Cálculo de B.

log. b = 1‘601 5168
log. a = 2‘287 9584

log. sen. B = 9‘313 5584
B = 11°—52’—46”‘1

Cálculo de C.

log. b = 1‘601 5168
log. a = 2‘287 9584

log. cos. C = 9‘313 5584
C = 78°—7’—13”‘9

Cálculo de c.

$(a+b)=234^{m}$‘02 log. $(a+b)$=2‘369 2530
$(a-b)=154$‘12 log. $(a-b)$=2‘187 8590

4‘557 1120

Tomando la mitad log. $\sqrt{(a+b)\ (a-b)}$=2‘278 5560=log. c

$c=189^{m}$‘9135

Comprobacion.—Para rectificacion del cálculo debemos tener B+C =90°, y en efecto:

B=11°—52’—46”‘1
C=78 — 7 —13 ‘9

B+C=90°— 0 — 0

Para comprobar el valor de *c* conociendo préviamente C, lo podemos calcular por la fórmula (C); c=b tang. C

Cálculo de c.

log. b = 1‘601 5168
log. tang. C = 0‘677 0392

log. c = 2‘278 5560=log. 189^{m}‘9135

II.—Resolver un triángulo rectángulo (fig. 368) con los siguientes datos:

$a = 4935^{m}$‘20
B = 35°—14’—15”

Para determinar *b*, harémos uso de la fórmula (A)

b=a sen. B

Para *c* de la (B) c=a cos. B

Para determinar C, de la (D) C=90°—B

Cálculo de b.

log. de 4935 ‘20........3‘693 3048
log. sen. 35°—14’—15”...9‘761 1510

log. b...............(1)3‘454 4558

Cálculo de c.

log. a = 3‘693 3048
log. cos. B = 9‘912 0984

log. c (1)3‘605 4032

Al sumar estos logaritmos, rebajamos una decena de la característica por el complemento aritmético de las características de los logaritmos, del seno y coseno.

$b=2847^{m}$‘448 $c=4030^{m}$‘911

Cálculo de C.

90°—00′—00″
—B =35°—14′—15″

C =54°—45′—45″

Comprobacion. Siendo $a^2=b^2+c^2$ debe tenerse:

$c = \sqrt{(a+b)\ (a-b)}$

$(a+b)$=7782‘648 log. $(a+b)$=3‘891 1275
$(a-b)$=2087‘752 log. $(a-b)$=3‘319 6789

log. $(a+b)(a-b)$=7‘210 8064

Tomando la mitad log. $\sqrt{(a+b)(a-b)}$=3‘605 4032=log. c

$c.= 4030^{m}$‘911

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

808.—Principios fundamentales.—Comenzaremos por establecer y demostrar los principios en que tendremos que fundarnos para resolver los triángulos oblicuángulos,

1° *En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Lo mismo que en los triángulos rectángulos, representaremos por A, B y C los ángulos de los triángulos; y por *a*, *b* y *c* los lados que respectivamente les están opuestos.

Consideremos primero el triángulo A B C, de la fig. 369, en el que el ángulo C es agudo, y desde el vértice B bajemos la perpendicular B D al lado A C, con lo cual quedará dividido en dos triángulos rectángulos, en los que, conforme á la ecuacion (A) del párrafo 804, se tiene:

$$\text{B D}=\text{A B sen. A}=\text{c sen. A}$$
$$\text{B D}=\text{B C sen. C}=\text{a sen. C}$$

Si se considera el triángulo A B C en el que el ángulo C es obtuso, tendremos:

$$\text{B D}=\text{A B sen. A}=\text{c sen. A}$$
$$\text{B D}=\text{B C sen. BCD}=\text{a sen. BCD}$$

pero como B C D es suplemento de B C A, y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, (735) se tiene, tanto en el caso en que C es agudo, como cuando es obtuso que

$$\text{B D}=\text{c. sen. A}$$
$$\text{B D}=\text{a. sen. C}$$

luego $\text{c. sen. A}=\text{a. sen. C}$

y formando una proporcion:

$$\text{a}:\text{c}::\text{sen. A}:\text{sen. C}$$


(Fig. 369).

Si desde el vértice A bajáramos una perpendicular sobre el lado B C, obtendriamos:

$$\text{c}:\text{b}::\text{sen. C}:\text{sen. B}$$

luego en general $\text{a}:\text{c}:\text{b}::\text{sen. A}:\text{sen. C}:\text{sen. B}$

que es lo que se trataba de demostrar.

Comunmente á esta série de razones iguales, se les da la forma de ecuacion para la resolucion de los triángulos, como sigue:

$$\frac{\text{a}}{\text{sen. A}}=\frac{\text{b}}{\text{sen. B}}=\frac{\text{c}}{\text{sen C}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

2° *El cuadrado de un lado de un triángulo cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Esto es, en la fig. 369 vamos á demostrar que

$$\text{A B}^2=\text{B C}^2+\text{A C}^2-2.\ \text{A C}\times\text{B C}\times\text{cos. A C B}$$

Consideremos primero el caso en que el ángulo C sea agudo. Conforme al teorema demostrado en geometría (534) tendremos:

$$\text{A B}^2=\text{B C}^2+\text{A C}^2-2\ \text{A C}\times\text{D C}$$

ó sustituyendo: $c^2=a^2+b^2-2\ b\times \text{D C}$

pero como el triángulo rectángulo B D C conforme á la ecuacion (B) del núm. 804, D C=B C cos C=a. cos. C, sustituyendo, resulta:

$$c^2=a^2+b^2-2\ \text{a. b. cos. C}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Si consideramos el triángulo A B C cuando el ángulo C es obtuso, conforme al teorema demostrado en geometría (533) tendrémos:

$$\text{A B}^2=\text{B C}^2+\text{A C}^2+2\ \text{A C}\times\text{C D}$$

ó $$c^2=a^2+b^2+2\ b\times\text{C D}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

en el triángulo rectángulo B C D conforme á la fórmula (B) se tiene:

$$\text{C D}=\text{B C}\times\text{cos. B C D}=\text{a. cos. B C D}$$

pero como B C D es suplemento de B C A, y el coseno de un ángulo es igual al coseno de su suplemento tomado como signo contrario, (740) se tiene que cos. B C D= — cos. B C A, luego,

$$\text{C D}=-\text{a. cos. B C A}$$

y sustituyendo en la ecuacion (2) resulta:

$$c^2=a^2+b^2-2\ \text{a b cos. C}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

luego tanto, cuando C es agudo como cuando es obtuso, se tiene:

$$c^2=a^2+b^2-2\ \text{a b cos. C}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

Del mismo modo que hemos obtenido *c* en funcion de *a*, *b*, y el ángulo opuesto C bajando desde el vértice B, la perpendicular B D al lado A C, si lo hiciéramos desde los vértices C y A, obtendriamos:

$$b^2=a^2+c^2-2\ \text{a c. cos. B}$$
$$a^2=b^2+c^2-2\ \text{b c. cos. A}$$

3ª *En todo triángulo, la suma de dos de sus lados, es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

En virtud de la ecuacion (F) tenemos:

$$\text{a}:\text{sen. A}::\text{b}:\text{sen. B}$$

fundándonos en que la suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los consecuentes es á la suya, tendremos:

$$a+b:a-b::\text{sen. }A+\text{sen. }B:\text{sen. }A-\text{sen. }B$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula (67)

$$\frac{\text{sen. }p+\text{sen. }q}{\text{sen. }p-\text{sen. }q}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(p-q)}$$ se tiene reemplazando p por A, y q por B:

$$\text{sen. }A+\text{sen. }B:\text{sen. }A-\text{sen. }B::\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A+B):\text{tang. }\tfrac{1}{2}(A-B)$$

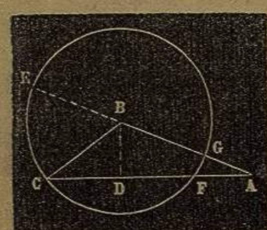
luego $a+b:a-b::\text{tang. }\frac{1}{2}(A+B):\text{tang. }\frac{1}{2}(A-B)$............(H)

que es lo que se queria demostrar.

4º Si desde el vértice B (fig. 370 y 371) de un triángulo se baja una perpendicular B D al lado opuesto prolongándolo si fuere necesario, se tiene que, *el lado sobre el cual cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como su diferencia es á la diferencia de los segmentos* A D y D C *cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, ó á la suma de los segmentos cuando cae fuera.*

Esto es, vamos á demostrar que

$b:c+a::c-a:AD-DC$ cuando la perpendicular cae dentro.
$b:c+a::c-a:AD+DC$ cuando la perpendicular cae fuera.



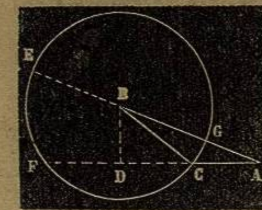
(Fig. 370).

Consideraremos, primero el caso (fig. 370) en el que la perpendicular B D cae dentro del triángulo. Haciendo centro en el vértice B, desde el que se baja la perpendicular, y tomando por radio el lado menor B C, trazarémos un círculo y prolongarémos el lado A B hasta E. Por la construccion de la figura, tenemos B C $=a=$ B E $=$ B G, y siendo B D una perpendicular á la cuerda C F que pasa por el centro, la dividirá en dos partes iguales C D $=$ D F.

Ahora, fundándonos en que dos secantes A C y A E, tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A F y A G, tendrémos: (540)

$$AC:AE::AG:AF$$

ó sustituyendo: $b:c+a::c-a:AD-DC$............(1)



(Fig. 371.)

Si consideramos el caso en que la perpendicular cae fuera del triángulo, fig. (371) en virtud del mismo teorema, tendremos:

$$AC:AE::AG:AF$$

y sustituyendo $b:c+a::c-a:AD+DC$...(J)

que es lo que se queria demostrar.

A estos cuatro principios hay que agregar el teorema de geometría:

$$A+B+C=180^{\circ}\text{..........................(K)}$$

809.—Casos para la resolucion de los triángulos oblicuángulos.—Buscando, como lo hemos hecho al tratar de los triángulos rectángulos, el número de combinaciones que pueden formarse con los seis elementos de un triángulo A, B, C, a, b y c, tomándolos de tres en tres, por medio de la fórmula (5) del número 356, encontrariamos:

$$C\frac{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{2\times3}=20$$

pero como vamos á verlo, se reducen á cuatro casos diferentes.

Si se dan A B y C, el caso es indeterminado y no debe considerarse porque hay una infinidad de triángulos con los datos del problema.

1er. caso.—*Dados dos ángulos y un lado, determinar los demas elementos.* Este caso ofrece *nueve* combinaciones:

A, B, a	A, C, a	B, C, a
A, B, b	A, C, b	B, C, b
A, B, c	A, C, c	B, C, c

Cuando se conocen dos ángulos, el tercero está determinado por la relacion

$$A+B+C=180^{\circ}$$

2º caso.—*Dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos,* ofrece *seis* combinaciones

a, b, A	a, c, A	b, c, B
a, b, B	a, c, C	b, c, C

3er caso.—*Dados dos lados y el ángulo que forman;* que ofrece *tres* combinaciones

a, b, C	a, c, B	b, c, A

4° CASO.—*Dados los tres lados,* determinar los ángulos, que ofrec *una* sola combinacion:

a, b, c.

En el 2° caso, como lo hemos explicado en geometría (443—VIII), el problema por regla general, admite dos resoluciones.

810.—PRIMER CASO.—*Conocidos dos ángulos y un lado de un triángulo, determinar sus demas elementos.*

Para facilitar nuestras explicaciones, supondremos que conocemos:

A, B y a

pero naturalmente el procedimiento de investigacion, será el mismo áun cuando se cambien las denominaciones de estos datos.

El tercer ángulo C, se determinará despejándolo de la ecuacion (K) que da;

$$C=180-(A+B)$$

Conocidos los tres ángulos y el lado *a*, los lados *b* y *c* se determinarán valiéndonos de la fórmula (F)

$$\frac{a}{\text{sen.}A}=\frac{b}{\text{sen.}B}=\frac{c}{\text{sen.}C}$$

que da

$$b=\frac{a\ \text{sen. }B}{\text{sen.}A} \quad y \quad c=\frac{a\ \text{sen. }C}{\text{sen. }A}$$

En este caso, para que el problema sea posible, se necesita que

$$A+B<180°$$

811.—SEGUNDO CASO.—*Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.*

Supondremos que conocemos

a, *b* y A

La fórmula (F) da $\text{sen. }B=\frac{b\ \text{sen. }A}{a}$ ....(1)

Conocidos los ángulos A y B, de la relacion (K), sacamos:

$C=180°-(A+B)$ ....(2)

Por último, para determinar *c*, nos valdremos del 1er principio cifrado en la fórmula (F), y tendremos:

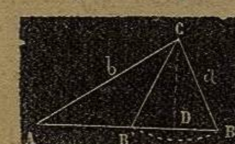
$c=\frac{a\ \text{sen. }C}{\text{sen. }A}$ ....(3)

DISCUSION.—Como el valor de B está dado por un seno en la ecuacion (1), y el seno de un ángulo es igual y del mismo signo que el seno de su suplemento, pueden tomarse para B, por regla general, dos valores: el que se encuentre en las tablas, siempre $<90°$, que corresponde á log. sen. B, y el de su suplemento que es un ángulo obtuso. Sustituidos estos dos valores, que llamaremos B y B', en la ecuacion (2), se tendrán dos valores para C; los que sustituidos á su vez en la ecuacion (3), darán para *c* dos valores. Se ve, pues, que en el segundo caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos, puede haber dos triángulos que satisfagan las condiciones del problema; pero hay varias circunstancias en las que el problema solo tiene una resolucion, y otras en que no admite ninguna.

Aun cuando ya hemos explicado en geometria (443—VIII), las diferentes circunstancias de este problema, volveremos á ocuparnos de ellas para que los alumnos las tengan presentes en la resolucion de los triángulos.

1°—Si el ángulo dado A (fig. 372) en vez de ser agudo, fuera *recto ú obtuso,* el otro ángulo B forzosamente seria agudo, (436), y el problema no admitiria más que una sola resolucion; pero para que el triángulo sea posible, es necesario tener $a>b$ para que al mayor ángulo esté opuesto el lado mayor.

2°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene $b<a$, el problema nò admitirá más que una sola resolucion; porque debiendo ser $B<A$ (431), no podremos tomar para el ángulo buscado el suplemento del valor que para B dan las tablas, porque no puede ser obtuso. Por lo demas, el triángulo siempre es posible.



[Fig. 372.]

3°—Si el ángulo dado A es agudo y se tiene $b=a$, no habrá más que una resolucion; pues siendo el triángulo isósceles, debe tenerse $B=A$ (429), y tendremos que tomar para B el valor del ángulo agudo.

4°—Si siendo el ángulo A agudo y $a<b$ se tiene que $a=b$ sen. A, el problema no admitirá más que una sola resolucion. En efecto, hemos visto que el valor de B se determina por la ecuacion (1):

$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

Ahora bien: siendo $a = b$ sen. A, sustituyendo, resulta:

$$\text{sen. } B = 1$$

y $B = 90^o$ igual á su suplemento B'. En este caso, el lado C B toma la posicion de la perpendicular C D en la figura.

5°—Si siendo A agudo y $a < b$ se tiene $a < b$ *sen. A*; el problema es imposible. En efecto, si dividimos por *a* los dos miembros de la desigualdad

$$a < b \text{ sen. } A$$

tendremos $$1 < \frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

y el valor de sen. B dado por la ecuacion (1)

$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

se trasformaria en $\quad$ sen. $B > 1$

lo que es imposible; pues hemos visto que el seno de un ángulo no puede ser mayor que el radio $=1$. En la figura esta circunstancia estaria indicada cuando el lado B C fuera menor que C D, cuya perpendicular tiene por valor b sen. A, y entónces con los datos del problema no podria cerrarse ningun triángulo.

6°—Por último, cuando $A < 90^o$, y $a < b$ pero mayor que b sen. A, el problema admitirá dos resoluciones; pues como se ve en la fig. 372, haciendo centro en C trazando un arco con el radio C B, se cortará el lado opuesto en los puntos B y B', resultando dos triángulos A C B y A C B' con los datos del problema, en los que el ángulo A B' C$=180-$B.

En resúmen: en el 2° caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos conociendo A, *a* y *b* el problema

SERÁ IMPOSIBLE: 1° cuando $A = 6 > 90^o$ y $a < b$
2° ,, $A < 90^o$ y $a < b$ sen. A

ADMITIRÁ SOLO UNA RESOLUCION: 1° cuando $A = 6 > 90^o$
2° cuando siendo $A < 90^o$, sea $b < a$
3° ,, ,, $A < 90^o$,, $b = a$
4° ,, ,, $A < 90^o$,, $a = b$, sen. A

ADMITIRÁ DOS RESOLUCIONES: Cuando $A < 90^o$, y $a < b$ pero $> b$ sen. A

812.—TERCER CASO.—*Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos de un triángulo.*

Primer procedimiento. Supondremos que conocemos

a, b y el ángulo C

De la ecuacion (K) resulta: $A + B = 180^o - C$

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 90^o - \frac{C}{2} \dots (1)$$

Conocida la mitad de la suma de los ángulos A y B, vamos á determinar la mitad de su diferencia, para lo cual nos valdremos del 3^er^ principio cifrado en la proporcion (H).

$$a+b : a-b :: \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b) \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(A+B)}{a+b}$$

y como $\frac{1}{2}[A+B]$ tiene por complemento $\frac{C}{2}$, tang. $\frac{1}{2}[A+B] = \text{cot.} \frac{1}{2}C$.

Sustituyendo tendremos:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}[A-B] = \frac{(a-b) \text{ cot.} \tfrac{1}{2} C}{a+b} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Una vez determinado $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(A-B)$ por las fórmulas (1) y (2), fácilmente se calculará el valor del ángulo mayor, que es el opuesto al mayor lado, y el del ángulo menor (266—V). Esto es, suponiendo $A > B$

$$A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B)$$

Una vez conocidos los tres ángulos, el lado c se determinará por medio de la fórmula (F)

$$c = \frac{\text{sen C. a}}{\text{sen A}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

813.—*Segundo procedimiento para resolver el tercer caso.*

Conforme al 2° principio cifrado en la fórmula (G) tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b. \cos. C$$

Si multiplicamos (a^2+b^2) por $\cos^2 \frac{1}{2} C + \text{sen}^2 \frac{1}{2} C = 1$; y si por cos. C sustituimos su valor, (fórmula 35) cos. $C = \cos^2 \frac{1}{2} C - \text{sen}^2 \frac{1}{2} C$, la expresion anterior se trasforma en