\text{sen}.q=2\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \cos.\tfrac{1}{2}\,(p+q) \qquad (60)$$

$$\cos.q+\cos.p=2\ \cos.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cos.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (61)$$

$$\cos.q-\cos.p=2\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (62)$$

$$\text{tang}.a+\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a+b)}{\cos.a\ \cos.b} \qquad (63)$$

$$\text{tang}.a-\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a-b)}{\cos.a\ \cos.b} \qquad (64)$$

$$\cot.a+\cot.b=\frac{\text{sen}.(b+a)}{\text{sen}.a\ \text{sen}.b} \qquad (65)$$

$$\cot.a-\cot.b=\frac{\text{sen}.(b-a)}{\text{sen}.a\ \text{sen}.b} \qquad (66)$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\text{sen}.p-\text{sen}.q}=\frac{\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,(p+q)}{\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,(p-q)} \qquad (67)$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,(p+q) \qquad (68)$$

$$\frac{\text{sen}.p+\text{sen}.q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (69)$$

$$\frac{\text{sen}.p-\text{sen}.q}{\cos.q+\cos.p}=\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (70)$$

$$\frac{\text{sen}.p-\text{sen}.q}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}\,(p+q) \qquad (71)$$

$$\frac{\cos.q+\cos.p}{\cos.q-\cos.p}=\cot.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cot.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \qquad (72)$$

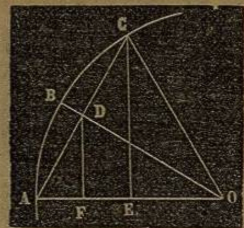
$$\frac{\text{tang}.a+\text{tang}.b}{\text{tang}.a-\text{tang}.b}=\frac{\text{sen}.(a+b)}{\text{sen}.(a-b)} \qquad (73)$$

$$\frac{\cot.a+\cot.b}{\cot.a-\cot.b}=\frac{\text{sen}.(b+a)}{\text{sen}.(b-a)} \qquad (74)$$

Demostracion geométrica de algunas fórmulas generales.

779.—Como habrá podido notarse, valiéndonos de las relaciones geométricas en una figura adecuada, hemos establecido las fórmulas llamadas fundamentales y las del seno y coseno de la suma de dos arcos, y en seguida por puros procedimientos algebraicos, hemos deducido todas las demas; resultando que, siendo las primeras ciertas para cualquiera clase de arcos, las últimas, conforme al carácter de los métodos analíticos, tienen la mayor generalidad, interpretando, como lo hemos dicho, el significado de los símbolos algebraicos en los valores correlativos de los arcos y sus líneas trigonométricas. Los métodos de la geometría especial, envuelven casi siempre, en oposicion de los procedimientos analíticos, cierto espíritu de individualidad, lo cual hace que los teoremas demostrados por una figura, no se les puede considerar como ciertos, sino para los casos representados en ella; sin embargo, como los procedimientos geométricos hacen más perceptibles las verdades, vamos á demostrar geométricamente, algunas de las fórmulas deducidas por el cálculo, lo cual servirá para hacer comprender á los alumnos, la dependencia forzosa que siempre existe entre unos y otros métodos.

780.—Dados el seno y coseno de un arco determinar el seno y coseno del arco duplo.



(Fig. 361).

Sea en la fig. 361 $OA = 1$, $AB = BC = a$, $AC = 2a$, $AD =$ sen.a, $OD =$ cos.a $CE =$ sen. 2 a y $EO =$ cos. 2 a.

Siendo D F paralela al lado C E del triángulo C A E, y siendo $AD = DC$, se tendrá $EC = 2DF$, y $AF = FE$. [510] Por tanto,

$$\text{sen. } 2a = CE = 2DF \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\text{cos. } 2a = EO = OF - AF \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La cuestion queda reducida á determinar las rectas D F, O F y A F en funcion del seno y coseno de A B. Para esto, considerarémos el triángulo rectángulo A D O que ha quedado dividido en triángulos parciales semejantes á él por la perpendicular D F á la hipotenusa, (530) y se tiene:

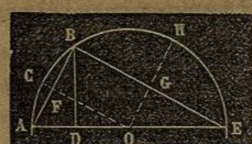
$DF : AD :: DO : AO$ despejando y sustituyendo $DF = \text{sen.a cos.a}$
$OF : OD :: OD : AO$,, $OF = \text{cos}^2\text{a}$
$AF : AD :: AD : AO$,, $AF = \text{sen}^2\text{a}$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$\text{sen. } 2a = 2 \text{ sen.a cos.a}$$
$$\text{cos. } 2a = \text{cos}^2 a - \text{sen}^2 a$$

que son las expresiones (26) y (27) demostradas ántes analíticamente.

781.—Encontrar el seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno.



(Fig. 362).

En la fig. 362, harémos $OA = 1$, $AB = a$, por lo que $DO =$ cos.a es la línea en funcion de la que debemos expresar el seno y coseno de $\frac{a}{2}$

Desde B tiramos las cuerdas B A y B E y los radios O C y O H perpendiculares á sus mitades; tendrémos que

$$BA = 2AF = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} a$$
$$BE = 2BG = 2FO = 2 \cos \tfrac{1}{2} a$$

Por otra parte $AD = AO - DO = 1 - \text{cos.a}$
$DE = OE + DO = 1 + \text{cos.a}$

Se sabe (539) que una cuerda es media proporcional entre todo el diámetro y su proyeccion, por lo que

$AB^2 = AE \times AD$ sustituyendo $4 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2} a = 2(1 - \text{cos.a})$

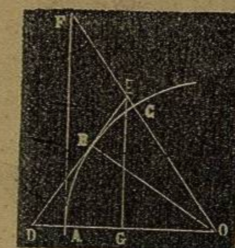
$$\text{ó sen } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.a}}{2}}$$

$BE^2 = AE \times DE$,, $4 \cos^2 \tfrac{1}{2} a = 2(1 + \text{cos.a})$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \text{cos.a}}{2}}$$

que son las expresiones (36) y (37).

782.—Estando dadas las tangentes de dos arcos *a* y *b* determinar la tangente de su suma.



[Fig. 363].

En la fig. 363 tenemos $OA = 1$, $AB = a$, $BC = b$, $BD =$ tang.a, $BE =$ tang.b, y $AF =$ tang. (a+b).

Tirando E G paralela á A F, tendrémos, comparando los triángulos semejantes F A O y E G O

$$FA : AO :: EG : GO$$

luego $FA = \text{tang. } (a + b) = \dfrac{EG}{GO} \ldots\ldots (1)$

Tendrémos pues que determinar E G y G O en funcion de B D y B E. Los triángulos D B O y D G E son semejantes por ser rectángulos y tener comun el ángulo en D. Comparando sus lados homólogos, se tiene:

$EG : DE :: BO : DO$ luego $EG = \dfrac{\text{tang.a} + \text{tang.b}}{DO} \ldots (2)$

Para determinar el valor de G O. considerarémos el triángulo E D O y conforme al teorema del núm. 534, tendrémos:

$$DE^2 = EO^2 + DO^2 - 2DO \times OG$$

Despejando á O G se tiene:

$$GO = \frac{EO^2 + DO^2 - DE^2}{2DO} = \frac{EO^2 + DO^2 - (DB + BE)^2}{2DO}$$

$$\text{ó} \quad GO = \frac{EO^2 + DO^2 - DB^2 - 2DB \times BE - BE^2}{2DO}$$

y observando que $E\,O^2 - B\,E^2 = B\,O^2 = 1$; que $D\,O^2 - B\,D^2 = B\,O^2 = 1$; que $B\,D = \text{tang.}a$ y que $B\,E = \text{tang.}b$, se tiene:

$$O\,G = \frac{2 - 2\text{tang.}a\ \text{tang.}b}{2\,D\,O}$$

dividiendo por 2 $\quad O\,G = \dfrac{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}b}{D\,O} \ldots\ (3)$

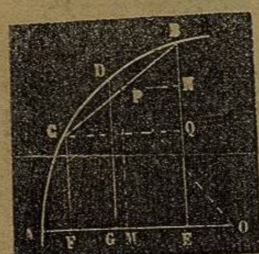
sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1), resulta finalmente:

$$\text{tang.}\ (a+b) = \frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}b}$$

que es la expresion (20) deducida analíticamente.

783.—*Demostraremos geométricamente las fórmulas siguientes:*

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cos \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \cos \tfrac{1}{2}\,(p+q)$$


[Fig. 364].

En la fig. 364 tomemos $A\,B = p$ y $A\,C = q$ cuyos senos serán respectivamente $B\,E$ y $C\,F$. Tiremos la cuerda $C\,B$ y el radio $O\,D$ perpendicular á su mitad. Por el punto P tiremos $P\,M$ perpendicular y $P\,N$ paralela al radio $A\,O$, que como siempre lo supondremos igual á la unidad. Tracemos, por último, $C\,Q$ paralela á $O\,A$. De la inspeccion de la figura resulta:

arco $B\,C = p - q \quad B\,D = \tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad A\,D = A\,B - B\,D = p - \tfrac{1}{2}\,(p-q)$
$\qquad A\,D = \tfrac{1}{2}\,(p+q)$

$B\,E = \text{sen.}p, \quad C\,F = \text{sen.}q \quad D\,G = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p+q), \quad B\,P = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)$
$\qquad O\,G = \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p+q), \quad O\,P = \cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)$

$$B\,N = \frac{B\,Q}{2} = \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2}$$

$$P\,M = B\,E - B\,N = \text{sen.}p - \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2}$$

Esto supuesto, vamos á determinar los valores de P M y B N, com-

parando con el triángulo D G O sucesivamente los triángulos P M O y B N P que son semejantes á él.

$P\,M : P\,O :: D\,G : D\,O$ luego $P\,M = \dfrac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2} = \text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)$

$B\,N : B\,P :: O\,G : D\,O$ luego $B\,N = \dfrac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(p+q)$

pasando el 2 al 2° miembro en las últimas ecuaciones, resulta:

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cos \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)\ \cos \tfrac{1}{2}\,(p+q)$$

que es lo que se tenia que demostrar.

784.—Demostrar geométricamente que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los mismos arcos es á la tangente de la semi-diferencia.*

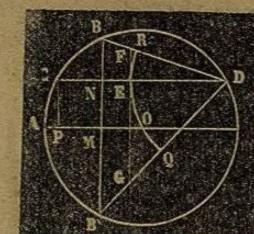


Fig 365.

En la fig. 365 sea $A\,B = p$, $A\,C = q$. Si tomamos $A\,B' = A\,B$ y trazamos el seno $C\,P$ y la cuerda $B\,B'$, tendremos:

$B\,M = B'\,M = \text{sen.}p, \quad C\,P = N\,M = \text{sen.}q, \quad N\,B' = \text{sen.}p + \text{sen.}q$
$B\,N = \text{sen.}p - \text{sen.}q, \quad$ el arco $C\,B' = p+q$ y $B\,C = p-q$.

Tiremos por el punto C la recta C D paralela á A O y haciendo centro en D tracemos un arco de círculo con el radio $D\,E = A\,O = 1$. El ángulo $C\,D\,B'$ tiene por medida el arco E Q, y por estar su vértice sobre la circunferencia tiene igualmente por medida $\tfrac{1}{2}\,C\,A\,B'$, luego $E\,Q = \tfrac{1}{2}\,(p+q)$

Por igual razon $E\,R = \tfrac{1}{2}\,(p-q)$. Si en el punto E levantamos la tangente F E G, tendremos:

$$E\,G = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(p+q),\ \text{y}\ E\,F = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$

Por ser paralelas las rectas B B' y F G quedarán cortadas en partes proporcionales por las líneas D B, D N y D B' que parten del punto D (526) y tendremos:

$$N B' : B N :: E G : E F$$

y sustituyendo:

$$\text{sen.}p+\text{sen.}q : \text{sen.}p-\text{sen.}q :: \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

que es lo que se queria demostrar, y cuyo principio está expresado en la fórmula (67).

785.—Problemas.—I.—*Conociendo* tang. $\frac{a}{2}$ *determinar todas las demas líneas trigonométricas.*

Hemos visto, fórmula (30), que

$$\text{tang. } 2\,a = \frac{2 \text{ tang.} a}{1-\text{tang}^2 a}$$

Reemplazando a por $\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$\text{tang.} a = \frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} a}{1-\text{tang}^2 \frac{1}{2} a}$$

una vez conocida la tangente de a, se podrán determinar todas las demas líneas trigonométricas, como lo hemos hecho en el número 731—III.

II.—*Por medio de la fórmula:*

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = -\frac{1}{\text{tang.} a} \pm \frac{1}{\text{tang.} a}\sqrt{1+\text{tang}^2 a},$$

determinar la tangente de 30°, *y la de* 45°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 30°, deberá ser a=60°, y como tangente de 60° es igual á $\sqrt{3}$ sustituyendo en la fórmula y tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°, se tiene:

$$\text{tang. } 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

que como hemos visto es el valor de la tangente de 30°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 45° necesitaremos hacer a = 90° cuya tangente es ∞; pero como en este supuesto el término $\frac{1}{\text{tang.} a}$ se convierte en cero, y por la forma que hemos dado al valor de la tang. $\frac{1}{2}$ a entra como

factor comun de todos los términos $\frac{1}{\text{tang.} a}$, resulta que no podemos hacer la suposicion de que tang.a=∞, sino despues de haber trasformado la expresion

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = -\frac{1}{\text{tang.} a} \pm \frac{1}{\text{tang.} a}\sqrt{+\text{tang}^2 a}$$

para lo cual introduciremos dentro del radical á tang.a elevándola al cuadrado; y ejecutando la division, tendremos:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = -\frac{1}{\text{tang.} a} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2 a}+1}$$

haciendo ahora a=90° y tang.a=∞, resulta tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°:

$$\text{tang. } 45° = +1$$

que en efecto es el valor de la tangente de 45°.

III.—*Comprobar la fórmula* tang. 3 $a = \frac{3 \text{ tang.} a - \text{tang.}^3 a}{1-3 \text{ tang.}^2 a}$ *para cuando el arco* a=30°, 45°, 60° y 90°.

Cuando a=30°, tang.a=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ Sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$\text{tang.} 90° = \frac{3\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\,\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-1} = \infty$$

Cuando a=45°, tang.a=1. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang.} 135° = \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

Cuando a=60°, tang.a=$\sqrt{3}$. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang. } 180° = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3^3}}{1-3\times 3} = \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{1-9} = 0.$$

Cuando a=90°, tang.a=∞, y para evitar el inconveniente que tendría sustituir este valor en la fórmula

$$\text{tang. } 3\,a = \frac{3 \text{ tang.a} - \text{tang.}^3 \text{a}}{1 - 3 \text{ tang.}^2 \text{a}}$$

lo que haria infinitos todos sus términos, la trasformaremos préviamente; dividiendo el numerador y denominador por $\text{tang}^3 \text{a}$, lo cual da

$$\text{tang.a} = \frac{\dfrac{3}{\text{tang}^2 \text{a}} - 1}{\dfrac{1}{\text{tang}^3 \text{a}} - \dfrac{3}{\text{tang.a}}}$$

y sustituyendo se tiene:

$$\text{tang. } 270° = \frac{\dfrac{3}{\infty} - 1}{\dfrac{1}{\infty} - \dfrac{3}{\infty}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

IV.—*Demostrar que el producto de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual á la suma de las mismas tangentes, y comprobar este teorema cuando el triángulo es equiángulo.*

Si representamos por A, B y C los ángulos de un triángulo, se sabe que

$$A + B + C = 180° \qquad \text{luego } A = 180° - (B + C)$$

y como la tangente de un ángulo es igual á la de su suplemento tomada con signo contrario, tendremos:

$$\text{tang. } (B + C) = -\text{tang. A}$$

y como (20) $\text{tang. } (B + C) = \dfrac{\text{tang.B} + \text{tang.C}}{1 - \text{tang. B tang. C}}$

resulta que $\dfrac{\text{tang.B} + \text{tang.C}}{1 - \text{tang.B tang.C}} = -\text{tang.A}$

quitando el denominador:

$$\text{tang.B} + \text{tang.C} = -\text{tang.A} + \text{tang.A tang.B. tang.C}$$

trasladando:

$$\text{tang.A} + \text{tang.B} + \text{tang.C} = \text{tang.A. tang.B. tang.C}$$

que es lo que se queria demostrar.

En el caso de ser triángulo equiángulo, cada uno de sus ángulos valdrá 60° y su tangente será igual á $\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la última ecuacion, se tiene:

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

ó $$3\sqrt{3} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$$

cuya identidad de resultados comprueba la verdad del teorema.

Cálculo de las tablas trigonométricas.

786.—En las fórmulas que anteceden han quedado cifradas las principales relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y algunas funciones sencillas de éstas, como las del arco duplo, las del arco de la mitad, etc., que pueden considerarse como otras tantas líneas trigonométricas nuevas; pero por numerosas y variadas que sean estas relaciones, no pueden aplicarse inmediatamente á nuestro objeto definitivo, que es determinar el valor numérico de los elementos desconocidos de un triángulo, sino sirviéndonos como magnitudes auxiliares entre los lados y los ángulos de un triángulo de los valores numéricos de las líneas trigonométricas. Estas, como se habrá notado y se comprenderá mejor mas adelante, llenan las condiciones esenciales de toda magnitud auxiliar; pues por medio de ellas simplificaremos nuestros cálculos, y existiendo una relacion constante entre la magnitud de un arco y la de sus líneas trigonométricas, siempre se puede deducir del valor del arco el de la línea trigonométrica, y recíprocamente; pero para que con su empleo podamos obtener la sencillez y facilidad que buscamos en nuestros cálculos, es indispensable calcular préviamente y construir tablas en las que consten los valores de las líneas trigonométricas ó sus logaritmos al lado de los arcos á que cada una pertenece.

En este capítulo vamos á dar una idea de la manera con que se han formado estas tablas, cuyo trabajo, á semejanza del de los logaritmos, se hace una vez para siempre, y contribuye poderosamente á expeditar nuestras operaciones para resolver los triángulos.

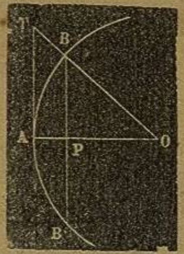
Las magnitudes auxiliares tienen por objeto facilitar las investigaciones, y son de dos clases: unas que se conservan hasta el último resultado, y otras que no constando como datos en el problema, desaparecen en el valor de la incógnita. Por ejemplo: al tratar de los volúmenes de los cuerpos hemos empleado como auxiliar el radio de la esfera para reemplazar á la relacion de los volúmenes la de una expresion de esa línea que se conserva en la expresion final del volúmen de la esfera. Lo contrario pasa con los logaritmos que son auxiliares intermedios que no constan en los datos del problema, y que sirviendo solo para simplificar los cálculos, desaparecen por completo en el último resultado. Las líneas trigonométricas corresponden á esta última clase de magnitudes auxiliares.

Ahora bien: si por una parte se inscriben todos los arcos de un cuadrante de 10 en 10", y al lado de cada arco se anotan las partes del radio del círculo de que se compone el seno, coseno.... correspondientes, se tendrá una idea de una tabla de las líneas trigonométricas naturales. Generalmente al lado del arco se pone el logaritmo del valor de la línea trigonométrica, y entónces tendremos tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Como hemos visto que por grande que sea un arco, siempre hay otro $<90°$ que tiene las mismas líneas trigonométricas con igual ó diferente signo, es claro que bastará calcular los valores de las que corresponden á un cuadrante. Ademas hemos visto, (731—I) que conocido el seno de un arco por medio de las fórmulas fundamentales (729) pueden determinarse todas las demas líneas trigonométricas; y por último (758), como el seno de un arco es igual al coseno de su complemento, resulta que bastará explicar el modo de obtener el valor de los senos, de los arcos 0° á 45° para comprender como pueden en seguida formarse tablas de todas las líneas de 0° á 90° aplicables á ángulos de cualquiera magnitud.

Esto supuesto, vamos á dar una idea del procedimiento que puede emplearse para construir una tabla de los senos y cosenos de todos los arcos de 0° á 45°, demostrando préviamente algunos principios fundamentales.

787.—*A medida que decrece un ángulo menor que 90°, la relacion que hay entre el arco rectificado que le sirve de medida y su seno disminuye, aproximándose más y más á la unidad, que es su valor límite.*



(Fig. 366.)

En la fig. 366 sea el radio O A=1, la longitud del arco A B rectificado, la representaremos por a, B P=sen.a, O P=cos.a y A T=tang.a.

Si prolongamos B P hasta B' tendremos que

$$\text{arco B A B'} > \text{B B'}$$

y tomando la mitad

$$a > \text{sen.a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, la superficie del sector A O B es menor que la superficie del triángulo A T O, esto es:

$$\tfrac{1}{2}\,\text{A O}\times a < \tfrac{1}{2}\,\text{A O}\times\text{A T}$$

luego

$$a < \text{tang.a}$$

ó

$$a < \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dividiendo las desigualdades (1) y (2) por sen.a, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen.a}} > 1 \text{ y } \frac{a}{\text{sen.a}} < \frac{1}{\text{cos.a}}$$

lo cual hace ver, que la relacion del arco á su seno, está comprendida entre 1 y la cantidad $\frac{1}{\text{cos.a}}$ que es mayor que la unidad, porque cos.a es menor que el radio, excepto cuando a=o; pero como á medida que el ángulo a disminuye, el coseno crece y se aproxima á ser igual al radio, $\frac{1}{\text{cos.a}}$ decrece y se acerca más y más á la unidad, de la que puede diferir tan poco como se quiera, y como $\frac{a}{\text{sen.a}}$ es menor que $\frac{1}{\text{cos.a}}$ se infiere que diferirá *áun ménos y que puede considerarse que tiene la unidad por límite.*

788.—*La relacion* $\frac{a}{\text{tang.a}}$ *tiene igualmente cuando el arco decrece, la unidad por límite.*

Las desigualdades anteriores, dan:

$$a < \text{tang.a} \text{ y } a > \text{sen.a}$$

poniendo por el seno su valor sacado de la expresion $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, se tiene:

$$a>\text{tang.a cos.a}$$

dividiendo por tang.a la primera y la última desigualdad, resulta:

$$\frac{a}{\text{tang.a}}<1 \text{ y } \frac{a}{\text{tang.a}}>\text{cos.a}$$

cuyas desigualdades hacen ver que *la relacion* $\frac{a}{\text{tang.a}}$, *siempre mayor que cos.*a, *está comprendida entre* 1 *y cos.*a, *y tiene por consiguiente la unidad por límite.*

789.—*La diferencia entre la longitud a del arco y la de su seno, es siempre menor que un cuarto del cubo de a.*

De la desigualdad $a<\text{tang.a}$ resulta:

$$\tfrac{1}{2}\,a<\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\text{ a}}{\text{cos.}\frac{1}{2}\text{ a}}$$

quitando el denominador: $\frac{1}{2}\,a \text{ cos.}\frac{1}{2}\text{ a}<\text{sen.}\frac{1}{2}\text{ a}$

segun la fórmula (26) $\quad 2\text{ sen.}\frac{1}{2}\text{ a cos.}\frac{1}{2}\text{ a}=\text{sen.a}$

multiplicando esta ecuacion por la desigualdad anterior y suprimiendo el factor comun sen.$\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$a \cos^2\frac{1}{2}\text{ a}<\text{sen.a} \qquad a\,(1-\text{sen}^2\frac{1}{2}\text{ a})<\text{sen.a}$

ó $\qquad a-a\text{ sen}^2\frac{1}{2}\text{ a}<\text{sen.a}$

trasladando $\qquad a-\text{sen.a}<a\text{ sen}^2\frac{1}{2}\text{a}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

por otra parte como $\qquad \text{sen.}\frac{1}{2}\text{ a}<\frac{a}{2}$

elevando al cuadrado $\qquad \text{sen}^2\frac{1}{2}\text{ a}<\frac{a^2}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

multiplicando ordenadamente las desigualdades (3) y (4) resulta:

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\text{ a }(a-\text{sen.a})<\frac{a^3}{4}\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\text{a}$$

suprimiendo el factor sen$^2\frac{1}{2}$ a, tendremos:

$$a-\text{sen.a}<\frac{a^3}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

que es lo que se debia demostrar.

790.—Estos principios van á servir para hacernos ver el grado de aproximacion que podemos obtener al tomar la longitud de un arco pequeño como magnitud de su seno. Consideraremos el arco de 10″ que es la base de las tablas trigonométricas de Callet. La desigualdad (1) da

$\qquad \text{sen.a}<a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$

y la (5) da $\qquad \text{sen.a}>a-\frac{a^3}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$

Calcularemos la longitud del arco rectificado de 10″. Cuando el radio del círculo es la unidad, la circunferencia$=2\,\pi$ r será $2\,\pi$ y el arco de 180° será igual á $\pi=3{‘}141\,592\,653\,589\,793\ldots\ldots$ Por otra parte

$$180°=180\times60'\times60''=648000''$$

Por consiguiente $648000'' : 10'' :: 3{‘}141\,592\,653\ldots : a$ longitud arco 10″

de donde $\qquad a=0{‘}000\,048\,481\,368\,110$

sustituyendo este valor en las desigualdades (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}10''<0{‘}000\,048\,481\,368\,110$$
$$\text{sen.}10\ >0{‘}000\,048\,481\,368\,110-\frac{a^3}{4}$$

si por a tomamos el valor aproximado 0‘000 05, tendremos que

$$\frac{a^3}{4}=0{‘}000\,000\,000\,000\,032$$

Sustituyendo y ejecutando la resta indicada en la última desigualdad, se tiene:

$\qquad \text{sen.}10''>0{‘}000\,048\,481\,368\,078$

y que $\qquad \text{sen.}10''<0{‘}000\,048\,481\,368\,110$

Se ve, pues, que el seno de 10″ no comienza á diferir del arco de 10″ sino en la 13ª decimal, no llegando la diferencia ni áun al valor de una unidad de este órden. En consecuencia, conformándonos con la aproximacion de 12 cifras decimales, vemos que

$$\text{sen.}10''=0{'}000\ 048\ 481\ 368$$

y si determinamos el logaritmo de este número, encontramos que

$$\log.\ \text{sen.}10''=5{'}685\ 5749$$

que es el mismo que consta en la tabla de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Si en la expresion $\cos.a=\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$ sustituimos por a el arco de $10''$ tendremos:

$$\cos.10''=\sqrt{1-0{'}000\ 048\ldots^2}=0{'}999\ 999\ 998\ 824\ 8$$

y una vez conocidos los valores numéricos del seno y coseno de $10''$, pueden determinarse los de todos los demas arcos hasta 45° por medio de las fórmulas.

$$\text{sen.}2\,a=2\ \text{sen.}a\ \cos.a$$
$$\cos.2\,a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a$$
$$\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a\ \cos.b+\text{sen.}b\ \cos.a$$
$$\cos.(a+b)=\cos.a\ \cos.b-\text{sen.}a\ \text{sen.}b$$

Conocidos los valores del seno y coseno de todos los arcos de 10 en $10''$ hasta 45°, se tendrian las tangentes y cotangentes por medio de las fórmulas:

$$\text{tang.}a=\frac{\text{sen.}a}{\cos.a}\quad \text{y}\ \cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen.}a}$$

Los valores de las líneas trigonométricas de 45 á 90°, se determinan fácilmente por ser el valor de cualquiera de ellas, igual al de la indirecta de su complemento.

En la práctica, algo se simplifican los procedimientos que acabamos de explicar; pero no entrarémos en los pormenores correspondientes, porque nuestro objeto es dar una idea del modo con que pueden calcularse las tablas trigonométricas y no poner á los alumnos en estado de repetir un trabajo que está ya hecho con la aproximacion que se necesita en la práctica.

Como al efectuar cálculos tan largos y penosos por una parte es fácil que se deslice una equivocacion, y por otra los errores de aproximacion pueden irse acumulando; conviene calcular directamente el valor

de un gran número de líneas trigonométricas, para tener números que sirvan para rectificar los cálculos hechos. A este fin, se emplean diversos métodos, pero nos limitarémos á citar dos. Pueden calcularse directamente las cuerdas de los arcos correspondientes á polígonos regulares de cualquier número de lados y la mitad del valor de una cuerda será el del seno del arco respectivo; y tambien pueden calcularse las líneas trigonométricas de un gran número de arcos por expresiones análogas á aquellas de que nos hemos servido para fijar el valor de las de 30°, 45° y 60°. Así se calculan los valores de las líneas trigonométricas de 9 en 9 ó de 3 en 3°, y se comprueban ó rectifican los ya obtenidos. En cuanto al grado de aproximacion, dirémos, que partiendo como se ha dicho del valor del seno de $10''$ con 13 cifras decimales en el límite de los cálculos, para el arco de 45°, el seno y el coseno difieren del valor exacto menos de $\frac{1}{4}$ de una unidad decimal, del octavo órden. Si se necesitase mayor aproximacion, seria preciso repetir los cálculos, tomando por base de ellos, el arco de $5''$ ó el de $1''$.

Harémos notar, que no todas las líneas trigonométricas dan la misma aproximacion para cualquier valor de los arcos. En efecto, para arcos pequeños, las variaciones del seno son mucho mas rápidas que las del coseno, y por tanto, en la práctica, cuando los ángulos tienen valores que se acercan á 0°, conviene emplear fórmulas en que entren los senos para tener los resultados con mayor aproximacion, lo cual es causa de la necesidad de trasformar las expresiones obtenidas en funcion del coseno. Lo contrario sucede cuando los ángulos tienen valores cercanos á 90°.

Por último, diremos que unas veces se construyen las tablas de las líneas trigonométricas refiriendo su longitud al radio tomado por unidad, y entónces se tienen las expresiones llamadas *naturales* de dichas líneas, y otras se construyen las tablas tomando los logaritmos de los valores naturales.

En las tablas de logaritmos de Callet, para evitar el uso de características negativas, se ha tomado el complemento aritmético de ellas, por lo cual al introducir este sistema en los cálculos, segun lo deciamos en la segunda observacion al cálculo de los logaritmos (337), debe tenerse presente que se ha omitido la resta de 10 en cada logaritmo que contiene un complemento aritmético. por lo cual es necesario algunas veces expresar esta operacion sobrentendida, otras es preciso suprimir las decenas de la característica, y otras, por último, es forzoso agregarle las decenas necesarias para que el resultado exprese el complemento aritmético de la característica; procediéndose con los logaritmos de las