$$c^2=(a^2+b^2)\,(\cos^2\tfrac{1}{2}\,C+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,C)-2\,a\,b\,[\cos^2\tfrac{1}{2}\,C-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,C]$$

ejecutando la multiplicacion y sacando $\cos^2\frac{1}{2}$ C y $\text{sen}^2\frac{1}{2}$ C como factor comun, se tiene:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\,C+(a+b)^2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,C\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

sacando $(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}$ C como factor comun, para lo cual deberá dividirse el 2º término, por esta cantidad tendremos:

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}\,C\left[1+\frac{(a+b)^2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\,C}{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\,C}\right]$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a-b)\,\cos.\tfrac{1}{2}\,C\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,C}\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

con el objeto de hacer adaptable esta fórmula al uso de los logaritmos, introducirémos un arco auxiliar, haciendo el término:

$$\frac{a+b}{a-b}\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}\,C=\tan.\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots(L)$$

y entonces: $$\sqrt{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,C}=\sqrt{1+\text{tang}^2\phi}=\sec.\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}$$

Sustituyendo este valor en la expresion (b) resulta finalmente:

$$c=\frac{(a-b)\,\cos.\frac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots(M)$$

Por medio de las fórmulas (L) y (M) se determinará *c*, y una vez conocidos a, b, C y c, valiéndonos de la fórmula (F) se obtendrán los valores de A y B por las expresiones siguientes:

$$\text{sen}.A=\frac{a.\ \text{sen}C}{c}\quad y\quad \text{sen}\ B=\frac{b.\ \text{sen}\ C}{c}\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

La ventaja que tiene este procedimiento sobre el primero que hemos indicado para resolver el 3^er caso, es que pueden rectificarse los cálculos, examinando si

$$A+B+C=180^\circ$$

La razon de esto, es, que en el 2º procedimiento se han determinado los valores de los ángulos A y B por fórmulas especiales; mientras que

en el primer procedimiento hemos deducido esos valores precisamente de la expresion A+B+C=180º, por lo cual no podemos servirnos de ella para comprobar los cálculos.*

814—Cuarto caso.—*Dados los tres lados a, b y c de un triángulos determinar sus tres ángulos.*

El 2º principio cifrado en la fórmula (G), da:

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$$

despejando á $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

sustituyendo este valor en la expresion (37)

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

poniendo por $b^2+2\,b\,c+c^2$ su valor $(b+c)^2$ se tiene:

---

* Algunas veces conviene dar otra forma á las expresiones (L) y (M) por diferir muy poco la magnitud de *a* y de *b*, lo cual tiende á hacer nulo el denominador del valor de tang. φ. En este caso, de la fórmula [a], sacarémos como factor comun á $(a+b)^2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}$ C, á cuyo fin dividirémos por esta cantidad el primer término, y se tiene:

$$c^2=(a+b)^2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,C\left(1+\frac{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2\text{sen}^2\frac{1}{2}C}\right)$$

extrayendo raiz cuadrada

$$c=(a+b)\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,C\sqrt{1+\frac{(a-b)^2\cot^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}}$$

introduciendo un arco auxiliar φ de modo que

$$\text{tang}.\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}\,C\ldots\ldots\ldots\ldots[L']$$

tendremos:

$$c=(a+b)\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,C\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}=(a+b)\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}\,C\ \sec.\varphi$$

ó finalmente

$$c=\frac{(a+b)\ \text{sen}.\frac{1}{2}\,C}{\cos.\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots[M']$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,b\,c}}$$

Como la diferencia de los cuadrados es igual á la suma de las cantidades por su diferencia (251—III) se tiene que $(b+c)^2-a^2=(b+c+a)$ $[b+c-a]$, por lo cual la expresion anterior se convierte en

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{4\ b\ c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [b]$$

Harémos la suma de los tres lados

$$a+b+c=2\,p$$

Restando 2a á los dos miembros, se tiene:

$$b+c-a=2\,(p-a)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (b), y dividiendo por 4 los dos términos del quebrado, resulta:

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{p\ (p-a)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

Por medio de esta fórmula determinarémos el ángulo A. Cambiando A en B, *a* en *b* y recíprocamente tendriamos el ángulo B. Cambiando A en C, *a* en *c* y recíprocamente tendriamos B; pero como hemos visto [797] que los valores son mas aproximados cualquiera que sea la magnitud de los ángulos valiéndonos de la tangente, vamos á obtener otra fórmula análoga á la [N] en la que el ángulo esté expresado por una tangente. A este fin de la fórmula:

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos A$$

despejaremos á $\qquad \cos.A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

sustituyendo este valor en la expresion [36]

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos.A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}}{2}}=\sqrt{\frac{2\,b\,c-b^2-c^2+a^2}{4\,b\,c}}$$

Como $[b-c]^2=b^2-2\,b\,c+c^2$, cambiando signos tendremos: $-(b-c)^2=2\,b\,c-b^2-c^2$;

luego $\qquad \text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4\,b\,c}}$

reemplazando la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por su diferencia

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{4\ b\ c}}\ \ldots\ldots\ (c)$$

haciendo como ántes

$$a+b+c=2\,p$$

restando sucesivamente de los dos miembros 2 b y 2 c, resulta:

$$a+c-b=2\,(p-b)$$
$$a+b-c=2\,(p-c)$$

Sustituyendo estos valores en la expresion (c) y dividiendo los dos términos del quebrado por 4, resulta finalmente:

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(O)$$

Dividiendo la fórmula (O) por la (N), y teniendo presente que $\dfrac{\text{sen}.a}{\cos.a}=\text{tang}.a$, tendremos definitivamente:

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}}\ \ldots\ldots\ldots(P)$$

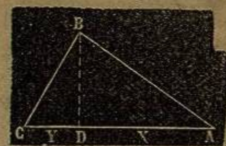
que es la fórmula que usaremos para determinar un ángulo en funcion de los tres lados, de preferencia á las (N) y (O), porque se obtiene mayor aproximacion sirviéndose de las tangentes. Cuando el ángulo es pequeño, da más aproximacion la fórmula (O) que la (N) sucediendo lo contrario cuando el valor del ángulo se acerca á 90°(797). Cuando se quieran determinar B y C, las fórmulas serán:

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}}\ \text{y}\ \text{tang}.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}$$

en las que

$$p=\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)$$

La comprobacion natural y sencilla del cálculo á que da lugar este caso, es, que la suma de los tres ángulos encontrados, sea igual á 180°.


(Fig. 373.)

815.—Este 4º caso puede resolverse de otro modo. Sea el triángulo A B C, (fig. 373) y desde el vértice B, bajemos la perpendicular B D al lado opuesto sobre el que determinará dos segmentos A D y C D que llamaremos *x* é *y*. Cuando la perpendicular cae dentro del triángulo, como en la figura que consideramos, conforme al 4º principio (808) tendremos:

$$b : a+c :: a-c : x-y \text{ que da } x-y=\frac{(a+c)\ (a-c)}{b}$$

Conocido el valor numérico de x—y, como b=x+y, podrá determinarse el valor de cada uno de los segmentos (266—V). Suponiendo que x sea el mayor, tendremos:

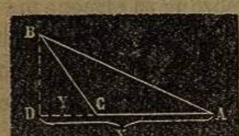
$$x=\frac{b}{2}+\frac{(a+c)\ (a-c)}{2\ b}$$

$$y=\frac{b}{2}-\frac{(a+c)\ (a-c)}{2\ b}$$

Una vez conocidos los segmentos *x* é *y*, se resolverán los triángulos rectángulos B D A y B D C en los que, conforme á la fórmula (B), se tiene:

$$\cos.\ A=\frac{c}{x};\ \cos.C=\frac{a}{y}\ \text{ y por último }\ B=180^\circ-(A+C)$$

En el caso de que la perpendicular B D caiga fuera del triángulo (fig. 374) conforme al mismo 4º principio (808) tendremos:


(Fig. 374.)

$$b: c+a:: c-a: x+y \text{ que da } x+y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{b}$$

Conocido el valor numérico de la suma de los segmentos, como x—y=b; suponiendo que x sea mayor que y, tendremos: (266—V)

$$x=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\ b}+\frac{b}{2}$$

$$y=\frac{(c+a)\ (c-a)}{2\ b}-\frac{b}{2}$$

Una vez conocidos los segmentos resolviendo los triángulos rectángulos A B D y C B D por medio de la formula (B) se determinarán los ángulos:

$$\cos.A=\frac{c}{x}\quad \cos.B\ C\ D=\frac{a}{y}\quad B\ C\ A=180^\circ-B\ C\ D \text{ y } B=B\ C\ D-A$$

Se debe tener presente, que *bajando la perpendicular desde el vértice opuesto al lado mayor caerá siempre dentro del triángulo, y que el segmento mayor* x *es el adyacente al mayor lado,* por ser su proyeccion.

El primer procedimiento es preferible al segundo, porque los ángulos están dados por una tangente, y porque se tiene la comprobacion de los cálculos viendo si A+B+C=180º.

816.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—Lo mismo que indicamos al tratar de los triángulos rectángulos (806), es conveniente en los oblicuángulos examinar si los datos no envuelven algun absurdo, y comprobar los resultados de los cálculos. Para el primer objeto, hemos dicho que debe tenerse presente que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que al lado mayor esté opuesto el mayor ángulo y recíprocamente; y que la suma de los tres sea de 180º. Para comprobar los cálculos hemos indicado que los del tercer caso, cuando se emplea el segundo procedimiento, y los del cuarto se rectifican fácilmente viendo si la suma de los tres ángulos encontrados da 180º. Respecto al primer caso, al segundo y al tercero cuando se usa del primer procedimiento, lo mejor es suponer como datos las incógnitas y calcular los otros elementos del triángulo que deben ser iguales á las cantidades conocidas. Generalmente la rectificacion se limita á buscar el valor de uno solo de los elementos empleando un método diferente.

Por ejemplo, en el primer caso conociendo A, B, y *a*, se ha encontrado el valor de C, *b* y *c;* pues bien: como rectificacion bastará buscar el valor de C en funcion de a, b y c por medio de la fórmula (P).

817.—Fórmula fundamental.—Podemos considerar la fórmula (G) en que quedó cifrado el segundo principio como fundamental para la resolucion de los triángulos oblicuángulos. En efecto, hemos visto que partiendo de la fórmula

$$a^2=b^2+c^2-2\ b\ c\ \cos.A$$

hemos resuelto el tercer caso empleando el segundo procedimiento y el cuarto caso.

Vamos ahora á deducir de la misma fórmula el principio de que los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos, y la proporcion (J):

$$b : c+a :: c-a : x \pm y$$

Despejando de ella á cos. A, se tiene:

$$\cos.A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

Sustituyendo este valor en la expresion $\text{sen}^2 a = 1-\cos^2 a$, tendremos:

$$\text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)^2 = \frac{4\,b^2\,c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Si elevamos al cuadrado el trinomio $(b^2+c^2-a^2)$ multiplicándolo por sí mismo nos resulta:

$$(b^2+c^2-a^2)^2 = a^4+b^4+c^4-2\,a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2$$

sustituyendo en la expresion de $\text{sen}^2 A$ y cambiando signos para ejecutar la resta de las cantidades que quedan dentro del paréntesis, se tiene:

$$\text{sen}^2 A = \frac{4\,b^2\,c^2-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Haciendo la reduccion de los términos $4\,b^2\,c^2-2\,b^2\,c^2$ y dividiendo los dos miembros de la ecuacion por a^2, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2 A}{a^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora bien: si tomamos la ecuacion

$$b^2 = a^2+c^2-2\,a\,c\,\cos.\,B$$

Despejando á cos. B y sustituyendo en la ecuacion: $\text{sen}^2 B = 1-\cos^2 B$, se tiene:

$$\text{sen}^2 B = 1 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}\right)^2 = \frac{4\,a^2\,c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4\,a^2\,c^2}$$

elevando al cuadrado $(a^2+c^2-b^2)$ y sustituyendo, se obtiene:

$$\text{sen}^2 B = \frac{4\,a^2\,c^2-(a^4+b^4+c^4+2\,a^2\,c^2-2\,a^2\,b^2-2\,b^2\,c^2)}{4\,a^2\,c^2}$$

ejecutando la resta indicada, reduciendo y dividiendo por b^2 los dos miembros, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2 B}{b^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2} \ldots (2)$$

y como los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) son iguales, se infiere que

$$\frac{\text{sen}^2 A}{a^2} = \frac{\text{sen}^2 B}{b^2}$$

ó que $\dfrac{\text{sen. } A}{a} = \dfrac{\text{sen. } B}{b}$,

que es lo que se queria demostrar.

Deducirémos igualmente por medio del cálculo, de la fórmula (G) el 3er principio cifrado en la expresion:

$$a+b : a-b :: \text{tang}\tfrac{1}{2}\,(A+B) : \text{tang}\tfrac{1}{2}\,(A-B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (H)$$

se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\ \cos.A \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\ \cos.B \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.\ \cos.C \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3)

$$b^2+c^2 = 2\,a^2+b^2+c^2-2\,a\,c.\ \cos.\ B-2\,a\,b.\ \cos.C$$

suprimiendo en los dos miembros b^2+c^2, dividiendo los términos restantes por 2 *a* y despejando á *a*, se tiene:

$$a = c.\ \cos.\ B + b.\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3)

$$a^2+c^2 = 2\,b^2+a^2+c^2-2\,b\,c.\ \cos.\ A-2\,a\,b.\ \cos.\ C$$

suprimiendo en los dos miembros a^2+c^2, dividiendo los términos restantes por 2 *b* y despejando á *b*, se obtiene:

$$b = c.\ \cos.\ A + a.\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$a+b = c\,(\cos.A+\cos.B) + \cos.C\,(a+b)$$

trasladando y despejando:

$$a+b = \frac{c.\ (\cos.A + \cos.B)}{1-\cos.C} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Restando de la ecuacion (4) la (5)

$$a-b=c\ (\cos. B-\cos. A)-\cos. C\ (a-b)$$

$$a-b=\frac{c\ (\cos. B-\cos. A)}{1+\cos. C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Dividiendo la ecuacion (6) por la (7)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos. A+\cos. B}{\cos. B-\cos. A}\times\frac{1+\cos. C}{1-\cos. C}$$

sustituyendo los valores de los dos factores del segundo miembro conforme á las fórmulas (72) y (44):

$$\frac{a+b}{a-b}=\cot. \tfrac{1}{2}\ (A+B)\ \cot. \tfrac{1}{2}\ (A-B)\ \cot^2 \tfrac{1}{2}\ C\ldots\ldots(8)$$

Como $A+B+C=180°$; $\frac{1}{2}\ (A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, y por tanto:

$$\cot. \tfrac{1}{2}\ C=\text{tang.} \tfrac{1}{2}\ (A+B)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (8) y los de las cotangentes en funcion de las tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\ (A+B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}\ (A+B) \text{tang.} \frac{1}{2}\ (A-B)}$$

y simplificando resulta por último:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan. \frac{1}{2}\ (A+B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A-B)}$$

que es la expresion del 3er principio que nos propusimos deducir.

Vamos á sacar finalmente de la ecuacion

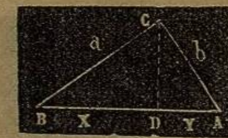
$$a^2=b^2+c^2-2\ b\ c.\ \cos. A$$

el 4° principio (808).

Trasladando b^2 $\quad a^2-b^2=c^2-2\ b\ c.\ \cos. A$

reemplazando la diferencia de los cuadrados, y sacando *c* como factor comun:

$$(a+b)\ (a-b)=c\ (c-b\ \cos. A-b\ \cos. A)\ldots\ldots\ \ldots(3)$$



[Fig. 375].

En el triángulo rectángulo C D A (fig. 375) se tiene: (B)

$$y=b.\ \cos. A$$

$$B\ A-D\ A=c-y=c-b\ \cos. A=x$$

Sustituyendo los valores de $c-b\ \cos. A$ y de $b.\ \cos. A$ en la ecuacion (3), resulta:

$$(a+b)\ (a-b)=c\ (x-y)$$

formando una proporcion con estos cuatro factores, se obtiene:

$$c : a+b :: a - b : x - y$$

que es lo que se queria demostrar.

818. — Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Siendo, como son, los triángulos rectángulos un caso particular de los triángulos oblicuángulos, naturalmente es muy sencillo deducir de las fórmulas que nos han servido para resolver los triángulos oblicuángulos las que establecimos para los rectángulos; pero, por ejercicio las sacarémos directamente de la fórmula (G) introduciendo en ella las condiciones de los triángulos rectángulos. Esto es,

$$A=90°,\quad B=90°-C,\quad \cos. A=0 \text{ etc.}$$

Si en la fórmula (G) $\quad a^2=b^2+c^2-2\ b\ c.\ \cos. A$

sustituimos $\quad \cos. A=0$

resulta: $\quad a^2=b^2+c^2$, comprobacion de la....... .... (E)

Decimos que comprobamos esta fórmula, y no que la deducimos, porque en geometría nos fundamos en ella para establecer el teorema que sirve de base á la fórmula (G).

Para deducir la expresion $b=a.\ \text{sen.} B$ de los triángulos rectángulos, de la fórmula:

$$c^2=a^2+b^2-2\ ab.\ \cos. C$$

eliminaremos a^2 y $\cos. C$ sustituyendo sus valores:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\cos. C=\cos\ (90°-B)=\text{sen.} B$$

con lo que se tendrá:

$$c^2 = 2\ b^2 + c^2 - 2\ ab.\ \text{sen.}B$$

suprimiendo c^2 y dividiendo por $2\ b$, resulta finalmente:

$$b = a.\ \text{sen.}B \text{.... fórmula} \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Para deducir la expresion $c = a.\ \cos.B$ de los triángulos rectángulos, en la fórmula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c.\ \cos.B$$

eliminarémos á a^2 sustituyendo su valor

$$a^2 = b^2 + c^2$$

lo que da $$b^2 = b^2 + 2\ c^2 - 2\ a\ c.\ \cos.B$$

suprimiendo b^2 y dividiendo por $2\ c$, resulta:

$$c = a.\ \cos.B \text{.... fórmula} \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Deducirémos la expresion: $b = c.\ \text{tang.}B$, dividiendo la ecuacion (A) por la (B), lo cual da:

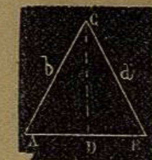
$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen.}B}{\cos.B}$$

ó $$b = c\ \text{tang.}B, \text{ que es la fórmula.... (C)}$$

819.—Fórmulas para la resolucion de los triángulos isósceles.—Igualmente es fácil deducir de las fórmulas generales de los triángulos oblicuángulos las correspondientes al caso en que el triángulo sea isósceles, cuya circunstancia estará indicada por la doble condicion de que A=B y a=b; pero vamos á indicar otro procedimiento mucho mas sencillo que puede seguirse para resolver los triángulos isósceles, y el cual consiste en descomponerlos préviamente en dos triángulos rectángulos iguales, y resolver estos en seguida.

1er *Caso.*—Dados A, B y *a*, determinar los demas elementos.

Por ser el triángulo isósceles siendo A=B, se tiene a=b.



(Fig. 376).

En la fig. 376, el ángulo D C A$=\frac{1}{2}$ C$=90^\circ-$A y

$$A\ D = \tfrac{1}{2}\ c = b\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C$$

2º *Caso.*—Dados *a*, *b* y A, determinar los demas elementos.

Por ser isósceles el triángulo, se tendrá B=A

$$\tfrac{1}{2}\ C = 90^\circ - A$$

y como ántes $$\tfrac{1}{2}c = b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

3er *Caso.*—Dados *a*, *b* y C, determinar los demas elementos (fig. 376).

$$A = B = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\ C$$
$$\tfrac{1}{2}\ c = b\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C$$

4º *Caso.*—Dados *a*, *b* y *c*, determinar los tres ángulos.

Considerando el triángulo rectángulo A D C (fig. 376) de la fórmula (A), resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C = \frac{\frac{1}{2}c}{b}$$

Una vez conocido C, se tiene: A=B=90°$-\frac{1}{2}$ C

820.—Antes de ocuparnos de los problemas numéricos relativos á la resolucion de los triángulos oblicuángulos, pondremos la siguiente

Tabla de las fórmulas para la resolucion de los triángulos.

Triángulos rectángulos:

$$b = a\ \text{sen.}B \qquad c = a\ \text{sen.}C \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$
$$b = a\ \cos.C \qquad c = a\ \cos.B \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$
$$b = c\ \text{tang.}\ B \qquad c = b\ \text{tang.}C \ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$
$$B = 90^\circ - C \qquad C = 90^\circ - B \ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

Triángulos oblicuángulos:

$$\frac{a}{\text{sen.}A} = \frac{b}{\text{sen.}B} = \frac{c}{\text{sen.}C} \ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos.A,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \quad \text{(G)}$$
$$a+b : a-b :: \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$
fig. 370 $$b : c+a :: c-a : A\ D - D\ C \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$
fig. 371 $$b : c+a :: c-a : A\ D + D\ C \ldots\ldots\ldots \text{(J)}$$
$$A + B + C = 180^\circ \ldots\ldots\ldots \text{(K)}$$