con lo que se tendrá:

$$c^2 = 2\,b^2 + c^2 - 2\,ab.\ \text{sen.}B$$

suprimiendo c^2 y dividiendo por 2 b, resulta finalmente:

$$b = a.\ \text{sen.}B \ldots\ \text{fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Para deducir la expresion $c = a.\ \cos.B$ de los triángulos rectángulos, en la fórmula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c.\ \cos.B$$

eliminarémos á a^2 sustituyendo su valor

$$a^2 = b^2 + c^2$$

lo que da $\quad b^2 = b^2 + 2\,c^2 - 2\,a\,c.\ \cos.B$

suprimiendo b^2 y dividiendo por 2 c, resulta:

$$c = a.\ \cos.B \ldots\ \text{fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Deducirémos la expresion: $b = c.\ \text{tang.}B$, dividiendo la ecuacion (A) por la (B), lo cual da:

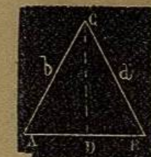
$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen.}B}{\cos.B}$$

ó $\quad b = c\ \text{tang.}B$, que es la fórmula.... (C)

819.—Fórmulas para la resolucion de los triángulos isósceles.—Igualmente es fácil deducir de las fórmulas generales de los triángulos oblicuángulos las correspondientes al caso en que el triángulo sea isósceles, cuya circunstancia estará indicada por la doble condicion de que A=B y a=b; pero vamos á indicar otro procedimiento mucho mas sencillo que puede seguirse para resolver los triángulos isósceles, y el cual consiste en descomponerlos préviamente en dos triángulos rectángulos iguales, y resolver estos en seguida.

1er *Caso.*—Dados A, B y a, determinar los demas elementos.

Por ser el triángulo isósceles siendo A=B, se tiene a=b.



(Fig. 376).

En la fig. 376, el ángulo D C A$=\frac{1}{2}$ C$=90°-$A y

$$A\,D = \tfrac{1}{2}\,c = b\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,C$$

2º *Caso.*—Dados a, b y A, determinar los demas elementos.

Por ser isósceles el triángulo, se tendrá B=A

$$\tfrac{1}{2}\,C = 90° - A$$

y como ántes $\quad \tfrac{1}{2}c = b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\,C$

3er *Caso.*—Dados a, b y C, determinar los demas elementos (fig. 376).

$$A = B = 90° - \tfrac{1}{2}\,C$$
$$\tfrac{1}{2}\,c = b\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,C$$

4º *Caso.*—Dados a, b y c, determinar los tres ángulos.

Considerando el triángulo rectángulo A D C (fig. 376) de la fórmula (A), resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,C = \frac{\frac{1}{2}c}{b}$$

Una vez conocido C, se tiene: $A = B = 90° - \tfrac{1}{2}\,C$

820.—Antes de ocuparnos de los problemas numéricos relativos á la resolucion de los triángulos oblicuángulos, pondremos la siguiente

Tabla de las fórmulas para la resolucion de los triángulos.

Triángulos rectángulos:

$b = a\ \text{sen.}B$	$c = a\ \text{sen.}C$	(A)
$b = a\ \cos.C$	$c = a\ \cos.B$	(B)
$b = c\ \text{tang.}\ B$	$c = b\ \text{tang.}C$	(C)
$B = 90° - C$	$C = 90° - B$	(D)
	$a^2 = b^2 + c^2$	(E)

Triángulos oblicuángulos:

	$\frac{a}{\text{sen.}A} = \frac{b}{\text{sen.}B} = \frac{c}{\text{sen.}C}$	(F)
	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos.A,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$	(G)
	$a + b : a - b :: \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(A + B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A - B)$	(H)
fig. 370	$b : c + a :: c - a : A\,D - D\,C$	(I)
fig. 371	$b : c + a :: c - a : A\,D + D\,C$	(J)
	$A + B + C = 180°$	(K)

Para el tercer caso $\text{tang.}\,\varphi=\frac{a+b}{a-b}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C$ .... (L)

$$c=\frac{(a-b)\ \cos.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\varphi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (M)$$

Para el cuarto caso
$p=\tfrac{1}{2}[a+b+c]$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (O)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,[p-a]}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (P)$$

Para los triángulos isósceles, siendo:

$A=B$ y $a=b$, se tendrá: $\tfrac{1}{2}C=90°-A$ y $\tfrac{1}{2}c=b\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}C$

821. — PROBLEMAS.—I.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos ángulos y un lado,* cuyos valores son:

a=9849‘73 m
B=49°—18'—19''‘34
C=95°—14'—49''‘75

Comenzaremos por determinar A, cuyo valor es: A=180°—(B+C)

CÁLCULO DE A.

B= 49°-18'-19''‘34
C= 95°-14-49 ‘75
144 -33 - 9 ‘09
180 - 0 - 0 ‘00
A= 35°-26'-50''‘91

CÁLCULO DE b.

$$b=\frac{a\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ A}$$

log.a = 3‘993 4244
log.sen.B= 9·879 7812
13.873 2056
log.sen.A= 9·763 3953
log.b = 4‘109 8103
b= 12876‘869 m

CÁLCULO DE c.

$$c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen}A}$$

log.a = 3‘993 4244
log. sen.C= 9·998 1762
13‘991 6006
log.sen.A= 9·763 3953
log.c = 4‘228 2053
c=16912‘401 m

Como comprobacion calcularemos el lado *a* conociendo A, B, y b

A=35°—26'—50''‘91
B=49 —18 —19 ‘34
b=12876‘869 m

El valor de *a* se tendrá por la fórmula: $a=\frac{b.\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$

CÁLCULO DE a.

log.b 4‘109 8103
log.sen.A = 9·763 3953
13‘873 2056
log.sen.B 9·879 7812
log.a = 3‘993 4244 de donde a=9849‘73 m que es el valor que teniamos ántes como dato.

II.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.* Sean

a= 6789‘24 m
b=10079‘44
B=87°—34'—11''‘8

Determinaremos A por la fórmula:

$$\text{sen.}A=\frac{\text{sen.}B.a}{b}$$

log.sen.B= 9·999 5538
log.a = 3‘831 8212
13·831 3750
log.b = 4‘003 4364
log.sen.A= 9‘827 9386 lo que da A=42°—17'—23''‘4

Estando dado A por un seno, podriamos tomar para el valor de este ángulo el encontrado en las tablas 42°—17'—23''‘4, ó su suplemento; pero siendo el lado opuesto a<b, tambien A deberá ser menor que B, por cuya razon no podremos tomar para A el valor del ángulo obtuso.

Una vez conocido A, calcularemos C por la fórmula

C=180°—(A+B)=180°—(129°—41'—35''‘2)=50°—18'—24''‘8

El lado *c* se determinará por la fórmula:

$$c=\frac{a\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A}$$

$$\begin{array}{ll}
\log.a & = 3'831\ 8212 \\
\log.\text{sen.}C & = 9\cdot886\ 1953 \\
\hline
 & \ 13\cdot718\ 0165 \\
\log.\text{sen.}A & = 9'827\ 9386 \\
\hline
\log.c & = 3'890\ 0779 \quad \text{lo que da } c=\overset{m}{7763}'86
\end{array}$$

Para comprobacion del cálculo supondremos conocidos:

$c=\overset{m}{7763}'86$; $C=50°—18'—24''8$, y $A=42°—17'—23''4$

y calcularemos a por la fórmula:

$$a=\frac{c.\text{sen.}A}{\text{sen.}C}$$

$$\begin{array}{ll}
\log.c & = 3'890\ 0779 \\
\log.\text{sen.}A & = 9\cdot827\ 9386 \\
\hline
 & \ 13\cdot718\ 0165 \\
\log.\text{sen.}C & = 9'886\ 1953 \\
\hline
\log.a & = 3'831\ 8212 \quad \text{que da } a=\overset{m}{6789}'24,
\end{array}$$

valor igual al dato primitivo de nuestro problema.

III.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo que forman.* Sean

$a=\overset{m}{434}'32$ Para preparar el cálculo tendremos $a+b=\overset{m}{814}'77$

$b=\overset{m}{380}'45$ $a—b=\ 53'87$

$C=54°—37'—32''5$ $\frac{1}{2}\ C=27°—18'—46''25$

Calcularemos primero $\frac{1}{2}\ (A+B)=90°—\frac{1}{2}\ C=90°—(27°—18'—46''25)$

$\frac{1}{2}\ (A+B)=62°—41'—13''75$

Para calcular $\frac{1}{2}\ (A—B)$ nos serviremos de la fórmula (2) del tercer caso: (812)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A—B)=\frac{(a—b)\ \cot.\frac{1}{2}\ C}{a+b}$$

$$\begin{array}{ll}
\log.\ (a—b) & =1'731\ 3470 \\
\log.\cot.\ \frac{1}{2}\ C & =0'286\ 9949 \\
\hline
 & \ 2'018\ 3419 \\
\log.\ (a+b) & =2'911\ 0350 \\
\hline
\log.\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B) & =9\cdot107\ 3069 \quad \text{lo que da } \ \tfrac{1}{2}(A—B)=7°—17'—44''00
\end{array}$$

Una vez conocidos $\frac{1}{2}\ (A+B)$ y $\frac{1}{2}\ (A—B)$, determinaremos el valor de A y de B, debiendo ser $A>B$ por ser $a>b$

$$A=62°—41'—13''75+7°—17'—44''90=69°—58'—58''65$$
$$B=62°—41'—13''75—(7°—17'—16''68)=55°—23'—28''85$$

Para determinar c, haremos uso de la fórmula:

$$c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ A}$$

$$\begin{array}{ll}
\log.a & = 2'637\ 8098 \\
\log.\ \text{sen.}C & = 9\cdot911\ 3641 \\
\hline
 & \ 12\cdot549\ 1739 \\
\log.\ \text{sen.}A & = 9\cdot972\ 9388 \\
\hline
\log.\ c & = 2'576\ 2551 \quad \text{que da } C=\overset{m}{376}'908
\end{array}$$

Para ejercicio de los alumnos, y como comprobacion del cálculo anterior, resolveremos el mismo triángulo empleando el segundo procedimiento para el tercer caso explicado en el núm. 813. Tenemos:

$a=\overset{m}{434}'32$; $b=\overset{m}{380}'45$, y $C=54°—37'—32''5$

Comenzaremos por determinar el arco auxiliar φ por la fórmula (L)

$$\text{tang.}\ \varphi=\frac{a+b}{a—b}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ C$$

$$\begin{array}{ll}
\log.\ \ (a+b) & = 2'911\ 0350 \\
\log.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ C & = 9\cdot713\ 0052 \\
\hline
 & \ 12'624\ 0402 \\
\log.\ (a—b) & = 1'731\ 3470 \\
\hline
\log.\ \text{tang.}\varphi & = 0'892\ 6932 \quad \text{que da } \ \varphi=82°—42'—15''1
\end{array}$$

Conocido φ determinaremos c por la fórmula (M)

$$c=\frac{(a—b)\ \cos.\frac{1}{2}\ C}{\cos.\ \varphi}$$

$$\begin{array}{ll}
\log.\ (a—b) & = 1'731\ 3470 \\
\log.\ \cos.\frac{1}{2}\ C & = 9\cdot948\ 6645 \\
\hline
 & \ 11\cdot680\ 0115 \\
\log.\ \ \cos.\ \ \varphi & = 9\cdot103\ 7764 \\
\hline
\log.\ c & = 2'576\ 2351 \quad \text{que da } c=\overset{m}{376}'908
\end{array}$$

Una vez conocidos a, b C y c, determinaremos A y B por las fórmulas:

$$\text{sen.}A=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{c}\qquad\qquad \text{sen.}B=\frac{b\ \text{sen.}\ C}{c}$$

CÁLCULO DE A.		CÁLCULO DE B.	
log.a	= 2'637 8098	log.b	= 2'580 2976
log. sen. C=	9'911 3641	log. sen. C=	9'911 3641
	12'549 1739		12'491 6617
log.c	= 2'576 2351	log.c	= 2'576 2351
log.sen. A =	9'972 9388	log.sen. B =	9'915 4266
A =	69°—58'—58"'70	B =	55°—23'—28"'89

Como comprobacion de este procedimiento, debe tenerse que

$$A+B+C=180^\circ$$

A=69°—58'—58"'70
B=55 —23 —28 '89
C=54 —37 —32 '50

180°—00—00 '09

la pequeña diferencia de 0"'09 procede de que las tablas de los logaritmos están calculadas solo para los arcos de 10" de 10", y en el cálculo hemos llevado la aproximacion hasta centésimas de segundo.

IV.—*Dados los tres lados de un triángulo, determinar sus tres ángulos.*

Sean: $a=\overset{m}{57}'770$, $b=\overset{m}{71}'577$ y $c=\overset{m}{87}'811$

Debiendo usar la fórmula P (814) para resolver este caso, prepararemos el cálculo de la manera siguiente:

a= $\overset{m}{57}$'770	p=108'579	p=108'579	p=108'579
b= 71'577	a= 57'770	b= 71'577	c= 87'811
c= 87'811	p—a= 50'809	p—b= 37'002	p—c= 20'768
2 p=217'158			
p=108'579			

Las fórmulas para determinar los ángulos, son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}\qquad \text{tang. } \tfrac{1}{2} B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

log(p—b)=1'568 2252		log(p—a)=1'705 9406	
log(p—c)=1'317 3947	2'885 6199	log(p—c)=1'317 3947	3'023 3353
log p =2'035 7459		log p =2'035 7459	
log(p—a)=1'705 9406	3'741 6865	log(p—b)=1'568 2252	3'603 9711
Agregamos 10 para extraer raíz	(1) 9'143 9334		(1) 9'419 3642

Tomando la mitad:

log. tang. ½ A	=9'571 9667	log. tang. ½ B=9'709 6821
½ A	=20°—27'—59"'97	½ B=27°—8'—4"'24
A	=40°—55'—59"'94	B=54 —16—8 '48

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

log. (p—a)=1'705 9406	
log. (p—b)=1'568 2252	3'274 1658
log. p =2'035 7459	
log. (p—c)=1'317 3947	3'353 1406
Agregamos 10 para extraer raíz	(1)9'921 0252
Tomando ½ log. tang. ½ C=	9'960 5126
½ C=	42°—23'—55"'77
C=	84 —47 —51 '54

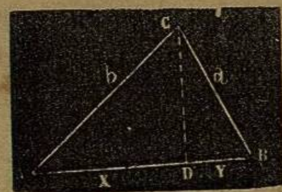
Como comprobacion del cálculo debemos tener: $A+B+C=180^\circ$

A=40°—55'—59"'94
B=54 —16 —8 '48
C=84 —47 —51 '54

179°—59'—59"'96 La pequeña diferencia de 0"'04 procede de que los valores de los logaritmos no son exactos, sino aproximados.

Vamos á emplear el segundo procedimiento que hemos explicado (815) para el cuarto caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos. Conocemos los tres lados:

$$a=\overset{m}{57}'770;\qquad b=\overset{m}{71}'577,\qquad y\quad c=\overset{m}{87}'811$$



[Fig. 377].

Tomaremos la fig. 377 para facilitar nuestra explicacion. Desde el vértice C opuesto al lado mayor, que es c, bajaremos la perpendicular C D que caerá dentro del triángulo, y el segmento mayor x quedará contiguo al lado b>a, esto es, será adyacente al ángulo A.

Esto supuesto, tenemos:

Suma de los segmentos $\quad x+y=c=\overset{m}{87'811}$

Conforme al cuarto principio (808) se tiene:

$$c : b+a :: b-a : x-y=\frac{(b+a)\ (b-a)}{c}$$

Sustituyendo

$$x-y=\frac{129'347\times 13'807}{87'811}$$

$$\begin{array}{ll} \text{log. } (b+a) & =2'111\ 7564 \\ \text{log. } (b-a) & =1'140\ 0993 \\ \hline & \ \ 3'251\ 8557 \\ \text{log. } c & =1'943\ 5489 \\ \hline \text{log. } (x-y) & =1'308\ 3068 \quad x-y=20'338 \end{array}$$

Una vez conocida la suma y la diferencia de los segmentos:

el mayor $x=\frac{87'811}{2}+\frac{20'338}{2}=54'074$

el menor $y=\frac{87'811}{2}-\frac{20'338}{2}=33'737$

Ahora podremos resolver los triángulos rectángulos A C D y B C D para determinar los ángulos A y B por medio de las fórmulas:

$$\cos.A=\frac{x}{b} \qquad\qquad \cos.B=\frac{y}{a}$$

$$\begin{array}{ll} \text{log.}x & =1'732\ 9885 \\ \text{log.}b & =1'854\ 7735 \\ \hline \text{log. cos. } A & =9'878\ 2150 \\ & A=40^\circ-56'-1''98 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{log.}y & =1'528\ 1065 \\ \text{log.}a & =1'761\ 7024 \\ \hline \text{log. cos. } B & =9'766\ 4041 \\ & B=54^\circ-16'-6''44 \end{array}$$

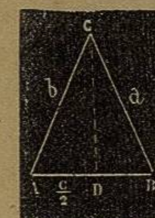
Conocidos A y B se determinará C por medio de la relacion:

$$C=180^\circ-(A+B)$$

que da $\quad C=84^\circ-47'-51''58$

Los valores de los ángulos tienen pequeñas diferencias con los obtenidos por el primer método, tanto porque los logaritmos no son enteramente exactos, cuanto porque una vez han sido dados por sus tangentes, y otra por sus cosenos; dando resultados más aproximados el primer procedimiento, porque generalmente tambien lo son los logaritmos de las tangentes.

V.—*Resolver un triángulo isósceles* A B C (fig. 378), *en el que se conoce el lado c desigual á los otros dos, y el ángulo opuesto* C.



[Fig. 378.]

Sean: $c=\overset{m}{82'25}$ y $C=48^\circ-45'-16''4$

Considerando el triángulo rectángulo C D A conocemos el cateto $\frac{c}{2}$ y el ángulo opuesto $\frac{1}{2}$ C, y tratamos de determinar la hipotenusa b y el ángulo A. A este fin nos serviremos de las fórmulas (A) y (D):

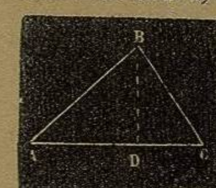
$$\frac{c}{2}=b \text{ sen. } \tfrac{1}{2} C \qquad\qquad A=90^\circ-\tfrac{1}{2} C$$

despejando $\quad b=\frac{41'125}{\text{sen.}24^\circ-22'-38''2} \qquad A=90^\circ-(24^\circ-22'-38''2)$

$$\begin{array}{ll} \text{log. } 41'125 & =1'614\ 1059 \qquad\qquad A=65^\circ-37'-21''8 \\ \text{log. sen. } \tfrac{1}{2} C & =9'615\ 6799 \\ \hline \text{log. } b & =1'998\ 4260 \qquad \text{lo que da } b=\overset{m}{99'6382} \end{array}$$

y como el triángulo es isósceles, B será igual á A, y a=b.

VI.—*Dados los tres lados de un triángulo* A B C (fig. 379), *determinar su altura, bajada desde el vértice* B.



[Fig. 379.]

Si consideramos el triángulo rectángulo A D B de que forma parte la altura B D buscada, tendremos que

D B=c. sen.A............(1)

por la fórmula 34

$$\text{sen.}A=2 \text{ sen.}\tfrac{1}{2} A. \cos.\tfrac{1}{2} A$$

sustituyendo por sen.$\frac{1}{2}$ A y por cos.$\frac{1}{2}$ A sus valores expresados en las fórmulas (N) y (O) se tiene:

$$\text{sen.}A=2\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)\ p\ (p-a)}{b^2\ c^2}}$$

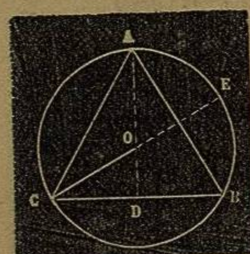
sustituyendo en la (1) y simplificando, resulta definitivamente:

$$B\,D=\frac{2}{b}\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$$

y como $\quad p=\frac{1}{2}\ (a+b+c)$

se tendrá la altura B D en funcion de los tres lados.

VII.—*Determinar el radio de un círculo, conociendo el lado* a *del triángulo equilátero* A B C (fig. 380) *inscrito.*



[Fig. 380.]

Por el vértice A y el centro O del círculo tiremos la recta A O D que será perpendicular al lado C B, por tener los puntos A y O equidistantes de los extremos C y B. Si trazamos la recta C O E, por pasar por el centro y ser perpendicular á la cuerda A B, dividirá el arco A E B en dos partes iguales; y como los ángulos A C E y E C B tienen respectivamente por medida la mitad de A E y de E B, resulta que la recta O C divide en dos partes iguales el ángulo A C B del triángulo. Ahora bien: como este es equilátero, cada uno de sus ángulos valdrá 60°, y en consecuencia el ángulo O C D=30°.

Considerando el triángulo rectángulo C O D, del que forma parte el radio O C buscado, segun la fórmula (B) se tiene:

$$C\,D=C\,O.\ \cos.O\,C\,D$$

despejando $\quad C\,O=\dfrac{C\,D}{\cos.O\,C\,D}$

sustituyendo y teniendo presente que el cos.$30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, tendremos:

$$r=\frac{\frac{1}{2}\,a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

VIII.—*Determinar el valor del arco* x *por medio de la expresion:*

$$\text{sen.}x=\frac{a}{b}$$

Siendo *a* y *b* valores numéricos conocidos, tendremos:

$$\log.\text{sen.}x=\log.a-\log.b$$

así, pues, buscando en las tablas de los números los logaritmos de *a* y de *b*, y restándolos se tendrá el logaritmo del seno del arco x, cuyo valor se obtendrá fácilmente por medio de las tablas trigonométricas. Para que el problema sea posible, debe tenerse $a<b$, supuesto que el seno siempre es menor que el radio, igual á 1.

IX.—*Resolver un triángulo conociendo el ángulo* B, *el lado adyacente* a, *y la suma ó la diferencia de los otros dos lados.*

Representando por 2 p el perímetro a+b+c del triángulo, conforme á la fórmula (P) tenemos:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p\ (p-b)}} \qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ \ (p-c)}}$$

multiplicando miembro á miembro estas ecuaciones, ó dividiendo la segunda por la primera, se tiene:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-a}{p} \qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,C\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-b}{p-c}$$

de las cuales se despejaria á tang. $\frac{1}{2}$ C para hacer uso de la primera cuando se conoce la suma b+c de los otros dos lados, y de la segunda cuando se nos dé b—c. En efecto, como se conoce *a*, cuando se nos dé (a+b) fácilmente determinaremos á $p=\frac{1}{2}$ (a+b+c) y á p—a, que son los valores que entran junto con B en la primera expresion. Cuando ademas de *a* se nos da (b—c), tendremos:

$$a-(b-c)=a+c-b=a+c-b+b-b=2\,p-2\,b=2\,(p-b)$$

de la que $\quad p-b=\dfrac{a-(b-c)}{2}$

$$a+(b-c)=a+b-c+c-c=2\,p-2\,c=2\,p-2\,c=2(p-c)$$

de la que $\quad p-c=\dfrac{a+\ (b-c)}{2}$

que son los valores que junto con B entran en la segunda expresion.

Una vez conocidos *a*, B y C, se pueden determinar los demas elementos del triángulo conforme al procedimiento explicado para el 1.er caso (810).

X.—*Resolver un triángulo en el que se conoce su perímetro* (a+b+c) *y los tres ángulos.*

En el núm. 814 hemos dejado demostradas las fórmulas (N):

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

multiplicando estas ecuaciones se tiene:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\,B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,C=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}$$

Por otra parte, en el mismo párrafo la fórmula (O) da:

$$\mathrm{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}}$$

luego $\cos.\tfrac{1}{2}\,B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,C=\frac{p}{a}\ \mathrm{sen.}\tfrac{1}{2}A$

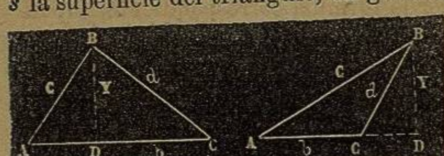
despejando á $a=\dfrac{p\ \mathrm{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,A}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\,B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,C}$

lo mismo que hemos determinado *a* pueden obtenerse *b* y *c*, ó emplear alguno de los procedimientos explicados para los cuatro casos de la resolucion de los triángulos oblicuángulos una vez conocido el lado *a*.

Superficie de los triángulos.

822.—Fórmula fundamental.—En geometría hemos visto (564) que la área de un triángulo tiene por valor el producto de su base por su altura; de consiguiente, si representamos por *b* la base A C de cualquiera de los dos triángulos de la fig. 381, por *y* su altura B D y por *s* la superficie del triángulo, en general tendremos:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,y$$



[Fig. 381]

pero considerando el triángulo rectángulo ABD conforme á la fórmula (A), tenemos:

$$y=c.\ \mathrm{sen.}\ A$$

por lo que sustituyendo, resulta

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c\ \mathrm{sen}\ A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

que consideraremos como fórmula fundamental, para deducir de ella las diferentes expresiones relativas á los casos de que vamos á ocuparnos.

823.—Casos para determinar la superficie de un triángulo. — Para el cálculo de la área de un triángulo, distinguiremos los mismos casos que para su resolucion:

1º Dados dos ángulos y un lado, determinar la superficie de un triángulo.

2º Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

3º Dados dos lados y el ángulo que forman.

4º Dados los tres lados.

824.—1er Caso.—Supongamos conocidos los ángulos A y C y el lado b.

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c.\ \mathrm{sen}\ A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

no conocemos á *c*, pero podemos determinar su valor por medio de la expresion:

$$c=\frac{b\ \mathrm{sen.}\ C}{\mathrm{sen.}\,B}$$

Ademas, como B=180°—(A+C), y el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, el valor de c se trasforma en

$$c=\frac{b.\ \mathrm{sen}\ C}{\mathrm{sen.}\,(A+C)}$$

y sustituyendo en la ecuacion (Q), resulta finalmente:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b^2\frac{\mathrm{sen}A.\ \mathrm{sen}\ C}{\mathrm{sen}\ (A+C)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (R)$$

825.—2º Caso.—Para establecer la fórmula correspondiente, supondremos que conocemos a, b, y A.

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c.\ \mathrm{sen}\ A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

tendremos que sustituir el valor de *c*; que es desconocido, en funcion de a, b y A, á cuyo fin de la expresion

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\ \cos\ A$$

que es una ecuacion mixta de 2° grado con respecto á c; despejaremos esta cantidad como sigue:

$$c^2-2\,b\cos A.\,c=a^2-b^2$$
$$c=\;b\cos A\pm\sqrt{b^2\cos^2 A+a^2-b^2}$$
$$c=\;b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\,(1-\cos^2 A)}$$
$$c=\;b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\,\mathrm{sen}^2 A}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (Q), se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,\mathrm{sen}\,A\,\left(b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\mathrm{sen}^2A}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

fórmula que resuelve el problema, pero que es conveniente trasformar á fin de hacerla adaptable al uso de los logaritmos. Con este objeto, sacaremos a^2 fuera del radical, para lo cual multiplicaremos y dividiremos el término $b^2.\mathrm{sen}^2 A$ por a^2, y se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b^2\,\mathrm{sen}\,A\,\left(b.\cos A\pm a\sqrt{1-\frac{b^2\mathrm{sen}^2A}{a^2}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Introduciremos un arco auxiliar φ, haciendo

$$\mathrm{sen}^2\varphi=\frac{b^2\,\mathrm{sen}^2 A}{a^2}$$

lo que da $$\mathrm{sen}.\varphi=\frac{b\ \mathrm{sen}.\ A}{a}\quad\text{y}\quad b=\frac{a\,\mathrm{sen}.\varphi}{\mathrm{sen}.A}$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion (2) tendremos:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\ \mathrm{sen}.A\left(\frac{a\ \mathrm{sen}.\varphi}{\mathrm{sen}.\ A}\cos.\ A\pm a\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\varphi}\right)$$

ó $$s=\tfrac{1}{2}\,b\ \mathrm{sen}.A\left(\frac{a\ \mathrm{sen}.\varphi\ \cos.\ A}{\mathrm{sen}.\ A}\pm a\cos.\varphi\right)$$

incorporando el entero al quebrado y sacando a como factor comun

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.\ A\left(\frac{\mathrm{sen}\varphi\ \cos.\ A\pm\mathrm{sen}.A\ \cos.\varphi}{\mathrm{sen}.A}\right)$$

reduciendo, y sustituyendo por $\mathrm{sen}.\varphi\ \cos.A\pm\mathrm{sen}.A\ \cos.\varphi$ su valor $\mathrm{sen}.\ (\varphi\pm A)$, resulta:

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.\ (\varphi\pm A)$$

pero como por una parte se tiene:

$$\mathrm{sen}.\varphi=\frac{b\ \mathrm{sen}.A}{a}$$

y por otra $$\mathrm{sen}.B=\frac{b.\ \mathrm{sen}.A}{a}$$

se infiere que el arco auxiliar $\varphi=B$, y por tanto las fórmulas finales para determinar la área de un triángulo en este caso, serán:

$$\mathrm{sen}.B=\frac{b.\ \mathrm{sen}.A}{a}\quad\text{y}\quad s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.\ (A\pm B)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S)$$

El doble signo que contiene la expresion de la superficie, indica, como lo hemos explicado, al ocuparnos del segundo caso de la resolucion de los triángulos, que cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, puede haber dos triángulos que satisfagan el problema.

Por lo demas, en la práctica, cuando se sabe que debe tomarse el signo + de sen. $(A\pm B)$, este caso se reduce al siguiente; pues como se habrá notado, es preciso comenzar por determinar B, y entónces se conocen a, b, A, B, y por consiguiente:

$$C=180^\circ-(A+B)$$

y como el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, la segunda de las fórmulas (S), se trasforma en

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.C$$

que es la fundamental.

826.—3er Caso.—*Determinar la superficie de un triángulo en el que se conocen dos lados a, b y el ángulo C que forman.*

La resolucion de este caso, se hace por medio de la fórmula fundamental (Q) que hemos demostrado en el párrafo 822

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(Q)$$

827.—4° Caso.—*Determinar la superficie de un triángulo, dados sus tres lados a, b y c.*

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \mathrm{sen}.C$$

sustituiremos el valor de $\mathrm{sen}.C=2\ \mathrm{sen}.\tfrac{1}{2}\ C.\ \cos.\tfrac{1}{2}\ C$

y se trasforma en $$s=a\,b\ \mathrm{sen}.\tfrac{1}{2}\ C.\ \cos.\tfrac{1}{2}\ C$$

Ahora, reemplazando por $\mathrm{sen}.\tfrac{1}{2}\ C$ y por $\cos.\tfrac{1}{2}\ C$ sus valores en funcion de los tres lados, fórmulas (O) y (N) que son:

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}}\qquad\qquad \cos.\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

resulta:

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (T)$$

en la que, como se sabe, $p=\frac{1}{2}\,(a+b+c)$

La rectificacion de los cálculos para obtener la superficie de un triángulo, generalmente se hace determinando la misma superficie valiéndose de otros datos, ó se resuelve el triángulo tomando como dato la área encontrada y dos de los elementos del triángulo. (831 IV y V.)

828.—Superficie de los triángulos rectángulos.—Siendo los triángulos rectángulos un caso particular de los oblicuángulos, para determinar su superficie, bastará emplear las fórmulas anteriores, haciendo en ellas las modificaciones consiguientes á que uno de los ángulos valga 90°; pero es más sencillo el procedimiento, fundándose en que si se considera uno de los catetos b como base, el otro c será la altura del triángulo; y por tanto, la superficie de un triángulo rectángulo estará expresada por

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c$$

Ahora bien, como (804) $\quad b=a\ \text{sen.}B=a\cos.C=c\ \text{tang.}B=c\cot.C$

Sustituyendo por b sus diversos valores, se tendrá:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c=\tfrac{1}{2}\,a\,c.\ \text{sen.}B=\tfrac{1}{2}\,a\,c.\ \cos.C=\tfrac{1}{2}\,c^2\ \text{tang.}B=\tfrac{1}{2}\,c^2\cot.C\ \ldots\ (U)$$

debiendo hacerse uso de una de estas cinco expresiones segun sean los datos que se tengan para calcular la superficie.

829.—Superficie de un triángulo equilátero.—Cuando se trata de un triángulo equilátero, se tiene al mismo tiempo:

$$a=b=c\qquad y\qquad A=B=C.$$

Ademas, el valor de cada ángulo es de 60°.

Con éstas condiciones, como en los tres primeros casos, forman parte de los datos un lado y algun ángulo, los tres se reducen á uno solo que es, *dado un lado y el ángulo de un triángulo equilátero, determinar su superficie.*

La fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen.}C$$

se trasforma en $\qquad s=\frac{1}{2}\,a^2\ \text{sen.}A\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (V)$

y será la que nos servirá para resolver los tres primeros casos.

Para cuando se nos dan los tres lados, tendremos, que $p=\frac{1}{2}\,(a+b+c)$ se trasforma en

$$p=\tfrac{3}{2}\,a,\quad y\quad p-a=p-b=p-c=\frac{3a}{2}-a=\frac{a}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (T)

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

se tiene: $\qquad s=\sqrt{\dfrac{3a}{2}\times\dfrac{a^3}{2^3}}=\sqrt{\dfrac{3a^4}{16}}$

ó $\qquad s=\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (X)$

que será la fórmula correspondiente al caso en que se nos dé uno de los lados a de un triángulo equilátero.

Por lo demas, las fórmulas (V) y (X), son idénticas. En efecto, siendo el triángulo equilátero, $A=60°$ y $\text{sen.}A=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la expresion (V), resulta:

$$s=\tfrac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}$$

como en la fórmula (X).

830.—Reasumiremos las diversas expresiones de la área de un triángulo en la siguiente

Tabla de las fórmulas de la superficie de un triángulo.

1° Dados A, C y b	$s=\frac{1}{2}\,b^2\dfrac{\text{sen }A.\ \text{sen }C}{\text{sen }(A+C)}$	(R)
2° —,,—a, b y A	$\text{sen }B=\dfrac{b\ \text{sen }A}{a}$; y $s=\frac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen }(A\pm B)$	(S)
3° —,,—a, b y C	$s=\frac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen }C$	(Q)
4° —,,—a, b y c	$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$	(T)