en los cuales no se verifica esta proporcion, *para determinar el número de segundos y la fraccion de segundos que debe agregarse al arco á que pertenece el logaritmo hallado en la tabla, deberá multiplicarse por* 10 *la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el de las tablas, y dividirse el producto por la diferencia correspondiente á* 10″. Algunos ejemplos aclararán esta regla.

Sea por determinar el arco, cuyo seno tiene por log. 9·986 72 88. Por tratarse de una línea directa cuyo valor crece cuando el arco aumenta, tomarémos el log. próximo menor, que se encuentra en la pág. (474) en la columna seno, y cuyo valor es, 9·986 7250, y el cual pertenece al arco 75°—54′—20″. Dispondrémos el cálculo como sigue:

log. sen. x =9·986 72 88

en las tablas 9·986 72 50 corresponde á 75°—54'—20″ d=53

$10\times l=$ 380 $7'17=\frac{380}{53}$

El arco á que corresponde el log. dado es 75°—54'—27"'17

2° *Ejemplo:* Encontrar el arco cuya tang. tiene por log. 0'401 9878

log. tang. x = 0·401 98 78

en las tablas, 0'401 95 33 corresponde á 68°—22'—50" d = 615

$10\times l$ 34 50 $5''61=\frac{3450}{615}$

El arco buscado será.......................68°—22'—55"'61

3er *Ejemplo:* Determinar el arco cuyo coseno tiene por log........ 9·979 28 32

Por tratarse de una línea indirecta, buscarémos el logaritmo próximo mayor.

log. cos. x = 9·979 28 32

en las tablas 9·979 28 65 corresponde á 17°—33'—20" d = 67

$10\times l$ 330 $4'93=\frac{330}{67}$

El arco buscado será.................17°—33'—24'93

4° *Ejemplo:* Determinar el arco cuya cotangente tiene por log..... 9·242 53 21. Por tratarse de una línea indirecta, cuyo valor decrece al aumentar el arco, buscarémos el log. próximo mayor.

log. cot. x = 9·242 53 21

en las tablas 9·242 61 03 corresponde á 80°—5'—0" d = 12 42

$10\times l$ 78 20 $6'29=\frac{78\ 20}{12\ 42}$

El arco buscado será.............. x = 80°—5'—6"'29

Podria haberse tomado el log. próximo menor con el cos. y la cot.; pero entonces tendria que restarse el arco correspondiente á la diferencia de los logaritmos.

3er Caso.—*Cuando el logaritmo dado pertenece á un seno ó á una tangente, y la diferencia de los logaritmos entre los que se encuentra es muy considerable,* debe procederse como sigue. Se buscará en la primera parte de la tabla, donde los arcos varian de segundo en segundo, el logaritmo que mas se aproxime al logaritmo dado, y se reducirán á segundos los grados y minutos del arco correspondiente. Llamemos a el número de segundos así obtenidos y $a+h$ el número exacto de segundos y fracciones de segundos del arco buscado. Al tratar del 3er caso del problema inverso al que nos ocupa, (793) demostramos las fórmulas:

log. sen (a+h)=log. sen.a+log. (a+h)—log.a...... (A)
log. tang. (a+h)=log. tang.a+log. (a+h)—log.a... (B)

si en cada una de ellas despejamos á log. (a+h), tendrémos:

log. (a+h)=log. sen. (a+h)+log.a—log. sen.a...... (C)
log. (a+h)=log. tang. (a+h)+log.a—log. tang.a.... (D)

y el valor de (a+h) se determinará por una de estas ecuaciones segun se trate del seno ó de la tangente.

Supongamos que se busca el arco cuyo seno tiene por log. 6·862 53 45 El logaritmo próximo menor en la tabla es 6·861 66 61 que corresponde al arco 0°—2'—30"=150"=a. El logaritmo de a, así como el número (a+h) los encontrarémos en las tablas de los números, y los demas en las líneas trigonométricas. Sustituyendo en la fórmula (C) calcularémos (a+h) como sigue:

log. sen. (a+h)=6·862 53 45
log.a=150″ =2'176 09 13
9·038 62 58

$$
\begin{array}{lr}
\text{Menos log. sen. } 0^\circ\text{—}2'\text{—}30'' & 6{\cdot}861\ 66\ 61 \\
\hline
 & 2{\cdot}176\ 95\ 97 = \text{log. } 150''{\cdot}30\ 02
\end{array}
$$

De una manera análoga procederiamos para una tangente y aun para una cotangente, supuesto que su logaritmo es igual y de signo contrario al de la tangente; pero cuando se trata de determinar un arco muy pequeño por medio de su coseno es imposible hacerlo con precision. Si se quiere, por ejemplo, conocer el arco cuyo coseno tiene por log. 9.999 99 97, las tablas en su segunda parte muestran que el mismo logaritmo pertenece á todos los arcos comprendidos desde 0°—3'—50" hasta 0°—4'—20", lo que quiere decir que el arco pedido, no puede obtenerse sino con una incertidumbre de 40".

4° CASO.—*Cuando el logaritmo de la línea trigonométrica tiene una característica menor que 4 corresponderá á un arco menor que un segundo,* y se procederá como sigue. Se le agregarán á la característica las unidades necesarias para que sea igual ó mayor que 4, y se verá á que número de segundos corresponde en la primera parte de las tablas de 0 á 5°, y en seguida se dividirá el número de segundos por la unidad seguida de tantos ceros como unidades se agregaron á la característica. Por ejemplo, buscamos el arco cuyo seno tiene por log. 2·862 5345. Agregando 3 unidades á la característica queda 5·862 5345 que corresponde al arco 15"·03, cuyo número habrá que dividirlo por 1000, resultando que

$$2{\cdot}862\ 5345 = \text{log. sen. } 0'''{\cdot}01503.$$

795.—VALORES NATURALES DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.—Ya hemos indicado, que cuando la magnitud de una línea trigonométrica, se refiere á la del radio tomado como unidad se obtienen los valores naturales de las líneas trigonométricas, y las tablas de Callet pueden servir para determinarlos, así como para tener el logaritmo de una línea trigonométrica cuando se conoce el valor natural.

1° *Si se trata de determinar el valor natural de la línea trigonométrica de un ángulo dado,* se buscará su logaritmo en las tablas de las líneas trigonométricas; y en seguida, en las tablas de los números se verá á qué número corresponde ese logaritmo.

Por ejemplo, supongamos que se trata de determinar el valor natural del coseno de 60°. En la pág. (569) encontramos, que el log. correspondiente al coseno de 60°, es de 9·698 97 00. En seguida determi-

narémos el número á que corresponde. Este será decimal, y siendo 9 la característica, no habrá ningun cero despues de la coma. En la tabla de los números, buscarémos á cual corresponde la mantiza del logaritmo encontrado; y en la pág. (72) hallamos que pertenece á 50 000. En consecuencia, el coseno natural de 60°, es $0{\cdot}5=\frac{1}{2}$. Hemos tomado el arco de 60°, con el objeto de que los alumnos vean que el resultado de las tablas es exactamente igual al obtenido en el núm. 731 prob. X.

Aplicando la regla anterior para determinar la tangente de 30°, se encuentra: log. tang. 30°=9·761 43 94 pág. (570), y este log. en las tablas de los números, pág. (85) corresponde 0·577 35.

Luego tang. 30°=0,57 735 del radio.

En el número 731, prob. VIII, encontramos que tang. $30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ y para comprobar nuestro resultado, bastará calcular por logaritmos la expresion $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$
\begin{array}{rl}
\frac{1}{2}\text{ log. } 3 = & 0{\cdot}238\ 56\ 062 \\
\text{Menos log. } 3 = & 0{\cdot}477\ 12\ 125 \\
\hline
 & 9{\cdot}761\ 439\ 37
\end{array}
$$

cuyo log. siendo igual al de tang. 30°, es claro que los dos valores serán idénticos.

2° *Si conocido el valor natural de una línea trigonométrica, se quiere determinar su logaritmo,* bastará buscar en las tablas de los números el logaritmo correspondiente al valor natural conocido.

Por ejemplo: Se busca el log. de la tangente de 23°—32', cuyo valor natural es 0·435504. Como el log. de este número es 9·638 99 22 este será aproximadamente el logaritmo de la tangente de 23°—32'. Decimos aproximadamente, porque en el valor natural solo hemos estimado seis cifras decimales.

796. — OBSERVACIONES SOBRE LOS LOGARITMOS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS. — Con el fin de evitar el uso de las características negativas en las tablas de Callet, se ha adoptado el método de los complementos aritméticos de estas características; pero á causa de esto, debe tenerse muy presente, al ejecutar operaciones con este sistema de logaritmos, todo lo que dijimos al tratar de los logaritmos de los números (337. II) y lo que hemos explicado en los problemas en que entran esta clase de características; (338, IV, VIII, XIII y XIV), pero es im-

portante fijarse en qué logaritmos corresponden á fracciones decimales y cuáles pertenecen á números enteros, para así saber desde luego en qué casos deberá restarse 10 de la característica, suprimir ó restituir las decenas de estas, ó tomar los logaritmos tales como resulten.

Como los valores de los senos y cosenos varían desde 1 hasta 0, sus logaritmos siempre corresponden á fracciones decimales; y en las características, de sus logaritmos, está sobreentendida la resta de 10. Las tangentes son menores que el radio, desde 0 hasta 45°, y sus logaritmos corresponden á fracciones decimales; pero desde 45° en adelante, como la tangente es mayor que 1, los logaritmos pertenecen á números enteros, y las características que constan en las tablas, son las verdaderas. Las cotangentes por el contrario, son mayores que el radio de cero á 45°, y menores que 1 de 45 á 90°; por lo que los logaritmos de las cotangentes de 0 á 45° corresponden á números enteros, y de 45 á 90° pertenecen á decimales.

797.—Aproximacion que puede obtenerse con las tablas.—Si se examinan las diferencias logarítmicas de las líneas trigonométricas en las tablas de Callet, se notarán que son muy considerables para el seno en los arcos pequeños variando frecuentemente, que á medida que el arco va creciendo, estas diferencias disminuyen y son constantes para mayor número de arcos hasta llegar á ser nulas al aproximarse á 90°.

La razon de esto, es, que el seno va creciendo de 0 á 90°, y hemos demostrado ya, (337—III) que *la diferencia logarítmica entre dos números consecutivos, disminuye á medida que el valor absoluto de los números aumenta.*

Para el coseno se observan variaciones contrarias, muy pequeñas en los arcos cercanos á cero y grandes en los próximos á 90°. Respecto á la tangente y cotangente, sus diferencias logarítmicas siempre son numéricamente mayores que las del seno y tienen variaciones análogas.

Ahora bien, como mientras mayor es la diferencia logarítmica, tanto más será la aproximacion que podemos obtener empleando los logaritmos de las líneas á que pertenece; el exámen de esas variaciones es de la mayor importancia para la práctica.

Si nos fijamos por ejemplo en el arco de 2°, veremos en la pág. (402) de las tablas, que la diferencia logarítmica del seno de 2° y de 2°—0′—10″ es 6025. En consecuencia, si 6025 diferencia entre los logaritmos de los senos corresponde á una de 10″ en el arco, cuando la diferencia entre los logaritmos sea una unidad de 7° órden, la diferencia entre los arcos la determinaremos por la siguiente proporcion:

$$6025 : 1 :: 10'' : x = 0''\text{‘}0017$$

Así, pues, usando los logaritmos de Callet en arcos próximos á 2° por medio del seno podremos obtener la aproximacion de 0″ ‘0017.

Para el coseno, la diferencia es de 8. Por tanto,

$$8 : 1 :: 10'' : x = 1''\text{‘}25$$

y la aproximacion sirviéndonos del coseno, será de 1″ ‘25, esto es, 735 veces menor que con el seno.

Siendo la diferencia logarítmica para la tangente y cotangente 6033 un cálculo idéntico conduce al resultado de una aproximacion un poco mayor que con el seno.

Tomando el logaritmo del seno en las tablas de Callet, se óbtiene la siguiente tabla para el límite del error correspondiente á los diferentes ángulos:

5°	20°	40°	45°	50°	84°	87°	88°	89°	89°—40′
0″ ‘005	0″ ‘02	0″ 04	0‘05	0‘1	0″ ‘5	1″	2″	5″	10″

Así, pues, los ángulos próximos á 90° son muy mal determinados por sus senos; y de la misma manera los ángulos pequeños se obtienen con muy poca exactitud por medio del coseno. Las tangentes y cotangentes dan errores menores que el seno como puede verse en la siguiente tabla:

5°	20°	40°	45°	50°	70°	85°	89—40′
0″‘004	0″‘015	0″‘023	0″‘024	0″‘023	0″‘015	0″‘004	0″‘0003

Por esta razon, en la práctica siempre que sea posible se deberán determinar los ángulos por sus tangentes ó cotangentes, de preferencia al seno y coseno; cuando esto no sea posible, y los ángulos sean pequeños, debe procurarse usar el seno, y cuando se aproximen á 90° servirse del coseno.

798.—Por último, haremos notar, que no nos hemos ocupado de la secante, de la cosecante, seno verso y coseno verso, porque son líneas cuyo uso es poco frecuente en la práctica. Por lo demas, como

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}} \quad \text{y} \quad \text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}$$

conocidos los logaritmos del seno y coseno, es muy fácil determinar los de la cosecante y secante, pues bastará cambiarles signo á los de las primeras líneas y tomar sus complementos aritméticos para tener los de las últimas.

Las expresiones del seno y coseno verso tienen el inconveniente de no ser adecuadas al uso de los logaritmos.

799.—Problemas..—I.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas:

log. del seno de 3°—12'—28"
log. tang. 1°—18'—58"
log. cos. 87°—53'—19"
log. sen. 42°—25'—30"
log. sen. 54°—19'—37"'35
log. cos. 85°—17'—40"
log. cos. 32°—22'—52"'25
log. tang. 59°—30'—30"
log. tang. 37°—45'—48"—36'"
log. cot. 49°—19'—20"
log. cot. 86°—10'—35"'7

II.—Determinar los arcos de las líneas trigonométricas cuyos logaritmos son los siguientes:

9·424 6147 log. sen.
9·978 3800 ,, sen.
9·547 2425 ,, cos.
9·958 7602 ,, cos.
0·804 3941 ,, tang.
9·371 7568 ,, tang.
0·456 2978 ,, cot.
9·229 5384 ,, cot.

III.—Determinar el valor natural de las siguientes líneas:

del seno 32°—15'—20"
del cos. 75°—16'—10"
tang. 63°—18'—12"'3
cot. 22°—25'—30"'48

IV.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas trigonométricas cuyos valores naturales son:

sen. 41°—30'=0'66262
cos. 25°—20'=0·90383
tang. 28°—44'=0'54824
cot. 9°—20'=6'08444

V.—Determinar el número de grados, minutos, etc., de un arco, sabiendo que la secante es igual á 3, y el radio del círculo igual á 2.

Como los tamaños de las líneas trigonométricas se determinan en partes del radio tomando éste por unidad, para resolver el problema comenzamos por determinar el valor de la secante, en el supuesto de que el radio fuera la unidad. En virtud de que las magnitudes de las líneas trigonométricas son proporcionales á los radios, puede formarse esta proporcion: si cuando el radio es 2, la secante es 3; cuando el radio sea 1, la secante será $\frac{3}{2}$.

Entónces el problema se reduce á determinar el valor de un arco conociendo la secante.

Llamando a el arco se tiene: $\text{sec.a}=\frac{3}{2}$. Poniendo por sec. su valor $\frac{1}{\text{cos.}}$ y despejando, resulta:

$$\text{cos.a}=\frac{2}{3}$$

de donde log. cos.a=log.2—log.3

log.2=0'301 03000
log.3=0'477 12125

log. cos.a=9·823 9087=log. cos. 48°—11'—23" arco cuya sec. $=\frac{3}{2}$

VI.—Determinar el arco cuyo seno verso $=\frac{5}{6}$ siendo el radio $\frac{12}{13}$.

Siendo el sen. ver.=radio menos el coseno, tendremos que

$$\text{el coseno}=\frac{12}{13}-\frac{5}{6}=\frac{72-65}{78}=\frac{7}{78}$$

Determinaremos cuál seria el coseno cuando el radio $=1$ por la proporcion:

$$\frac{12}{13} : \frac{7}{78} :: 1 : \text{cos.a} = \frac{7}{72}$$

luego $\qquad \text{log.cos.a} = \text{log.}7 - \text{log.}72$

log. $7 = 0'845\ 09804$
log. $72 = 1'857\ 33250$

$8'987\ 76554 = \text{log. cos. } 84^\circ - 25' - 15''$

que será el arco que tiene $\frac{5}{6}$ por seno verso cuando el radio es $\frac{12}{13}$

VII.—Determinar el arco cuya secante $= 2'75$, siendo el radio 1.

En razon de que $\text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}}$, tendremos:

$$\text{cos.a} = \frac{1}{\text{sec.a}} = \frac{1}{2'75} = \frac{100}{275}$$

luego $\qquad \text{log. cos.a} = \text{log. } 100 - \text{log. } 275$

log. $100 = 2'000\ 00000$
log. $275 = 2'439\ 33269$

$9'560\ 66731 = \text{log. cos. } 68^\circ - 40' - 35''$

que es el arco que tiene por secante $2'75$

Procedimientos para hacer adaptables al uso de los logaritmos algunas expresiones.

800.—Para que el cálculo de los logaritmos pueda aplicarse inmediatamente á la determinacion del valor numérico de una expresion, se necesita que en esta no existan ligadas las cantidades por adicion y sustraccion; y en caso de haber términos precedidos de los signos $\pm$ se dice que la fórmula no es calculable por logaritmos. En este caso, para hacer la expresion adaptable al empleo de los logaritmos, se necesita hacer en ella algunas trasformaciones de las que vamos á ocuparnos brevemente.

Cuando se tiene la diferencia de los cuadrados, fundándonos en que ésta es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia (251—III), fácilmente puede hacerse la trasformacion exijida. Por ejemplo:

Si $\qquad x = a^2 - b^2$
tendremos $\qquad x = (a+b)\ (a-b)$
Igualmente si $\qquad \text{sen.a} = \sqrt{1 - \cos^2 a}$
tendremos $\qquad \text{sen.a} = \sqrt{(1+\text{cos.a})\ (1-\text{cos.a})}$

expresiones adaptables al uso de los logaritmos.

Si se tiene una expresion con la suma ó diferencia de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, las fórmulas (59) á (66) desde luego trasforman estas sumas y diferencias en expresiones adaptables al uso de los logaritmos. Esas fórmulas pueden reasumirse como sigue:

$$\text{sen.p} \pm \text{sen.q} = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p \pm q) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p \mp q)$$
$$\text{cos.q} + \text{cos.p} = 2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\text{cos.q} - \text{cos.p} = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\text{tang.a} \pm \text{tang.b} = \frac{\text{sen.}(a \pm b)}{\text{cos.a cos.b}}$$
$$\text{cot.a} \pm \text{cot.b} = \frac{\text{sen.}(b \pm a)}{\text{sen.a sen.b}}$$

801.—Consideremos ahora el caso más general cifrado en una expresion binomia:

$$x = a \pm b$$

en la que se busca el logaritmo de x, conociendo los logaritmos de los números positivos a y b.

Sacando a como factor comun: $x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$

Esto supuesto, introduzcamos un arco auxiliar φ cuya magnitud se fijará por la condicion de que se tenga:

$$\text{tang. } \varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots (1)$$

este arco φ, comprendido entre cero y 90° se calculará por logaritmos, por la fórmula:

$$\text{log. tang. } \varphi = \text{log.b} - \text{log.a}$$

El valor de x se trasforma en