$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}} \qquad \cos.\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

resulta:

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(T)$$

en la que, como se sabe, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

La rectificacion de los cálculos para obtener la superficie de un triángulo, generalmente se hace determinando la misma superficie valiéndose de otros datos, ó se resuelve el triángulo tomando como dato la área encontrada y dos de los elementos del triángulo. (831 IV y V.)

828.—Superficie de los triángulos rectángulos.—Siendo los triángulos rectángulos un caso particular de los oblicuángulos, para determinar su superficie, bastará emplear las fórmulas anteriores, haciendo en ellas las modificaciones consiguientes á que uno de los ángulos valga 90°; pero es más sencillo el procedimiento, fundándose en que si se considera uno de los catetos *b* como base, el otro *c* será la altura del triángulo; y por tanto, la superficie de un triángulo rectángulo estará expresada por

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c$$

Ahora bien, como (804) $\quad b=a\,\text{sen.}B=a\cos.C=c\,\text{tang.}B=c\cot.C$

Sustituyendo por *b* sus diversos valores, se tendrá:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c=\tfrac{1}{2}\,a\,c.\,\text{sen.}B=\tfrac{1}{2}\,a\,c.\cos.C=\tfrac{1}{2}\,c^2\,\text{tang.}B=\tfrac{1}{2}\,c^2\cot.C\ldots\ldots(U)$$

debiendo hacerse uso de una de estas cinco expresiones segun sean los datos que se tengan para calcular la superficie.

829.—Superficie de un triángulo equilátero.—Cuando se trata de un triángulo equilátero, se tiene al mismo tiempo:

$$a=b=c \quad \text{y} \quad A=B=C.$$

Ademas, el valor de cada ángulo es de 60°.

Con éstas condiciones, como en los tres primeros casos, forman parte de los datos un lado y algun ángulo, los tres se reducen á uno solo que es, *dado un lado y el ángulo de un triángulo equilátero, determinar su superficie.*

La fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen.}C$$

se trasforma en $\quad s=\frac{1}{2}\,a^2\,\text{sen.}A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(V)$

y será la que nos servirá para resolver los tres primeros casos.

Para cuando se nos dan los tres lados, tendremos, que $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ se trasforma en

$$p=\tfrac{3}{2}\,a, \quad \text{y} \quad p-a=p-b=p-c=\frac{3a}{2}-a=\frac{a}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (T)

$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

se tiene: $\quad s=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a^3}{2^3}}=\sqrt{\frac{3a^4}{16}}$

ó $\quad s=\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(X)$

que será la fórmula correspondiente al caso en que se nos dé uno de los lados *a* de un triángulo equilátero.

Por lo demas, las fórmulas (V) y (X), son idénticas. En efecto, siendo el triángulo equilátero, $A=60°$ y $\text{sen.}A=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la expresion (V), resulta:

$$s=\tfrac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}$$

como en la fórmula (X).

830.—Reasumiremos las diversas expresiones de la área de un triángulo en la siguiente

Tabla de las fórmulas de la superficie de un triángulo.

1° Dados A, C y b	$s=\frac{1}{2}\,b^2\,\frac{\text{sen }A.\ \text{sen }C}{\text{sen }(A+C)}$	(R)
2° —,,—a, b y A	$\text{sen }B=\frac{b\ \text{sen }A}{a}$; y $s=\frac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen }(A\pm B)$	(S)
3° —,,—a, b y C	$s=\frac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen }C$	(Q)
4° —,,—a, b y c	$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$	(T)

Para un triángulo rectángulo:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b\,c=\tfrac{1}{2}\,a\,c\,\text{sen}\,B=\tfrac{1}{2}\,a\,c\cos C=\tfrac{1}{2}\,c^2\,\text{tang}\,B=\tfrac{1}{2}\,c^2\cot C \;\ldots(U)$$

Para un triángulo equilátero:

si se da a $$s=\tfrac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{sen}.60^\circ\,..\,(X)$$

831.—PROBLEMAS.—I.—*Determinar la superficie de un triángulo en el que se conocen dos ángulos y un lado, cuyos valores son:*

A= 9°— 7'—13"'6
C=87°—14 —19 '3 $\qquad$ $b=\overset{m}{198}$'57

A+C=96°—21 —32 '9

La fórmula correspondiente á este caso, es: (R)

$$s=\tfrac{1}{2}\,b^2\,\frac{\text{sen}\,A.\ \text{sen}\,C}{\text{sen}\,(A+C)}$$

Por ser A+C=96°—21'—32"'9, sen.(A+C)=cos. 6°—21'—32"'9

log b	=2'297 9136	
log b	=2'297 9136	
log sen A	=9·200 0577	
log sen C	=9·999 4954	=23·795 3803
log sen(A+C)	=9·997 3196	
log 2	=0'301 0300	—10·298 3496
log s	=	(1)3'497 0307 que da $s=\overset{m.\,c.\,d}{3140}$'73

II.—*Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, determinar su superficie.*

Sean: $a=\overset{m}{984}$'78, $b=\overset{m}{1049}$'54 y C=49°—18'—15"'7

La fórmula correspondiente á este caso, es:

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen}\,C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(Q)$$

log a	=2'993 3392
log b	=3'020 9990
log sen C	=9'879 7746
	(1)5'894 1128
Ménos log 2	=0'301 0300
log s	=5'593 0828 lo que da $s=\overset{m.\,c\,d}{391}$ 816'58

III.—*Dados los tres lados de un triángulo, determinar su superficie.*

Sean: $a=\overset{m}{57}$'394, b=49'875 y c=63'943

La fórmula correspondiente, es: $s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ (T)

$a=\overset{m}{57}$'394			
b = 49'875	p=85'606	p=85'606	p=85'606
c = 63'943	a=57'394	b=49'875	c=63'943
2 p =171'212	p—a =28'212	p—b=35'731	p—c=21'663
p= 85'606			

log p	= 1'932 5042
log (p—a)	= 1'450 4339
log (p—b)	= 1'553 0452
log (p—c)	= 1'335 7186
Tomando ½ de	6'271 7019
log s	= 3'135 8509 que da $s=\overset{m.\,c\,d}{1367}$'26

IV.—*Resolver un triángulo conociendo su superficie* s, *un lado* a *y un ángulo* C.

De la fórmula: $$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\,\text{sen}\,C$$

despejaremos á *b* que es desconocido

$$b=\frac{2\,s}{a\,\text{sen}\,C}$$

y una vez conocidos a, b y C, el problema se trasforma en resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo que forman, que lo hemos explicado ya (812) al tratar del 3er caso.

V.—*Resolver un triángulo conociendo su superficie s y dos de sus ángulos* A y B.

El 3er ángulo se calculará fácilmente por medio de la expresion:

$$C=180^\circ-(A+B)$$

La fórmula (R) da:

$$s=\tfrac{1}{2}\,b^2\,\frac{\text{sen}\,A\ \text{sen}\,C}{\text{sen}\,(A+C)}$$

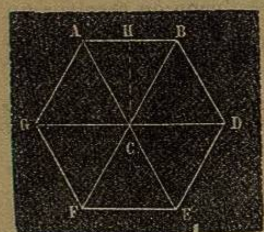
despejando á $$b=\sqrt{\frac{2\,s.\ \text{sen}\,(A+C)}{\text{sen}\,A.\ \text{sen}\,C}}$$

los otros dos lados se calcularán por fórmulas análogas

$$a = \sqrt{\frac{2\ s.\ \text{sen}\ (B+C)}{\text{sen}\ B.\ \text{sen}\ C}} \qquad y \qquad c = \sqrt{\frac{2\ s.\ \text{sen}\ (A+B)}{\text{sen}\ A.\ \text{sen}\ B}}$$

832—Poligonometría.—Hemos dejado indicado (723) que pudiendo descomponerse un polígono cualquiera en triángulos, los problemas de poligonometría se reducen á los de trigonometría. Basta, en efecto, concebir que desde el vértice de un polígono se tiran diagonales á todos los otros, para comprender que los elementos del polígono, lados, ángulos, diagonales y superficie, pueden sucesivamente irse determinando cuando se conocen los datos necesarios para determinar los de los triángulos de que está compuesto el polígono. En la práctica generalmente lo que se hace es, medir un lado de un triángulo y todos los ángulos de los triángulos que forman el polígono, y en seguida se calculan los elementos desconocidos por medio de las fórmulas que hemos establecido al tratar de los casos de los triángulos oblicuángulos. Aun cuando por este procedimiento general pueden resolverse todas las cuestiones de poligonometría, terminaremos el estudio de la trigonometría considerando algunos casos particulares de los polígonos.

833.—Polígonos regulares.—Cuando el polígono que se considera es regular, es preciso conocer la longitud l de uno de sus lados y el número de ángulos de que consta. En geometría hemos explicado (465) cómo puede determinarse el valor de cada uno de los ángulos del polígono regular, por lo cual no nos ocuparemos ahora sino del cálculo de su superficie.



(Fig. 382).

La área del polígono regular A B D E...... (fig. 382), cuyo número de lados supondremos que sea n, será igual á tantas veces el triángulo A C B como lados tiene. Esto es,

$$s = n.\ A\ C\ B$$

Llamando l el lado A B del polígono, y C el ángulo A C B, en el centro del polígono tendremos:

$$\text{sup. triángulo } A\ C\ B = \tfrac{1}{2}\ l \times H\ C$$

En el triángulo rectángulo A C H

$$C\ H = A\ H \times \text{tang. } C\ A\ H = \tfrac{1}{2}\ l.\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\ C$$

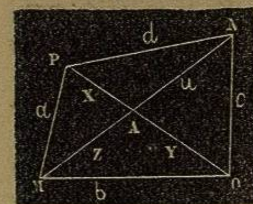
luego, triángulo $A\ C\ B = \tfrac{1}{4}\ l^2\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\ C$

$$s = \tfrac{1}{4}\, n\ l^2\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\ C$$

pero como el ángulo C en el centro de un polígono regular es igual á $\frac{360°}{n}$, se tiene finalmente:

$$s = \tfrac{1}{4}\ n\ l^2\ \text{cot.} \left[\frac{180°}{n}\right]$$

834.—Cuadrilátero.—Consideraremos varios casos para determinar la superficie de un cuadrilátero.



(Fig. 383).

1° *Dados los cuatro lados a, b, c y d y los ángulos* M y N (fig. 383), *que forman los dos primeros y los dos últimos.*

Si tiramos la diagonal P O, la superficie del cuadrilátero será igual á la suma de las áreas de los triángulos P O M y P O N, pero (822–Q).

$$P\ O\ M = \tfrac{1}{2}\ a\ b\ \text{sen.} M$$

y

$$P\ O\ N = \tfrac{1}{2}\ c\ d\ \text{sen.} N$$

luego llamando s la superficie del cuadrilátero

$$s = \tfrac{1}{2}\ a\ b\ \text{sen.} M + \tfrac{1}{2}\ c\ d\ \text{sen.} N$$

2° *Dadas las dos diagonales* (fig. 383) P O=D, M N=D' *y el ángulo que forman* P A N=A, *determinar la superficie.*

La superficie del cuadrilátero es igual á la suma de las superficies de los cuatro triángulos P A N, N A O, O A M y M A P. Llamando x é y los segmentos P A y A O de la diagonal P O, y z y u los de la M N, conforme á la fórmula (Q), representando por s la superficie del cuadrilátero, y recordando que los ángulos opuestos al vértice son iguales, y que el seno de un ángulo P A N es igual al de su suplemento N A O, se tiene:

$$s = \tfrac{1}{2}\ x.\ u.\ \text{sen.} A + \tfrac{1}{2}\ u\ y.\ \text{sen.} A + \tfrac{1}{2}\ y\ z\ \text{sen.} A + \tfrac{1}{2}\ z\ x\ \text{sen.}\ A$$

sacando como factor comun á $\frac{1}{2}$ sen. A, así como á x y á y

$$s = \tfrac{1}{2}\ \text{sen.} A\ [x(u+z) + y\ (u+z)]$$

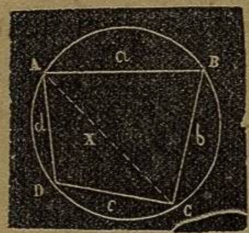
ó

$$s = \tfrac{1}{2}\ \text{sen.} A\ (u+z)\ (x+y)$$

y sustituyendo por (u+z) y por (x+y), D' y D, resulta:

$$s=\tfrac{1}{2}\,D.\,D'\,\text{sen}.A$$

3° *Dados los lados de un cuadrilátero inscriptible á un círculo, determinar el valor de sus ángulos y su superficie.*



(Fig. 384)

En razon de poderse inscribir el cuadrilátero A B C D (fig. 384) á un círculo, los ángulos opuestos (494) serán suplementarios, y por tanto sus senos serán iguales y del mismo signo, y sus cosenos iguales, pero de signo contrario.

Tiremos la diagonal A C y representemos los lados A B, B C, C D, D A por *a*, *b*, *c* y *d*, la diagonal A C por *x*, y la área del cuadrilátero por *s*.

Conforme á la ecuacion (G) núm. 808, en los triángulos A B C y A C D se tiene:

$$x^2=a^2+b^2-2\,a\,b\,\cos.B$$
$$x^2=c^2+d^2+2\,c\,d\,\cos.B,\ \text{porque}\ \cos.D=-\cos.B$$

igualando estos dos valores y despejando á cos.B, tendremos:

$$\cos.B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,a\,b+2\,c\,d}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Esta fórmula no es calculable por logaritmos, pero puede deducirse de ella una que lo sea. En efecto, se tiene:

$$\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,B=\frac{1-\cos.B}{2},\quad y\quad \cos^2\tfrac{1}{2}\,B=\frac{1+\cos.B}{2}$$

sustituyendo en estas expresiones el valor de cos.B, se tendrá:

$$\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,B=\frac{1-\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,a\,b+2\,c\,d}}{2}=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4\,(a\,b+c\,d)}$$

$$\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,B=\frac{(b+c+d-a)\ (a+c+d-b)}{4\,(a\,b+c\,d)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\,B=\frac{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,a\,b+2\,c\,d}}{2}=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4\,(a\,b+c\,d)}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\,B=\frac{(a+b+d-c)\ (a+b+c-d)}{4\,(a\,b+c\,d)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Hagamos el perímetro del cuadrilátero:

$$a+b+c+d=2\,p$$

y restemos sucesivamente de los dos miembros de esta ecuacion 2 a, 2 b, 2 c y 2 d:

$$b+c+d-a=2\,(p-a),\ a+c+d-b=2\,(p-b),\ a+b+d-c=2\,(p-c)$$
$$a+b+c-d=2\,(p-d).$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2) y (3), reduciendo y extrayendo raíz, se obtiene:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{a\,b+c\,d}}\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-c)\ (p-d)}{a\,b+c\,d}}\ \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Dividiendo la fórmula [4] por la [5], se obtiene:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{(p-c)\ (p-d)}}\ \ldots\ldots\ldots\ (6)$$

que es fórmula adaptable al uso de los logaritmos, y por medio de la cual se calculará el valor del ángulo B. Por un procedimiento idéntico, se obtendrá para A:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-d)}{(p-b)\ (p-c)}}$$

En cuanto á los otros ángulos; C es suplemento de A, y D lo es de B.

Para determinar la superficie del cuadrilátero, lo consideraremos dividido en dos triángulos por la diagonal A C, y se tiene:

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,b\ \text{sen}\ B+\tfrac{1}{2}\,c\,d\ \text{sen}\ D$$
$$s=\tfrac{1}{2}(a\,b+c\,d)\ \text{sen}\ B\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

como por otra parte (34) $\text{sen}\ B=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\,B\ \cos.\tfrac{1}{2}\,B$
multiplicando las ecuaciones (4) y (5), y tomando el doble, se tiene:

$$\text{sen}\ B=\frac{2\ \sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}}{a\,b+c\,d}$$

sustituyendo este valor en la expresion (7) y reduciendo, resulta finalmente:

$$s=\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}$$

siendo $p=\frac{1}{2}\ (a+b+c+d)$

835.—TRAPECIO.—*Vamos á determinar la superficie de un trapecio conociendo la magnitud de sus cuatro lados.*

En la fig. 385 supondremos que las bases paralelas son los lados a y b. Tirando la recta M N paralela al lado c, nos resultará un triángulo cuya superficie llamaremos s' y que tiene la misma altura h que el trapecio. Representaremos el perímetro del trapecio por

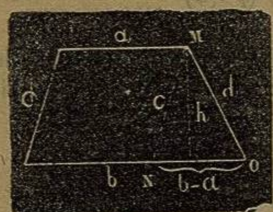
$$2\ p=a+b+c+d$$

y su superficie por S. El perímetro del triángulo M N O lo haremos igual á 2 p'. Esto supuesto:

sup. del trapecio $S=\frac{a+b}{2}h$

sup. del triángulo $s'=\frac{b-a}{2}h$

despejando á $h=\frac{2\ s'}{b-a}$



(Fig. 385).

sustituyendo en la primera ecuacion, se tiene:

$$S=\frac{a+b}{b-a}s' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

La área del triángulo M N O en funcion de sus tres lados (fórmula T) es:

$$s'=\sqrt{p'\ (p'-b+a)\ (p'-c)\ (p'-d)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por otra parte $2\ p=a+b+c+d$

$2\ p'=b-a+c+d$

restando la última ecuacion de la que le antecede

$$2\ p-2\ p'=2\ a$$

de donde $p'=p-a$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

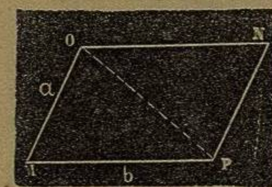
$$s'=\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-a-c)\ (p-a-d)}$$

Reemplazando este valor en la ecuacion (1), resulta finalmente:

$$S=\frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-a-c)\ (p-a-d)} \ldots\ (3)$$

siendo $p=\frac{1}{2}\ (a+b+c+d)$

836.—PARALELÓGRAMO.—*Dados dos lados* a *y* b *de un paralelógramo y el ángulo* M *que forman, determinar su superficie.*



[Fig 386.]

Si tiramos la diagonal O P, (fig. 386) quedará dividido el paralelógramo en dos triángulos iguales, en los que, por ser la figura paralelógramo, el ángulo M=N así como los lados opuestos. En consecuencia, la superficie del paralelógramo será igual á la suma de la de los triángulos que lo forman

$$s=\tfrac{1}{2}\ a\ b\ \text{sen}\ M+\tfrac{1}{2}\ a\ b\ \text{sen}.M$$

ó $s=a\ b\ \text{sen}\ M$

que es la expresion que buscábamos.

FIN.