Determinaremos cuál seria el coseno cuando el radio $=1$ por la proporcion:

$$\frac{12}{13} : \frac{7}{78} :: 1 : \text{cos.a} = \frac{7}{72}$$

luego $\qquad \log.\text{cos.a} = \log.7 - \log.72$

$\log.\ 7 = 0'845\ 09804$

$\log.\ 72 = 1'857\ 33250$

$8'987\ 76554 = \log.\ \text{cos.}\ 84^\circ - 25' - 15''$

que será el arco que tiene $\frac{5}{6}$ por seno verso cuando el radio es $\frac{12}{13}$

VII.—Determinar el arco cuya secante $= 2'75$, siendo el radio 1.

En razon de que $\text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}}$, tendremos:

$$\text{cos.a} = \frac{1}{\text{sec.a}} = \frac{1}{2'75} = \frac{100}{275}$$

luego $\qquad \log.\ \text{cos.a} = \log.\ 100 - \log.\ 275$

$\log.\ 100 = 2'000\ 00000$

$\log.\ 275 = 2'439\ 33269$

$9'560\ 66731 = \log.\ \text{cos.}\ 68^\circ - 40' - 35''$

que es el arco que tiene por secante $2'75$

Procedimientos para hacer adaptables al uso de los logaritmos algunas expresiones.

800.—Para que el cálculo de los logaritmos pueda aplicarse inmediatamente á la determinacion del valor numérico de una expresion, se necesita que en esta no existan ligadas las cantidades por adicion y sustraccion; y en caso de haber términos precedidos de los signos $\pm$ se dice que la fórmula no es calculable por logaritmos. En este caso, para hacer la expresion adaptable al empleo de los logaritmos, se necesita hacer en ella algunas trasformaciones de las que vamos á ocuparnos brevemente.

Cuando se tiene la diferencia de los cuadrados, fundándonos en que ésta es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia (251—III), fácilmente puede hacerse la trasformacion exijida. Por ejemplo:

Si $\qquad x = a^2 - b^2$

tendremos $\qquad x = (a+b)\ (a-b)$

Igualmente si $\qquad \text{sen.a} = \sqrt{1 - \cos^2 a}$

tendremos $\qquad \text{sen.a} = \sqrt{(1+\text{cos.a})\ (1-\text{cos.a})}$

expresiones adaptables al uso de los logaritmos.

Si se tiene una expresion con la suma ó diferencia de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, las fórmulas (59) á (66) desde luego trasforman estas sumas y diferencias en expresiones adaptables al uso de los logaritmos. Esas fórmulas pueden reasumirse como sigue:

$$\text{sen.p} \pm \text{sen.q} = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p \pm q)\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p \mp q)$$
$$\text{cos.q} + \text{cos.p} = 2\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)$$
$$\text{cos.q} - \text{cos.p} = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)$$
$$\text{tang.a} \pm \text{tang.b} = \frac{\text{sen.}(a \pm b)}{\text{cos.a cos.b}}$$
$$\text{cot.a} \pm \text{cot.b} = \frac{\text{sen.}(b \pm a)}{\text{sen.a sen.b}}$$

801.—Consideremos ahora el caso más general cifrado en una expresion binomia:

$$x = a \pm b$$

en la que se busca el logaritmo de x, conociendo los logaritmos de los números positivos a y b.

Sacando a como factor comun: $x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$

Esto supuesto, introduzcamos un arco auxiliar φ cuya magnitud se fijará por la condicion de que se tenga:

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots (1)$$

este arco φ, comprendido entre cero y 90° se calculará por logaritmos, por la fórmula:

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \log.b - \log.a$$

El valor de x se trasforma en

$$x=a(1\pm\text{tang.}\varphi)=a\left(1\pm\frac{\text{sen.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}\right)=a\,\frac{\text{cos.}\varphi\pm\text{sen.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}\ldots\ldots(2)$$

pero se tiene:

$$\text{cos.}\varphi\pm\text{sen.}\varphi=\text{cos.}\varphi\pm\text{cos.}(90^\circ-\varphi)$$

conforme á las fórmulas (61) y (62) se tiene:

$$\begin{aligned}\text{cos.}\varphi+\text{cos.}(90^\circ-\varphi)&=2\text{ cos. }\tfrac{1}{2}(90^\circ-\varphi+\varphi)\text{cos.}\tfrac{1}{2}(90^\circ-\varphi-\varphi)\\&=2\text{ cos. }45^\circ\text{ cos.}(45^\circ-\varphi)\\\text{cos.}\varphi-\text{cos.}(90^\circ-\varphi)&=2\text{ sen. }\tfrac{1}{2}(90^\circ-\varphi+\varphi)\text{sen. }\tfrac{1}{2}(90^\circ-\varphi-\varphi)\\&=2\text{ sen. }45^\circ\text{ sen. }(45^\circ-\varphi)\\&=2\text{ cos. }45^\circ\text{ cos. }(45^\circ+\varphi)\end{aligned}$$

luego $\text{cos.}\varphi\pm\text{sen.}\varphi=2\text{ cos. }45^\circ\text{ cos. }(45^\circ\mp\varphi)$

sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

$$x=\frac{a.\ 2\text{ cos. }45^\circ\text{ cos. }(45^\circ\mp\varphi)}{\text{cos.}\varphi}$$

Sustituyendo por cos. 45° su valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (731—IX)

$$x=\frac{a.\ \sqrt{2}\text{ cos. }(45^\circ\mp\varphi)}{\text{cos.}\varphi}\ldots\ldots(3)$$

cuya expresion puede calcularse por logaritmos, como sigue:

$$\text{log. }x=\text{log.}a+\tfrac{1}{2}\text{ log.}2+\text{log. cos.}(45^\circ\mp\varphi)-\text{log. cos.}\varphi$$

El mismo método puede aplicarse á una expresion polinomia cualquiera $a\pm b\pm c\pm d\ldots$; pues, en efecto, se podrá con el empleo de un arco auxiliar reducir una unidad el número de los términos del polinomio, con un segundo arco auxiliar se disminuirá este número otra unidad, y continuando así se lograria trasformarla en un monomio.

802.—Indicaremos otro método que puede emplearse para hacer adaptable al uso de los logaritmos una expresion.

Supongamos que esta es de la forma:

$$x=a+b$$

sacando *a* como factor $x=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$

tomaremos un arco auxiliar de modo que

$$\text{tang}^2\varphi=\frac{b}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

expresion propia para el uso de los logaritmos.

Sustituyendo $x=a(1+\text{tang}^2\varphi)=a(\text{sec}^2\varphi)$

ó definitivamente $x=\dfrac{a}{\cos^2\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$

expresion igualmente adaptable para el empleo de los logaritmos.

Si se tiene: $x=a-b$

tomariamos un arco auxiliar φ de modo que se tenga:

$$\text{sen.}\varphi=\frac{b}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ó bien

$$b=a\text{ sen}^2\varphi$$

sustituyendo se tiene: $x=a-a\text{ sen}^2\varphi=a(1-\text{sen}^2\varphi)$

ó por último $x=a\cos^2\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$

fórmula propia para el uso de los logaritmos.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

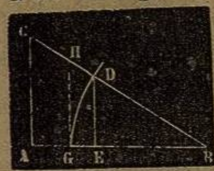
803.—Vamos á tratar ahora de la resolucion de los triángulos, comenzando por los rectángulos. Como ya lo hemos dicho, la resolucion de un triángulo tiene por objeto determinar los elementos desconocidos, cuando para ello hay los datos necesarios, y por regla general son datos suficientes tres elementos, cuando uno de ellos es un lado.

A fin de facilitar el uso de nuestras fórmulas, y evitar estar repitiendo la representacion algebraica de los elementos de los triángulos, convendremos en indicar los ángulos por las letras mayúsculas A, B y C, y los lados respectivamente opuestos á cada ángulo por las minúsculas *a*, *b* y *c*. Ademas, en el caso de ser rectángulo el triángulo, constantemente representaremos el ángulo recto por A, y la hipotenusa por *a*.

Esto supuesto, comenzaremos por establecer y demostrar los principios que sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos.

804.—Principios fundamentales.—Sea el triángulo rectángulo

A B C (fig. 367), y haciendo centro en uno de los vértices B de los ángulos agudos con un radio B G igual al de las tablas, tracemos el arco G D. En seguida bajemos la recta D E perpendicular á A B, que será



[Fig 367.]

el seno del ángulo B, y levantando la perpendicular G H, esta será la tangente del mismo ángulo. Por ser A C, G H y D E perpendiculares á A B, serán semejantes los triángulos B A C, B G H y B E D. Así, pues, se tiene:

La hipotenusa B C=a, A C=b, A B=c, B G=B D=r, D E=sen. B, B E=cos. B y G H=tang. B.

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, resultan las siguientes proporciones:

$BC:BD::AC:DE$ sustituyendo $a:r::b:\text{sen. }B$ de la que $b=\dfrac{a\text{ sen. }B}{r}$

$BC:BD::AB:BE$ „ $a:r::c:\text{cos. }B$ „ $c=\dfrac{a\text{ cos. }B}{r}$

$AB:AC::BG:GH$ „ $c:b::r:\text{tang.}B$ „ $b=\dfrac{c\text{ tang. }B}{r}$

Estas tres proporciones son la expresion de los tres principios siguientes:

1º—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al seno del ángulo opuesto.*

2º—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al coseno del ángulo adyacente.*

3º—*Un lado es á otro lado, como el radio es á la tangente del ángulo opuesto al segundo lado comparado.*

Estos tres teoremas, ó las fórmulas que de ellos se derivan, sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos, unidos á los teoremas demostrados en geometría, y que son: la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°, y el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Así, pues, haciendo el radio igual á la unidad en las tres últimas ecuaciones, y expresando analíticamente los teoremas de geometría, tendremos las siguientes fórmulas para la resolucion de los triángulos rectángulos:

$b=a$ sen. B..............................(A)

$c=a$ cos. B..............................(B)

$b=c$ tang. B..............................(C)

De que $A+B+C=180°$ cuando $A=90°$, se deduce:

$B=90°-C$..............................(D)

$a^2=b^2+c^2$..............................(E)

Debemos hacer notar, que si en vez del vértice B tomamos como centro el otro ángulo, resultarian fórmulas análogas á las (A), (B) y (C), que serian: $c=a$ sen.C, $b=a$ cos.C y $c=b$ tang.C cambiando b en c y B en C; por lo cual esas fórmulas deben entenderse como expresion de que *un lado cualquiera es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto ó por el coseno del adyacente, y que un cateto es igual al producto del otro lado por la tangente del ángulo opuesto.*

Al emplear los logaritmos para el cálculo de estas fórmulas, debe recordarse que al hacer el radio igual con la unidad, los logaritmos del seno, coseno, y á veces la tangente, tienen sobreentendida la resta de 10 unidades en su característica, cuya resta es preciso efectuar para determinar el valor del lado que se busca. La supresion de 10 unidades en la característica equivale á lo que hacen varios autores, que considerando las ecuaciones que se deducen de nuestras proporciones, y suponiendo el radio dividido en 10.000.000.000 de partes, restan de la suma de los logaritmos de los numeradores el logaritmo de *r*, que es 10; conduciendo ambos procedimientos al mismo resultado.

805.—Casos para la resolucion de los triángulos rectángulos.—Hemos indicado que el problema que hay que resolver en trigonometría, es determinar tres de los elementos de un triángulo, conocidos los otros tres. Ahora bien: como cuando el triángulo es rectángulo siempre se conoce el ángulo A recto, á este elemento hay que agregar otros dos para buscar los otros tres desconocidos; de modo que el número de casos que pueden presentarse en la resolucion de los triángulos rectángulos, será el de combinaciones diferentes que pueden hacerse con las cinco cantidades B, C, a, b y c, tomándolas de dos en dos.

La fórmula (5) del número 356 se convierte en

$$C^5_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$

y aunque en efecto son diez las combinaciones que pueden hacerse tomando de dos en dos las cantidades B, C, a, b, c, un exámen detenido hace ver que basta distinguir cuatro principales:

Combinaciones.	
B, C	Caso indeterminado conociendo A.
B, a y C, a	La hipotenusa y un ángulo.
a, b y a, c	La hipotenusa y un cateto.
B, b; C, c; B, c; C, b	Un cateto y un ángulo.
b. c	Dos catetos.

Resulta, pues, que aunque pueden presentarse 10 combinaciones diferentes con los datos de un triángulo rectángulo, bastará considerar los cuatro casos siguientes:

1º—*Dada la hipotenusa y un ángulo agudo*, determinar los demas elementos.
2º—*Dada la hipotenusa y un cateto*, idem idem.
3º—*Dado un cateto y un ángulo agudo*, idem idem.
4º—*Dados los dos catetos*, idem idem.

Para escojer con facilidad la fórmula que corresponda al caso que tenga que resolverse, los alumnos podrán aplicar las siguientes reglas:

Deberá examinarse 1º si forma ó no parte del problema la hipotenusa, y 2º si no entran como datos ni como incógnita los ángulos.

Si la hipotenusa forma parte del problema, se hará uso de la fórmula (A) ó de la (B), sirviéndose de la (A) cuando el cateto y el ángulo que son objeto de la cuestion, tengan la posicion de opuestos, y se tomará la (B) cuando sean adyacentes.

Si en el problema no entra la hipotenusa, pero sí uno de los ángulos agudos, se hará uso de la fórmula (C).

Por último, si los ángulos no entran como datos ni como incógnita, se tomará la fórmula (E).

806.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—A menudo es importante, ántes de emprender los cálculos necesarios para resolver un triángulo, examinar si los datos de la cuestion no envuelven alguna contradiccion que haga imposible el problema, así como tambien lo es despues de haber ejecutado las operaciones numéricas necesarias para determinar el valor de los elementos desconocidos, poder comprobar los resultados para tener la seguridad de que no se ha cometido alguna equivocacion.

Las condiciones que debe satisfacer un triángulo para ser posible, son: que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que el mayor lado esté opuesto al mayor ángulo, y recíprocamente; que la suma de los tres ángulos sea 180°, y en los triángulos rectángulos que la hipotenusa sea mayor que cualquiera de los catetos, así como que el cuadrado de la hipotenusa sea igual á la suma de los cuadrados de los catetos. Teniendo presentes estos principios, será siempre fácil darse cuenta de si pueden ó no aceptarse los datos ó los resultados de la resolucion del triángulo. Para la rectificacion de los resultados en los triángulos rectángulos, debe tenerse:

$$B+C=90^\circ$$

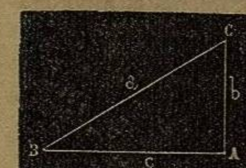
y

$$a^2=b^2+c^2$$

cuya fórmula, para hacerla adaptable al uso de los logaritmos, la pondremos en la forma:

$$b^2=a^2-c^2=(a+c)\ (a-c)$$

807.—Problemas.—I.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los datos siguientes:



(Fig. 368).

$a = 194^{m}{,}07$
$b = 39{,}95$

Para determinar B usaremos la fórmula (A) b=a sen.B, de la que

$$\text{sen. } B=\frac{b}{a}$$

Para determinar C usaremos la fórmula (B) b=a cos.C, de la que

$$\cos. C=\frac{b}{a}$$

Para determinar *c*, emplearemos la fórmula (E) $a^2 = b^2 + c^2$ de la que

$$c=\sqrt{(a+b)\ (a-b)}$$

CÁLCULO DE B.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. sen. B = 9'313 5584
B = 11°—52'—46"'1

CÁLCULO DE C.

log. b = 1'601 5168
log. a = 2'287 9584

log. cos. C = 9'313 5584
C = 78°—7'—13"'9

CALCULO DE C.

$(a+b)=234^{m}$'02 log. (a+b)=2'369 2530
$(a-b)=154$'12 log. (a—b)=2'187 8590

4'557 1120

Tomando la mitad log. $\sqrt{(a+b)\ (a-b)}$=2'278 5560=log. c

$c=189^{m}$'9135

COMPROBACION.—Para rectificacion del cálculo debemos tener B+C =90°, y en efecto:

B=11°—52'—46"'1
C=78 — 7 —13 '9

B+C=90°— 0 — 0

Para comprobar el valor de *c* conociendo préviamente C, lo podemos calcular por la fórmula (C); c=b tang. C

CÁLCULO DE C.

log. b = 1'601 5168
log. tang. C = 0'677 0392

log. c = 2'278 5560=log. 189^{m}'9135

II.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los siguientes datos:

a = 4935^{m}'20
B = 35°—14'—15"

Para determinar *b*, harémos uso de la fórmula (A)

b=a sen. B

Para *c* de la (B) c=a cos. B

Para determinar C, de la (D) C=90°—B

CÁLCULO DE b.

log. de 4935 '20........3'693 3048
log. sen. 35°—14'—15"...9'761 1510

log. b...............(1)3'454 4558

CALCULO DE c.

log. a = 3'693 3048
log. cos. B = 9'912 0984

log. c (1)3'605 4032

Al sumar estos logaritmos, rebajamos una decena de la característica por el complemento aritmético de las características de los logaritmos, del seno y coseno.

$b=2847^{m}$'448 $c=4030^{m}$'911

CÁLCULO DE C.

90°—00'—00"
—B = 35°—14'—15"

C = 54°—45'—45"

COMPROBACION. Siendo $a^2=b^2+c^2$ debe tenerse:

$c = \sqrt{(a+b)\ (a-b)}$

(a+b)=7782'648 log. (a+b)=3'891 1275
(a—b)=2087'752 log. (a—b)=3'319 6789

log. (a+b)(a—b)=7'210 8064

Tomando la mitad log. $\sqrt{(a+b)(a-b)}$=3'605 4032=log. c

c.= 4030^{m}'911

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

808.—PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.—Comenzaremos por establecer y demostrar los principios en que tendremos que fundarnos para resolver los triángulos oblicuángulos,

1° *En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Lo mismo que en los triángulos rectángulos, representaremos por A, B y C los ángulos de los triángulos; y por *a*, *b* y *c* los lados que respectivamente les están opuestos.

Consideremos primero el triángulo A B C, de la fig. 369, en el que el ángulo C es agudo, y desde el vértice B bajemos la perpendicular B D al lado A C, con lo cual quedará dividido en dos triángulos rec-