líneas trigonométricas lo mismo que lo hemos hecho con los de los números (Prob. IV, VIII, IX, XIII y XVII, § 339).

Puede tambien suponerse el radio dividido en 10,000.000,000 de partes, y en esta hipótesis los logaritmos de las tablas de Callet son los de los números de estas partes del radio que contiene cada una de las líneas trigonométricas; pero por haber sacado todas nuestras fórmulas haciendo el radio igual á la unidad, preferimos adoptar la base de considerar los logaritmos de las líneas trigonométricas como pertenecientes á los números que expresan su magnitud en partes del radio siendo éste 1, habiéndose tomado para los logaritmos del seno y coseno los complementos aritméticos de sus características.

Disposicion y uso de las tablas de las líneas trigonométricas.

791.—Disposicion de las tablas de Callet.—Vamos á describir las tablas de las líneas trigonométricas de Callet. Las correspondientes á la division sexagesimal se encuentran de la página (289) á la (659) divididas en dos partes: en la primera se encuentran los logaritmos del seno y tangente de los cinco primeros grados, y los del coseno y cotangente de 85 á 90° de segundo en segundo; y en la segunda parte, de la página 390 en adelante, constan los logaritmos de los senos, cosenos tangentes y cotangentes de 0 á 90° de 10 en 10″.

Las tablas en una y otra parte tienen doble entrada, una correspondiente al número de grados inscrito en la cabeza de la página, y otra que pertenece á los grados anotados al pié de la página.

En la primera parte de las tablas se observará que se ha señalado el número de los grados arriba y á la izquierda de cada página, ó abajo y á la derecha; los minutos lo están en una línea horizontal, y los segundos de 0 á 60 están en una columna vertical. Una de las llanas corresponde al seno de los arcos de 0 á 5° y al coseno de 85 á 90°, y la otra á la tangente y cotangente de los mismos grados. Cuando se consideran los grados y minutos puestos en la cabeza de las páginas, es preciso tomar los segundos de la columna de la izquierda, cuya numeracion va de arriba para abajo. Cuando se toman las indicaciones del pié de la página se tomarán los segundos marcados en la columna de la derecha. Por último, desde la página (350) á la (389) sobre las indicaciones de los minutos hay unos números (400, 398, 396, etc.), los cuales expre-

san las diferencias que generalmente hay entre dos logaritmos inmediatos de los que están en la columna arriba de cada diferencia.

En la segunda parte de las tablas, considerando la entrada superior, los grados están arriba de cada página desde 0° hasta 44°, los minutos están anotados en la primera columna vertical, y los segundos de 10 en 10 en la siguiente. En seguida están los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente debajo de su respectiva anotacion *sínus*, *co-sin*, *tang.* y *cotang.*, habiéndose omitido para abreviar la indicacion de *log.* Ademas, en las columnas de diferencias constan las que se obtienen restando los logaritmos entre los que se encuentran inscritas. Es de notarse que la diferencia de los logaritmos de las tangentes son comunes á las cotangentes, de lo cual es fácil darse la razon. En efecto:

$$\text{tang. }(a+h)=\frac{1}{\text{cot. }(a+h)}$$

$$\text{tang.}a=\frac{1}{\text{cot.}a}$$

Dividiendo una por otra ecuacion, resulta:

$$\frac{\text{tang.a }(a+h)}{\text{tang.a}}=\frac{\text{cot.a}}{\text{cot. }(a+h)}$$

y tomando los logaritmos

$$\text{log.tang. }(a+h)-\text{log.tang.}a=\text{log.cot.}a-\text{log.cot. }(a+h)$$

luego cualquiera que sea el valor de h, un segundo ó 10″, la diferencia entre los logaritmos de las tangentes será la misma que entre los de las cotangentes.

Cuando se consideran ángulos de 45 á 90° están marcados los grados al pié de cada página, los minutos lo están en la primera columna de la derecha, y los segundos de 10 en 10" yendo la numeracion de abajo para arriba.

Conforme á esta disposicion, consultando las graduaciones superior é inferior, así como los títulos de las líneas trigonométricas, se vé que las tablas de Callet contienen los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente de todos los arcos de 10 en 10" de 0 á 90°.

792.—Uso de las tablas trigonométricas.—Los problemas que hay que resolver son dos, semejantes á los que hemos explicado al tratar de los logaritmos de los números: dado un arco, determinar el logaritmo de una de sus líneas trigonométricas; y dado el logaritmo de una línea trigonométrica, determinar el arco; pudiendo suceder en uno y otro caso, que el número conocido esté ó no en las tablas de Callet, que son las que hemos escojido para dar nuestras explicaciones.

793.—I.—PROBLEMA.—*Conocido un arco menor que 90°, determinar el logaritmo del seno, coseno, tangente ó cotangente de este arco.*

1er *Caso.—Si el arco dado consta de grados, minutos y solo decenas de segundos,* se encontrará en las tablas. El valor del arco puede no llegar á 45°, y puede pasar de 45°. En el primer caso se buscará el número de grados entre los que están inscritos en las cabezas de las páginas; los minutos se hallarán en la 1ª columna de la izquierda, en la que los valores van creciendo de arriba para abajo; y por último, sin perder el número de minutos, se buscarán en la columna siguiente las decenas de segundos. Una vez hecho esto en la línea horizontal que pasa por el número de segundos del arco, y *debajo* de la anotacion correspondiente á línea trigonométrica que se considera, se encontrará el logaritmo buscado. Por ejemplo: se quiere el logaritmo del coseno, de 6°—15'—3.0" En la página (427) se encuentra en la parte alta 6°, y en la primera columna de la izquierda 15'; luego hallamos en la siguiente y entre 15' y 16' los 30". Ahora recorriendo el renglon que corresponde á los 30" debajo de la anotacion *co-sin*, encontramos el logaritmo 9·997 4041 que es el buscado. Esto es

$$\log.\cos 6°—15'—30"=9{\cdot}997\ 4041$$

Si el arco dado pasa de 45° se buscarán en el pié de las páginas los grados. Una vez hallados éstos, los minutos se tomarán en la columna de la derecha, en la que la numeracion crece de abajo para arriba, y las decenas de segundos en la inmediata columna. En seguida se recorrerá la línea en que están estos segundos de derecha á izquierda, y se tomará el logaritmo que esté *arriba* de la anotacion de la línea trigonométrica de que se trata. Sea, por ejemplo, buscar el logaritmo del seno de 68°—3'—40". En la página (521) y en su pié se encuentran 68°: los minutos y segundos los tomamos en las columnas de la derecha, cuya numeracion crece al subir. Encontrado el reglon que corresponde á 68° — 3' — 40" lo recorremos para la izquierda, y en la columna anotada *abajo* con la palabra *sinus*, hallaremos el número 9·967 3527, que es el logaritmo buscado. Esto es,

$$\log.\text{sen. } 68—3'—40"=9{\cdot}967\ 3527.$$

2° *Caso.—Cuando el arco dado, ademas de decenas de segundos, contiene unidades y fracciones de segundo,* no se encontrará en las tablas, y se procederá para determinar el logaritmo de sus líneas trigonométricas, segun que se trate del seno y la tangente, ó del coseno y la cotangente, de la manera que vamos á explicar.

Si se trata de un seno ó una tangente, cuyas líneas se ha visto que crecen al aumentar el arco, se comenzará por rebajar al arco dado el exceso que tenga de unidades y fracciones de segundo sobre el arco que se encuentra en las tablas, y se buscará el logaritmo que corresponde á este arco, *próximo menor* que el dado, al cual habrá que agregarle una parte correspondiente al exceso despreciado por el pronto. Para determinar lo que debe agregarse al logaritmo hallado en las tablas, notaremos que cuando el incremento de un arco es pequeño, entre ciertos límites de aproximacion los incrementos de los logaritmos de las líneas trigonométricas son proporcionales á los de los arcos. En efecto, en las tablas de Callet se notará, que con excepcion de los logaritmos que se encuentran al principio de ellas, esto es, de los arcos que se aproximan á 0 y á 90°, y de los cuales trataremos luego, la diferencia de los logaritmos es constante para un gran número de arcos. Esto es, para un incremento de 20", 30", etc., en el arco, la diferencia entre los logaritmos es doble, triple, etc., de la que hay cuando el arco aumenta 10". Por tanto, si llamamos e el exceso del arco dado sobre el encontrado en las tablas, por d la diferencia de las tablas correspondiente á 10", y por x lo que se le debe agregar al logaritmo hallado en las tablas correspondiente á un arco algo menor que el verdadero, podremos establecer la siguiente proporcion:

$$10" : e :: d : x = \frac{e\,d}{10}$$

Se vé, pues, que *para determinar lo que se ha de agregar al logaritmo encontrado en las tablas, hay que multiplicar el exceso del arco sobre el que consta en las tablas por la diferencia de los logaritmos, y dividir el producto por* 10. El resultado expresa unidades decimales del 7° órden.

El exceso e debe expresarse en segundos y fracciones decimales de segundo. Cuando el arco esté indicado en segundos, terceros, etc., habrá que comenzar por trasformar los terceros, etc., en fracciones decimales de segundo.

Por ejemplo: se quiere el log. del seno de 59°—23'—34" '3 log. sen. 59°—23'—30"=9·934 83 56 d=125

Corresponde por 4" '3 54 12'5×4" '3=53'75

log.sen.59°—23'—34" '3=9·934 84 10

Como 2° ejemplo: determinar el log. de la tang. de 39°—52'—45" '4

log. tang. 39°—52'—40"=9·921 9314 d=428

Corresponde por 5" '4 231 42'8×5" '4=231'12

log.tang.39°—52'—45" '4=9·921 9545

Si se trata de un coseno ó de una cotangente, cuyas líneas como se ha visto decrecen al aumentar el arco, *se buscará en las tablas el logaritmo que corresponde al arco próximo mayor que el dado. En seguida se restará del arco de las tablas el dado, y el exceso se multiplicará por la diferencia correspondiente á 10", cuyo producto dividido por 10 se agregará al logaritmo tomado de las tablas.* El fundamento de esta regla es el mismo que el de la anterior.

Por ejemplo: se busca el log. del coseno de 25°—38'—48" '5

log.cos.25°—38'—50"=9·954 9542 d=101

corresponde por 1" '5 15 50"-48"'5=1"'5;10'1×1"'5=15'15

log.cos.25°—38'—48"'5=9·954 9557

Como 2° ejemplo, determinar el log. de la cot. de 73°-47'-33"'2

log. cot. 73°—47'—40"=9·463 3434 d=785

corrresponde por 6" '8 534 40"-33'2=6"'8;78'5×6"'8=533"'80

log.cot.73°-47'-33" '2=9·463 3968

Cuando se trata de un coseno ó de una cotangente, podria tomarse el logaritmo que en las tablas corresponde al arco *próximo menor*, pero entónces habria necesidad de *restar* de este logaritmo la diferencia logarítmica que se calcule debe corresponder por la diferencia entre el arco dado y el de las tablas.

3er *Caso.—Cuando el arco dado es muy pequeño ó se aproxima mucho á* 90°, el método anterior no da una aproximacion suficiente, y vamos á explicar cómo es necesario proceder.

Estando dado el arco en segundos y fracciones de segundos, representemos por *a* la parte entera, y por *h* la parte decimal. Cuando se

trata de arcos pequeños, hemos visto (790) que sin error sensible puede admitirse que sus senos son proporcionales á las longitudes de los arcos rectificados, y que los arcos son proporcionales á los números de segundos de que consten; en virtud de lo cual se tiene:

$$\frac{\text{sen.}(a+h)}{\text{sen.}a}=\frac{a+h}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\text{tang.}(a+h)}{\text{tang.}a}=\frac{a+h}{a}$$

ó despejando y tomando los logaritmos:

$$\text{log. sen. }(a+h)=\text{log. sen.}a+\text{log. }(a+h)-\text{log. }a\ldots.(A)$$

$$\text{log.tang.}(a+h)=\text{log.tang.}a+\text{log. }(a+h)-\text{log. }a\ldots.(B)$$

El logaritmo de *sen.a* ó de *tang.a* se tomará en la primera parte de la tabla de las líneas trigonométricas, y los logaritmos de (a+h) y de *a* se tomarán en la tabla de los números, y por las fórmulas (A) y (B) se tendrán los logaritmos de seno y tang.(a+h).

Sea, por ejemplo, determinar el logaritmo de seno 0°—2'—28"'54

Este arco, reducido á segundos, es igual 148"'54. Por lo cual, para sustituir en nuestras fórmulas, se tiene: a=148 y h=0'54, y se tendrá haciendo el cálculo correspondiente:

log. sen. 0°—2'—28"=6.855 8365
log. número 148'54 =2'171 8434

9·027 6799

Menos log. 148 —2'170 2617

log. sen. 0°—2'—28"'54 =6·857 4182

Como $\text{cot.}a=\frac{1}{\text{tang.}a}$ se tiene que:

$$\text{log. cot.}a=\text{log. }1-\text{log. tang.}a=0-\text{log. tang.}a$$

resulta que si se busca el logaritmo de la cotangente de un arco muy pequeño será necesario determinar el logaritmo de la tangente por la fórmula (B), en seguida cambiarle signo, y tomar su complemento aritmético.

Si se trata del logaritmo del coseno de un arco muy pequeño, como de la expresion $\text{tang.}a=\frac{\text{sen.}a}{\text{cos.}a}$ resulta: $\text{cos.}a=\frac{\text{sen.}a}{\text{tang.}a}$, tendremos:

$$\cos.(a+h) = \frac{\text{sen.}(a+h)}{\text{tang.}(a+h)}$$

luego $\quad \log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \text{sen.}(a+h) - \log.\ \text{tang.}(a+h)$

parece que bastaria determinar los logaritmos de seno y tangente de $(a+h)$ por los procedimientos indicados para obtener el de $\cos.(a+h)$ con la suficiente exactitud; pero no es así, pues si en la última ecuacion se sustituyen los valores (A) y (B), resulta:

$$\log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \text{sen.}a - \log.\ \text{tang.}a$$

lo que da $\quad \log.\ \cos.(a+h) = \log.\ \cos.a$

Este resultado es el que muestran las tablas. En efecto, supongamos que se pida el logaritmo del coseno de $0°—2'—28''‘54$. El valor buscado, estará comprendido entre los logaritmos de los cosenos de los arcos de $0°—2'—20''$ y $0°—2'—30''$ los cuales, como puede verse en la 2ª parte de las tablas, pág. (390) tienen el mismo valor 9·999 9999. Por esta razon, debe evitarse el empleo de los cosenos cuando en los cálculos entran ángulos pequeños.

4° *Caso.—Cuando el arco solamente tiene fracciones decimales de segundo* la fórmula anterior no es aplicable, pero entónces se considerarán las fracciones como segundos de los cuales se busca el logaritmo en la primera parte de la tabla, de 0 á 5°, y se disminuye la característica del logaritmo encontrado, tantas unidades como cifras decimales tiene la fraccion.

Por ejemplo: $\quad \log.\ \text{sen.}\ 0''‘35 = \log.\ \text{sen.}\ 35'' - \log.\ 100$

$\quad \log.\ \text{sen.}\ 0''‘35 = 4·229\ 6429.$

794.—II. Problema.—*Estando dado el logaritmo de un seno, de un coseno, de una tangente ó de una cotangente, encontrar el arco á que corresponde.*

1er caso.—*Cuando el logaritmo dado se encuentra en la tabla.* Se busca éste en alguna de las dos columnas contiguas que tienen por encabezado arriba ó abajo la línea trigonométrica á que pertenece el logaritmo. Si este encabezado está arriba, se recorrerá para la izquierda el

renglon en que se encontró el logaritmo hasta llegar á las decenas de segundos, que son las del arco buscado. Se pasará á la primera columna, y si en el mismo renglon hay un número, éste será el de los minutos buscados, y en caso contrario, se recorrerá para arriba esta columna, y el primer número que se halle será el de los minutos. Por último, en la cabeza de la página y fuera del cuadro estarán los grados. Si por el contrario, el encabezado de la línea trigonométrica estuviese abajo de la página, es necesario recorrer el renglon donde se encontró el logaritmo para la derecha, y en la penúltima columna vertical se hallarán los segundos; en el mismo renglon ó un poco más abajo, en la última columna, estarán los minutos, y en el pié de la página, fuera del cuadro, los grados.

Supongamos, por ejemplo, que se pide el arco cuyo seno tiene por logaritmo 9.717 36 27. Encontraremos este número en la pág. (578) en la columna que tiene el título de seno arriba, por lo cual el arco á que pertenece es $31°—26'—50''$.

Sea como 2° ejemplo, determinar el arco cuya cotangente tiene por logaritmo 9·721 44 69. Este número se encuentra en la pág. (556) en la columna que lleva el título de cotangente en la parte de abajo, por lo cual el arco buscado es: $62°—13'—50''$.

2° caso.—*Cuando el logaritmo dado no se encuentra exáctamente en las tablas,* que es lo más comun, se buscará en las dos columnas que llevan por título arriba ó abajo la línea trigonométrica á que pertenece el logaritmo que más se le aproxime; teniendo cuidado de tomar el *próximo menor* cuando se trata *del seno* y la *tangente*, y el *próximo mayor* para el *coseno* y la *cotangente*. Se verá el arco expresado en grados, minutos y decenas de segundos á que el logaritmo encontrado pertenece, y se anotará para despues agregarle lo que corresponda por la diferencia que haya entre ese logaritmo y el dado. Restando los dos logaritmos, resulta una diferencia que llamaremos l, y como en arcos pequeños y dentro de ciertos límites de aproximacion, hemos visto que los incrementos de los arcos son proporcionales á los que tienen los logaritmos de las líneas trigonométricas, llamando d la diferencia entre dos logaritmos próximos correspondiente á $10''$, y por e lo que se ha de aumentar al arco que pertenece al logaritmo hallado en la tabla, tendremos:

$$d : l :: 10'' : e = \frac{10l}{d}$$

Así, pues, prescindiendo de los arcos muy pequeños ó cercanos á 90°,