H BOS

GEOMETRIA ELEMENTAL

LIBRERIA HACHETTE Y Cia
PARIS

GEOMETRÍA

ELEMENTAL

Edgar

12940. — IMPRENTA A. LAHURE
Calle de Fleurus, 9, Paris

GEOMETRÍA
ELEMENTAL

POR

H. BOS
Antiguo alumno de la Escuela normal superior
Antiguo profesor de matemáticas en el liceo S. Luis en Paris
Inspector de la Academia de Paris

PARIS
LIBRERÍA HACHETTE Y C^ia
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1886

GEOMETRIA

ELEMENTAL

NOCIONES PRELIMINARES

§ I. Línea recta y plano. — Línea quebrada. — Línea curva.

1. Se llama *volúmen* de un cuerpo el lugar que este ocupa en el espacio; y *superficie* del mismo cuerpo el límite que lo separa del resto del espacio.

Línea es el lugar en que dos superficies se cortan, ó tambien el límite de una porcion de superficie.

Punto es el extremo de una porcion de línea ó la interseccion de dos líneas.

2. *La línea recta* es la mas sencilla de todas: su nocion es familiar á todos y podemos representárnosla mediante un hilo estendido. Se admite como evidente que por dos puntos no puede pasar mas que una recta, y que la línea recta que los une es el camino mas corto entre ambos.

Fig. 1.

3. *Línea quebrada* se llama á la que está compuesta de varias rectas, como la ABCD (fig. 1).

4. *Línea curva* se llama á la que no es ni recta ni compuesta de rectas, como la AB (fig. 2).

Fig. 2.

5. Se llama *plano* ó *superficie plana* la que es de tal naturaleza, que juntando mediante una recta dos puntos cualesquiera de ella, la recta coincide en toda su estension con dicha superficie, como v. g. sucederia aplicando una regla sobre un cristal pulimentado.

Se llama *superficie curva* á la que ni es plana ni compuesta de superficies planas.

6. Todo conjunto de puntos, líneas ó superficies se denomina *figura geométrica*; y esta se llama *plana* si toda ella está situada sobre un mismo plano

7. La GEOMETRÍA tiene por objeto estudiar las propiedades de las figuras y medir la estension de estas.

Suele dividirse en *geometría plana* ó estudio de las figuras planas; y *geometría del espacio* que tiene por objeto estudiar las figuras que no son planas.

8. Dos figuras se llaman iguales cuando pueden aplicarse la una sobre la otra ó *superponerse*, de manera que coincidan en todas sus partes.

9. Una verdad que se trata de demostrar es lo que se llama un *teorema*. El enunciado de esta verdad se compone de dos partes: de una *hipótesis* como premisas y de la *conclusion* que de las premisas se deduce mediante la demostracion. Dos teoremas se llaman *recíprocos* cuando la hipótesis del uno es conclusion del otro y recíprocamente.

Se llama *corolario* á una consecuencia de un teorema; *lema* la proposicion preliminar que facilita la demostracion de un teorema; y *problema*, á la cuestion que está por resolver.

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA

§. II. Ángulo. — Generacion de los ángulos mediante la rotacion de una recta alrededor de uno de sus extremos. — Ángulo recto.

10. Se llama *ángulo* la figura formada por dos rectas AB, AC que parten de un mismo punto A, siguiendo direcciones diversas (fig. 3). El punto del cual parten las rectas se llama *vértice* del ángulo, y las rectas, *lados* del mismo. El ángulo se lee con las tres letras BAC, colocando en medio la del vértice, ó con la letra del vértice solamente, diciendo el ángulo A.

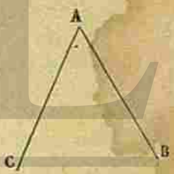

Fig. 3.

11. Dos ángulos BAC, CAD se llaman adyacentes cuando tienen un mismo vértice, un lado comun y están situados uno á un lado y otro á otro del lado comun (fig. 4).

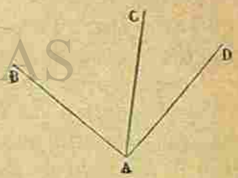

Fig 4

12. Se suman dos ángulos, colocándolos uno al lado del otro en términos que sean adyacentes: así el ángulo BAD es la suma de los BAC y CAD.

4. *Línea curva* se llama á la que no es ni recta ni compuesta de rectas, como la AB (fig. 2).

Fig. 2.

5. Se llama *plano* ó *superficie plana* la que es de tal naturaleza, que juntando mediante una recta dos puntos cualesquiera de ella, la recta coincide en toda su estension con dicha superficie, como v. g. sucederia aplicando una regla sobre un cristal pulimentado.

Se llama *superficie curva* á la que ni es plana ni compuesta de superficies planas.

6. Todo conjunto de puntos, líneas ó superficies se denomina *figura geométrica*; y esta se llama *plana* si toda ella está situada sobre un mismo plano

7. La GEOMETRÍA tiene por objeto estudiar las propiedades de las figuras y medir la estension de estas.

Suele dividirse en *geometría plana* ó estudio de las figuras planas; y *geometría del espacio* que tiene por objeto estudiar las figuras que no son planas.

8. Dos figuras se llaman iguales cuando pueden aplicarse la una sobre la otra ó *superponerse*, de manera que coincidan en todas sus partes.

9. Una verdad que se trata de demostrar es lo que se llama un *teorema*. El enunciado de esta verdad se compone de dos partes: de una *hipótesis* como premisas y de la *conclusion* que de las premisas se deduce mediante la demostracion. Dos teoremas se llaman *recíprocos* cuando la hipótesis del uno es conclusion del otro y recíprocamente.

Se llama *corolario* á una consecuencia de un teorema; *lema* la proposicion preliminar que facilita la demostracion de un teorema; y *problema*, á la cuestion que está por resolver.

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA

§. II. Ángulo. — Generacion de los ángulos mediante la rotacion de una recta alrededor de uno de sus extremos. — Ángulo recto.

10. Se llama *ángulo* la figura formada por dos rectas AB, AC que parten de un mismo punto A, siguiendo direcciones diversas (fig. 3). El punto del cual parten las rectas se llama *vértice* del ángulo, y las rectas, *lados* del mismo. El ángulo se lee con las tres letras BAC, colocando en medio la del vértice, ó con la letra del vértice solamente, diciendo el ángulo A.

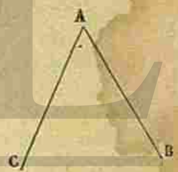

Fig. 3.

11. Dos ángulos BAC, CAD se llaman adyacentes cuando tienen un mismo vértice, un lado comun y están situados uno á un lado y otro á otro del lado comun (fig. 4).

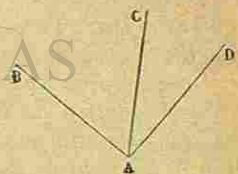

Fig 4

12. Se suman dos ángulos, colocándolos uno al lado del otro en términos que sean adyacentes: así el ángulo BAD es la suma de los BAC y CAD.

Un ángulo es doble, triple, cuadruplo, etc., de otro cualquiera, cuando representa la suma de 2, 3, 4, etc., ángulos iguales á este.

Fig. 5.

13. Podemos imaginarnos que todo ángulo se ha engendrado por el movimiento de una recta móvil que aplicada al principio sobre otra recta fija AB (fig. 5), se separa girando sobre el punto A, en cuyo caso el ángulo CAB formado por la recta móvil y la fija irá aumentado á medida que la móvil se separe más y más de la fija.

14. Cuando una recta CD encuentra á otra AB (fig. 6) y forma con ella dos ángulos adyacentes *iguales* ACD, BCD, se dice que la recta CD es *perpendicular* á AB, y los dos ángulos adyacentes iguales ACD, BCD, se llamen *ángulos rectos*.

Fig. 6.

Una recta que encuentra á otra y no le es perpendicular, es *oblicua* con relacion á la línea encontrada.

15. Dos ángulos son *opuestos por el vértice* cuando los lados del uno son prolongaciones de los del otro.

16. *Bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes ó ángulos iguales.

17. Teorema. *Por un punto* O *tomado sobre una recta* AB *puede siempre trazarse una perpendicular á dicha recta, y no se puede trazar más que una* (fig. 7).

Supongamos en efecto que una recta móvil OC aplicada al principio sobre OB gira alrededor del punto O en el sentido de la flecha, y resultará que el ángulo BOC crecerá contínuamente desde cero á una cantidad muy grande, y que el ángulo adyacente COA muy grande al principio, decrecerá contínuamente hasta cero.

La recta móvil OC llegará á tener una posicion OD en que los dos ángulos antes mencionados serán iguales, y la recta OD será perpendicular á AB.

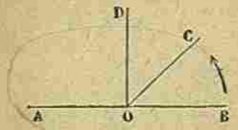

Fig. 7.

Si la recta OD se separa de su posicion, uno de los ángulos que forma con AB aumentará y el otro disminuirá, dejarán de ser iguales, y por consiguiente OD será la única perpendicular que pueda desde el punto O trazarse á la línea AB, que era cabalmente lo que se deseaba demostrar.

18. Corolario. *Todos los ángulos rectos son iguales* (fig. 8).

Llévese el ángulo recto DEF sobre el recto ABC de manera que el lado EF quede aplicado sobre BC y el punto E sobre el B, y resultará que la línea ED perpendicular á EF coincidirá con BA perpendicular á BC en virtud del teorema precedente, y por consiguiente los dos ángulos rectos ABC, DEF son iguales (8)[1].

Fig. 8.

19. Se llama ángulo *agudo ú obtuso* al que es menor ó mayor, respectivamente, que un ángulo recto.

20. Dos ángulos son *suplementarios* cuando la suma de ellos es igual á dos rectos; y *complementarios*, cuando es igual á un recto.

21. Teorema. *Toda línea recta* CD *que encuentra á otra* AB, *forma con ella dos ángulos adyacentes suplementarios* (fig. 9).

Con efecto: en el punto C levantamos la línea CE perpendicular á AC; y tendremos:

1. Los números entre paréntesis son una llamada á los de la obra.

$$ACD = ACE + ECD,$$
$$BCD = BCE - ECD.$$


Fig. 9.

Si se suman los miembros de estas dos igualdades, el ángulo ECD desaparece y resultará :

$$ACD + BCD = ACE + BCE$$
$$= 2 \text{ rectos}[1]. \text{ Q. E. L. D.}[2]$$

22. Corolario I. *La suma de los ángulos consecutivos* ACD, DCE etc., *formados alrededor de un punto* C *y de un mismo lado de una recta* AB, *es igual á dos rectos* (fig. 10).


Fig. 10.

Porque en efecto :

$$ACD + DCE + ECF + FCB$$
$$= ACD + DCB = 2 \text{ rectos}.$$

23. Corolario II. *La suma de los ángulos* AOB, BOC, etc. *formados alrededor del punto* O, *y cubriendo todo el plano, es igual á cuatro rectos* (fig. 11).

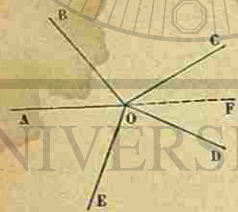
Fig. 11.

Si se prolonga la recta AO resultará :

$$AOB + BOC + COD + DOE + EOA$$
$$= AOB + BOC + COF$$
$$+ FOD + DOE + EOA = 2 \text{ rectos}$$
$$+ 2 \text{ rectos} = 4 \text{ rectos}.$$

24. Teorema. *Si dos ángulos adyacentes* ACD, BCD *son suplementarios, sus lados exteriores* AC, CB *son una misma recta* (fig. 12).

1. Para abreviar, diremos *un recto*, por *un ángulo recto; una recta*, por *una linea recta*.
2. Las letras Q. E. L. D. son iniciales de : Que-era-lo-demostrable.

Efectivamente : si se prolonga la línea AC más allá del punto C, la prolongacion formaría con DC un ángulo suplementario de ACD (**21**); este ángulo seria, pues, igual á BCD, y por tanto la prolongacion de AC coincide con CB. Q. E. L. D.

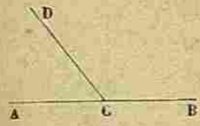
Fig. 12.

Observacion. El teorema anterior es el recíproco del que se demostró en el n.º **21**.

25. Teorema. *Dos ángulos* AOD, BOC *opuestos por el vértice son iguales* (fig. 13).

Los ángulos AOD, AOC son suplementarios (**21**), y lo mismo sucede á los ángulos BOC, AOC; y por tanto los dos ángulos AOD, BOC que tiene el mismo suplemento, son iguales. Q. E. L. E.


Fig. 13.

26. Corolario I. *Si dos líneas indefinidas se cortan y forman un ángulo recto, los otros tres son tambien rectos* (fig. 14).

Con efecto : si el ángulo AOC, por ejemp., es recto, el ángulo opuesto por el vértice BOD que le es igual, será recto, y lo mismo ocurre respecto de los ángulos AOD y BOC que son los suplementarios de los anteriores.

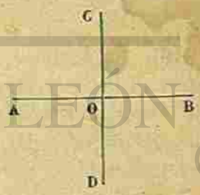
Fig. 14.

De lo dicho se deduce con toda evidencia que : *si una recta es perpendicular á otra, recíprocamente, esta lo será á la primera.*

27. Corolario II. *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes* AOC, COB *formados por dos rectas que se cortan son perpendiculares, y las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son la una prolongacion de la otra* (fig. 15).

Siendo, en efecto, OE y OF las bisectrices de dos ángulos adyacentes AOC y COB; y puesto que la suma de estos dos ángulos es igual á dos rectos (**21**), es evidente que la suma de sus mitades EOC y COF es igual á un recto, que es tanto como decir que OF es perpendicular á OE.

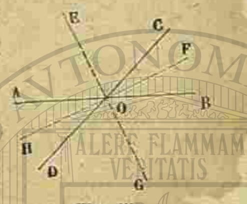

Fig. 15.

Sea OG la prolongacion de OE, y tendrémos que los ángulos BOG y DOG son respectivamente iguales á los ángulos AOE y COE (**25**) : estos dos últimos son iguales entre sí, y por tanto BOG = DOG, lo que equivale á decir que OG es la bisectriz del ángulo BOD, y de todo lo cual resulta que las bisectrices de dos ángulos AOC, BOD opuestos por el vértice son prolongacion la una de la otra. Lo mismo sucede á las bisectrices de los ángulos BOC y AOD.

Resulta de lo anterior *que las bisectrices de los cuatro ángulos formados por dos rectas indefinidas que se cortan,* AB *y* CD *son dos rectas indefinidas* EG *y* FH *perpendiculares una á otra.*

§ III. Triángulos. — Casos más sencillos de igualdad. — Propiedades del triángulo isósceles. — Casos de igualdad del triángulo rectángulo.

28. Se llama *triángulo* á la porcion de plano cerrado por tres líneas rectas que se cortan dos á dos. Las rectas son los *lados* del triángulo; los tres ángulos que forman se llaman *ángulos* del triángulo, y los vértices de estos, *vértices* del triángulo.

Un triángulo es *isósceles* cuando tiene dos lados iguales; *equilátero* cuando tiene los tres iguales; y *equiángulo* cuando los tres ángulos son iguales.

En un triángulo isósceles se denomina especialmente *vértice* el punto en que se cortan los dos lados iguales; y al lado opuesto se llama *base*.

Un triángulo se llama *rectángulo* cuando tiene un ángulo recto : el lado opuesto á este se denomina *hipotenusa*.

29. Teorema. *En un triángulo* ABC *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia* (fig. 16).

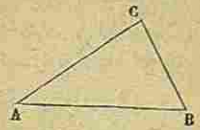

Fig. 16.

1.° La línea recta BC es el camino mas corto entre B y C y de aquí que :

$$BC < AB + AC$$

2.° En virtud de lo demostrado en la primera parte del teorema, tendrémos :

$$BC + AC > AB$$

y de aquí, restando de ambos miembros de la desigualdad la cantidad AC, que :

$$BC > AB - AC. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

30. Corolario. *Si el punto* O *interior en un triángulo se une con dos vértices* B *y* C, *la suma de las dos rectas* OB, OC *es menor que la de los lados* AB *y* AC (fig. 17).

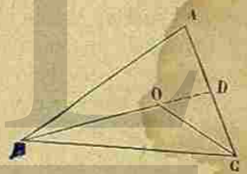

Fig. 17.

En efecto : prolongando BO hasta encontrar el lado AC en D tendremos en razon del teorema precedente que

$$BO + OD < AB + AD$$
$$OC < OD + DC$$

y sumando miembro á miembro las dos desigualdades anteriores que :

$$OB + OD + OC < AB + AD + OD + DC.$$

Si ahora notamos que OD se halla en los dos miembros y por tanto que podrá suprimirse sin alterar la desigualdad, y que AD + DC es igual á AC, resultará :

$$OB + OC < AB + AC. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

31. Teorema. *Dos triángulos que tienen un lado igual é iguales respectivamente los ángulos formados en cada extremo de dicho lado igual, son iguales.*

Sean los dos triángulos ABC, DEF (fig. 18), que tienen:

$$AB = DE; \quad \text{el ángulo } A = D; \quad \text{el ángulo } B = E.$$

Si se lleva el triángulo DEF, sobre el ABC de modo que DE coincida con su igual AB, cayendo el punto D sobre el B; siendo el ángulo D igual al ángulo A, el lado DF tomará la direccion AC y el punto F caerá sobre uno cualquiera de AC.

Fig. 18.

De igual suerte, siendo el ángulo E igual al ángulo B, el lado EF tomará la direccion de BC y el punto F caerá sobre BC. Teniendo por otro lado que caer el punto F sobre AC y BC, tendrá que coincidir con el punto C, y por tanto, habiendo coincidido todos los elementos de ambos triángulos, estos resultan iguales. Q. E. L. D.

Observacion. Las igualdades

$$AB = DE, \quad A = D, \quad B = E,$$

llevan como consecuencia estas otras:

$$AC = DF, \quad BC = EF, \quad C = F.$$

32. Teorema. *Dos triángulos que tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados que son respectivamente iguales, son iguales.*

Sean ABC, DEF (fig. 19) dos triángulos en los cuales tenemos:

$$\text{El ángulo } C = \text{al ángulo } F; \quad CA = FD; \quad CB = FE.$$

Si llevamos el triángulo DEF sobre el ABC de modo que el lado FD coincida con su igual CA, y supuesto que el ángulo F es igual al ángulo C, el lado FE tomará la direccion del

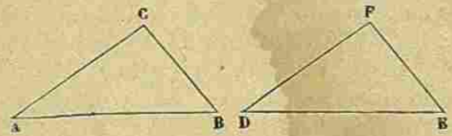

Fig. 19.

CB: el punto E caerá sobre B, por ser $FE = CB$; los lados DE y AB cuyos extremos han coincidido, coincidirán en toda su estension, y por tanto los triángulos serán iguales. Q. E. L. D.

Observacion. Las igualdades

$$C = F, \quad CA = FD, \quad CB = FE$$

dan como consecuencia

$$A = D, \quad B = E, \quad AB = DE.$$

33. Teorema. *Si dos triángulos tienen un ángulo desigual comprendido entre lados respectivamente iguales, los terceros lados son desiguales, y el opuesto al ángulo mayor será tambien el mayor.*

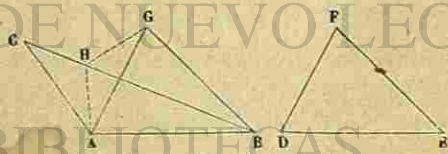

Fig. 20.

Sean ABC, DEF (fig. 20) dos triángulos en los cuales ocurre:

$$CA = FD, \quad AB = DE, \quad CAB > D.$$

Si superponemos el triángulo DEF al triángulo ABC de manera que el lado ED coincida con su igual BA, como el ángulo D es menor que el A, el lado FD caerá dentro del ángulo CAB, y el triángulo DEF ocupará la posicion ABG. Tracemos luego la bisectriz AH del ángulo GAC que corta en H el lado BC, y unimos además G con H mediante la recta GH. Los dos triángulos AGH, ACH tienen un lado comun AH; el lado AG se ha supuesto igual á AC, y el ángulo $GAH = CAH$ por construccion, luego son iguales (**32**) y de ello resulta que $CH = GH$. Además tenemos que $BG < BH + GH$ (**29**). Si ahora reemplazamos BG por su igual EF y GH por su igual CH, resultará :

$$EF < BC. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

34. Teorema. Recíprocamente, *si dos triángulos* ABC, DEF *tienen dos lados iguales respectivamente* $AB = DE$ *y* $AC = DF$ *y los terceros lados* BC *y* EF *son desiguales, los ángulos* A *y* D *opuestos respectivamente á los lados desiguales, son desiguales, y el mayor ángulo es el opuesto al mayor lado* (fig. 20).

Con efecto : los ángulos A y D no pueden ser iguales, porque si lo fueran, los triángulos ABC, DEF tendrian un ángulo igual comprendido entre lados iguales respectivamente, é iguales (**32**) tambien los terceros lados BC y EF, lo cual es contrario á la hipótesis, y por tanto hay que admitir que son desiguales. En virtud del teorema precedente, el ángulo mayor se opone al lado mayor. Q. E. L. D.

35. Teorema. *Dos triángulos que tienen los tres lados iguales respectivamente, son iguales.*

Sean ABC, DEF (fig. 19) dos triángulos en los cuales tenemos :

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BC = EF;$$

y decimos que el ángulo A es igual el ángulo D, porque si fueran desiguales lo serian los lados opuestos BC y EF (**33**), lo cual es contrario á la hipótesis, y por tanto el ángulo $A = D$ y lo mismo los dos triángulos en cuestion, en virtud del teorema n.º **32**. Q. E. L. D.

Observacion. Las igualdades

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BC = EF$$

llevan como consecuencia, las siguientes :

$$A = D, \quad B = E, \quad C = F.$$

36. Observacion general. Los teoremas de los números **31**, **32** y **35** constituyen lo que se llama los tres casos de igualdad de los triángulos, tan frecuentemente usados en geometría. Dichos teoremas muestran que si los tres elementos de un triángulo, ángulos ó lados, convenientemente elegidos, son iguales á los tres elementos correspondientes de otro triángulo cualquiera, los dos triángulos son iguales en todas sus partes; de tal suerte que la igualdad respectiva de los tres primeros elementos, lleva como consecuencia la de los tres segundos. De tales teoremas puede, pues, sacarse gran partido, cuando se trata de demostrar la igualdad de dos líneas ó de dos ángulos que pertenecen á una misma figura ó á figuras diversas.

Es esencial notar que en dos triángulos iguales los lados iguales son siempre opuestos á ángulos iguales.

37. Teorema. *En un triángulo isósceles los ángulos opuestos á los lados iguales, son iguales.*

Si el lado $AB = AC$ (fig. 21), el ángulo C es igual al ángulo B. En efecto, uniendo el vértice A del triángulo al medio D de la base BC, los triángulos ABD, ACD tienen el lado $AB = AC$ por hipótesis; BD y DC, por construccion; y AD comun, y por consiguiente son iguales (**35**) : luego los ángulos B y C opuestos al lado comun AD son iguales. Q. E. L. D.

Fig. 21.

38. Corolario I. *Todo triángulo equilátero es al mismo tiempo equiángulo.*

39. Corolario II. De la igualdad de los triángulos ABD, ACD se deduce que los ángulos ADB y ADC son iguales, así como los ángulos BAD y CAD; y por tanto: *en un triángulo isósceles la línea que une el vértice con el medio de la base es perpendicular á esta base, y divide el ángulo del vértice en dos partes iguales.*

40. Teorema. *Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á estos ángulos son iguales, y el triángulo es isósceles.*

Si el ángulo $B = C$ (fig. 22), decimos que $AC = AB$.

Para demostrarlo construyo un triángulo $A'B'C'$ igual al triángulo ABC y le llevo sobre este, volviéndole, en términos que el punto C' caiga en el punto B, y el B' sobre el punto C. El ángulo $B' = B$ por construccion; el $B = C$ por hipótesis, luego son iguales B' y C. Por esta razon el lado $B'A'$ tomará la direccion CA; por iguales razones $C'A'$ tomará la direccion de BA, y el punto A' caerá en A. Luego $B'A' = CA$ y por tanto $BA = CA$. Q. E. L. D.

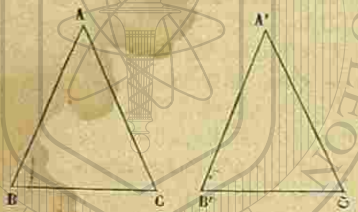

Fig. 22.

41. Corolario. *Todo triángulo equiángulo es al mismo tiempo equilátero.*

42. Teorema. *Desde un punto O fuera de una recta AB,: 1.º se puede trazar una perpendicular á dicha recta; 2.º pero no puede trazarse más de una* (fig. 23).

1.º Doblemos el plano á lo largo de AB, rebatiendo la parte superior sobre la inferior; el punto O caerá sobre O', cuyo punto, volviendo á desdoblar el plano lo unirémos con O mediante la recta OO', que será perpendicular á AB. Si en efecto se dobla de nuevo el plano, el ángulo OCD coincidirá con $O'CD$; de lo que se deduce que estos ángulos son rectos y la recta AC perpendicular á OO' (**14**), lo que es tanto como decir que la recta OO' lo es á AB. Q. E. L. D.

2.º Sea OD otra línea. Si trazamos la recta $O'D$, los dos triángulos ODC, $O'DC$ serán iguales por tener comun el lado CD; el $OC = CO'$ por construccion, y $OCD = O'CD$ como rectos. Los ángulos ODC $O'DC$ son iguales por consiguiente, pero su suma no vale dos rectos, puesto que $O'D$ no es la prolongacion de OD (**24**), de donde se infiere que ODC no es recto, y que OD es oblícua á AB. Q. E. L. D.

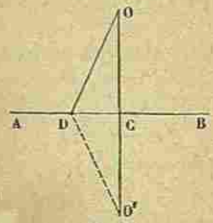

Fig. 23.

Observacion. El punto en que la perpendicular bajada desde otro punto sobre una recta corta á dicha recta, se llama *pié* de la perpendicular.

43. Teorema. *Si desde un punto O tomado fuera de una recta AB se traza una perpendicular OC y diversas oblícuas:*

1.º *La perpendicular es más corta que todas las oblícuas:*

2.º *Dos oblícuas que se alejan igualmente del pié C de la perpendicular son iguales.*

3.º *De dos oblícuas que se alejan desigualmente del pié de la perpendicular, es mayor la que se aleja más* (fig. 24).

1.º La perpendicular OC es más corta que la oblícua OD. En efecto: prolonguemos la perpendicular OC de una cantidad CO' igual á su longitud, y unamos los puntos O' y D mediante la recta $O'D$. Los dos triángulos COD, $CO'D$ tienen comun el lado CD, el lado $CO = CO'$ por construccion y el ángulo $DCO = DCO'$ por ser rectos; y por tanto (**32**) son iguales é iguales los lados OD y $O'D$. Sentado esto, es además evidente que la línea recta OO' es mas corta que la quebrada ODO',

$$OO' < OD + DO',$$

de donde se deduce, tomando la mitad de ambos miembros

$$OC < OD. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

2.º Las dos oblícuas OE, OD, igualmente separadas del pié C de la perpendicular son iguales. En efecto: los dos triángulos OCD, OCE tienen comun el lado OC, iguales los lados CD y CE por hipótesis y el ángulo $OCD = OCE$ por ser rectos, y por tanto dichos triángulos son iguales (**32**) y por ello lo son los lados OD y OE. Q. E. L. D.

Fig. 24.

3.º De dos oblícuas OE, OF desigualmente separadas del pié de la perpendicular, la oblícua OF que se separa mas, es la mayor. En efecto: tomemos sobre la recta CF una parte $CD = CE$ y unamos el punto O con D. Luego prolonguemos la perpendicular OC, tanto como ella tiene de longitud, hasta O'. Las líneas DO y DO' son oblícuas á OO' que distan igualmente del pié C de la perpendicular DC puesto que $CO = CO'$. De aquí resulta que $DO = DO'$; y por la misma razon $FO = FO'$. Ahora bien: sabemos (**30**) que

$$DO + DO' < FO + FO'$$

y por tanto, tomando la mitad de los dos miembros

$$DO < FO;$$

y como además $OD = OE$ (2.º) resulta definitivamente que

$$OE < OF. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

44. Corolario. *De un punto O á una recta AB, no se le pueden trazar mas que dos líneas iguales.*

45. Observacion. Siendo la perpendicular la línea mas corta

PAB será isósceles, la línea PC, que une el vértice P de dicho triángulo con el medio de la base, es perpendicular á ella, y por tanto el punto P está en la perpendicular DC. Q. E. L. D.

49. Observacion. Cuando hay puntos que gozan de una propiedad comun, se llama *lugar geométrico* ó simplemente *lugar* de estos puntos á la línea que los contiene todos, y cuyos puntos gozan todos de la misma propiedad.

Así, en virtud del teorema precedente, la perpendicular elevada en medio de la línea AB contiene todos los puntos equidistantes de los puntos A y B, y además todos los puntos de esta perpendicular equidistan de los puntos A y B, pudiendo por ello reunirse las dos partes de este teorema en el enunciado siguiente:

La perpendicular elevada en medio de una recta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los dos extremos de esta recta.

50. Teorema. 1.º *Todo punto tomado en la bisectriz de un ángulo está equidistante de los lados del ángulo.*

2.º *Todo punto tomado en el interior de un ángulo á igual distancia de sus dos lados pertenece á la bisectriz de dicho ángulo.*

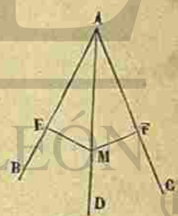

Fig. 27.

1.º Sea M un punto tomado á voluntad en la bisectriz AD del ángulo BAC (fig. 27); y decimos que este punto M está igualmente distante de los dos lados AB y AC.

En efecto: la distancia del punto M al lado AB es la longitud de la perpendicular ME bajada desde el punto M á la recta AB (**45**); y de igual manera la distancia del punto M al lado AC se aprecia por la perpendicular MF tirada tambien desde el punto M sobre AC. Probando ahora que $ME = MF$ quedará demostrado el teorema y para ello decimos que los dos triángulos rectángulos AME, AMF tienen la hipotenusa AM comun, el ángulo $MAE = MAF$, puesto que la recta AM es bisectriz del ángulo BAC; los dos triángulos en cuestion son por tanto iguales (**46**) y los lados ME y MF opuestos á ángulos iguales, son tambien iguales. Q. E. L. D.

2.º Sea M un punto tomado en el interior del ángulo BAC, de tal suerte que las perpendiculares ME y MF bajadas desde este punto sobre los lados AB y AC del ángulo sean iguales; y decimos que el punto M pertenece á la bisectriz del ángulo, BAC (fig. 27). Para ello trazamos la recta MA, y los dos triángulos rectángulos MAE, MAF que tienen la hipotenusa MA comun y el lado ME = MF por el supuesto, son iguales (**47**) y por tanto el ángulo MAE opuesto al lado ME es igual al ángulo MAF opuesto al lado MF, ó en otros términos, la línea MA es la bisectriz del ángulo BAC. Q. E. L. D.

51. COROLARIO. *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que, situados en el interior del ángulo, están equidistantes de sus lados.*

Fig. 28.

52. OBSERVACION. *Si dos rectas indefinidas* AB *y* CD (fig. 28) *se cortan en un punto* O, *el lugar geométrico de los puntos igualmente distantes de estas dos rectas se compone de las dos bisectrices perpendiculares* EG *y* FH *que dividen en dos partes iguales los cuatro ángulos formados por las rectas* AB *y* CD (**27**).

§ V. Rectas paralelas. — Suma de los ángulos de un triángulo, de un polígono cualquiera. — Propiedades de los paralelógramos.

53. DEFINICION. Dos líneas son *paralelas* cuando, al estar situadas en un mismo plano, no se encuentran nunca, sea cualquiera la distancia que se prolonguen.

54. TEOREMA. *Dos perpendiculares á una misma recta son paralelas.*

Con efecto: desde un punto no puede trazarse mas que una perpendicular á una recta, luego dichas perpendiculares no podrán encontrarse, y por tanto serán paralelas. Q. E. L. D.

55. TEOREMA. *Por un punto tomado fuera de una recta puede trazarse una paralela á aquella, y no se puede trazar mas que una.*

1.º Sea AB la recta dada, C el punto exterior á dicha recta (fig. 29). Del punto C trazo CD perpendicular á AB, y la CE perpendicular á CD. La recta CE es paralela á AB, porque estas dos líneas son perpendiculares á una misma recta CD.

Fig. 29.

2.º SE ADMITE SIN DEMONSTRACION *que por un punto no se puede trazar mas que una paralela á otra recta dada.*

Esta proposicion que no se puede demostrar se llama por esta razon el POSTULADO de la teoría de las paralelas ó de EUCLIDES

56. COROLARIO. *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí* (fig. 30).

Sean A y B dos rectas paralelas á la recta C, y tendrémos, que supuesto que por un mismo punto no pueden trazarse dos paralelas á una tercera, las dos líneas A y B no podrán encontrarse, y por tanto serán paralelas entre sí. Q. E. L. D.

Fig. 30.

57. TEOREMA. *Si dos líneas son paralelas, toda recta que sea perpendicular á una de ellas lo será á la otra* (fig. 31).

Fig. 31.

Sean AB y CD dos paralelas y EF perpendicular á AB, y decimos, que por serlo á AB lo será tambien á CD. Desde luego dicha recta no es paralela á CD puesto que por el punto E no puede trazarse á CD más que una sola paralela que es AB. Sea ahora F el punto de encuentro de CD y de EF, y por el punto F tracemos una perpendicular á EF y será paralela á AB (**54**); luego coincidirá con CD (**55**) y CD es perpendicular á EF. Q. E. L. D

58. Teorema. *Cuando dos rectas paralelas están cortadas por una secante, los cuatro ángulos agudos formados son iguales entre sí, y lo mismo los cuatro ángulos obtusos* (fig. 32).

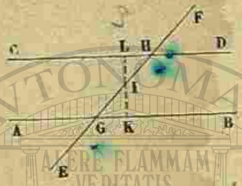

Fig. 32.

Sean AB, CD dos paralelas, EF, una secante que las corta en los puntos GH; la línea EF forma con cada una de estas rectas cuatro ángulos de los cuales dos son agudos y dos obtusos, salvo en el caso particular en que EF sea perpendicular á los dos paralelas. Esto sentado, consideremos primero los dos ángulos agudos CHG, HGB, que decimos que son iguales. Con efecto: por el medio I de GH tracemos una perpendicular á AB, que será por ello perpendicular á CD (**57**). En este caso los dos triángulos IGK, IHL son rectángulos que tienen la hipotenusa IG = IH por construccion y los ángulos en I iguales por opuestos por el vértice, y por tanto son iguales (**46**) é iguales los ángulos IGK, IHL.

Los otros dos ángulos agudos son respectivamente iguales á los precedentes como opuestos por el vértice, y por lo mismo lo son los cuatro ángulos agudos. Cada ángulo obtuso es el suplemento de uno de los ángulos agudos (**21**) que siendo iguales, resultan iguales tambien los obtusos.

59. Observacion. Se ha dado nombre particular á los ángulos que una secante forma con dos rectas. Sean AB, CD las dos rectas y EF la secante (fig. 33).

Fig. 33.

Los dos ángulos no adyacentes situados en el interior de las dos líneas y á diverso lado de la secante, se llaman ángulos *alternos internos*, como los ángulos 1 y 7, 4 y 6.

Los ángulos no adyacentes situados fuera de las rectas y á diverso lado de la secante se llaman *alternos externos*, como los 2 y 8, 3 y 5.

Los dos ángulos no adyacentes situados al mismo lado de la secante el uno entre las dos rectas y el otro fuera, se llaman *correspondientes*, como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

Dos ángulos situados entre las dos rectas y á un mismo lado de la secante se llaman *interiores de un mismo lado*, como los ángulos 1 y 6, 7 y 4; y exteriores los 3 y 8, 2 y 5.

60. Corolario. Con referencia á la figura 32 el teorema precedente puede sin duda enunciarse en los siguientes términos:

Cuando dos paralelas son cortadas por una secante.

1.º *Los ángulos alternos internos son iguales;*

2.º *Los ángulos alternos externos también lo son;*

3.º *Los ángulos correspondientes lo son también;*

4.º *Los ángulos interiores de un mismo lado son suplementarios.*

5.º *También son suplementarios los exteriores de un mismo lado.*

61. Teorema. Recíprocamente: *si dos rectas forman con una secante:*

Angulos alternos internos iguales;

Angulos alternos externos iguales;

Angulos interiores de un mismo lado suplementarios;

Angulos exteriores de un mismo lado suplementarios;

Dichas dos rectas son paralelas (fig. 34).

Supongamos, por ejemplo, que los ángulos alternos internos CHG, HGB sean iguales, y decimos que las dos rectas AB, CD son paralelas. En efecto: si imaginamos que se traza por el punto H una paralela á AB; esta línea deberá formar con la secante HG y sobre esta línea un ángulo igual al ángulo HGB porque los dos serán alternos internos. La recta HC llena esta condicion, nd esto que, segun el supuesto

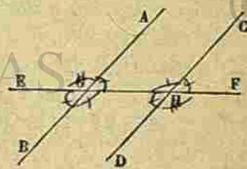

Fig. 34.

el ángulo GHC es igual al ángulo HGB; luego la línea HC es precisamente la paralela á AB, trazada por el punto H. Q. E. L. D.

El mismo razonamiento se aplicaria sin duda á los demás casos del teorema.

62. Teorema. *Los ángulos que tienen los lados paralelos son iguales, ó suplementarios* (fig. 35).

Hay tres casos diversos, que distinguir :

1.º Los dos ángulos BAC, EDF tienen los lados paralelos y *dirigidos* en un *mismo sentido*; y decimos que son iguales. En efecto : las dos rectas AC y ED no son paralelas y por consiguiente se encontrarán en un punto G, y el ángulo BAC = EGC como correspondientes formados por las paralelas AB, DE cortadas por la secante AC; el ángulo EDF = EGC como correspondientes formados por las paralelas AC, DF cortadas por la secante DG; luego los ángulos BAC, EDF iguales á un mismo ángulo EGC son iguales entre sí. Q. E. L. D.

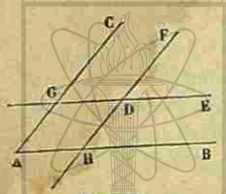

Fig. 35.

2.º Los dos ángulos BAC, GDH tienen los lados paralelos y *dirigidos en sentido contrario*, y decimos que tambien son iguales. En efecto; prolongando más allá del vértice los lados del ángulo GDH, tenemos un ángulo EDF que es igual á BAC (1.º), pero el ángulo GDH = EDF por opuestos por el vértice; luego BAC = GDH. Q. E. L. D.

3.º Los dos ángulos BAC, EDH tienen *dos lados dirigidos en el mismo sentido y dos en sentido contrario*, y decimos que son suplementarios. Con efecto : prolongamos más allá del vértice el lado HD del segundo ángulo. Formamos de esta suerte un ángulo EDF igual á BAC (1.º); pero EDH y EDF son suplementarios (**21**); luego EDH y BAC son suplementarios. Q. E. L. D.

63. Teorema. *Dos ángulos que tienen los lados perpendiculares son iguales ó suplementarios* (fig. 36).

Sean ABC, DEF dos ángulos que tienen los lados perpendiculares dos á dos; y decimos que son iguales ó suplementarios. En efecto : en el punto B elevamos á BC una perpendicular BC′ situada al mismo lado que BA respecto de BC, y hacemos girar el ángulo ABC alrededor del vértice B hasta que el lado BC coincida con BC′, en cuyo caso el lado BA vendrá á ocupar la posicion BA′ y el ángulo A′BC′ será igual al ángulo ABC. Los dos ángulos CBC′, ABA′, son tambien iguales, por que los dos, si se le agregan respectivamente los ángulos A′BC′, ABC dan la misma suma CBA′; pero el ángulo CBC′ es recto por construccion, luego ABA′ lo es igualmente, y BA′ es perpendicular á AB. Esto sentado, resulta que BA′ y DE perpendiculares á una tercera recta BA. son paralelas (**54**) y por igual razon BC′ y EF son tambien paralelas; luego los ángulos A′BC′, DEF que tienen sus lados paralelos son iguales ó suplementarios (**62**); y por consiguiente los ángulos ABC, DEF son iguales ó suplementarios. Q. E. L. D.

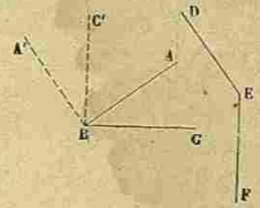

Fig. 36.

Observacion. Si los dos ángulos son ambos agudos ó ambos obtusos, son iguales; y si uno es agudo y el otro obtuso son suplementarios.

64. Definicion. Se llama *polígono* una porcion de plano limitado completamente por líneas rectas. Dichas rectas se llaman *lados* del polígono; los ángulos que forman, *ángulos* del polígono; los vértices de estos ángulos, vértices del polígono, y á la recta que une dos vértices no consecutivos, *diagonal* del polígono.

La figura 57 representa un polígono cuyos lados son las rectas AB, BC, CD, DE, EA; los vértices son los puntos A, B, C, D, E; los ángulos BAE, CBA, DCB, EDC, AED, y la recta AC es una diagonal.

La suma de los lados de un polígono se llama *perimetro* del polígono.

Un polígono se llama *convexo* cuando prolongando indefinidamente todos sus lados, queda todo él situado á un mismo lado de cada una de estas rectas. Si un polígono convexo se corta por una recta, no puede esta cortar el perimetro del polígono más que en dos puntos.

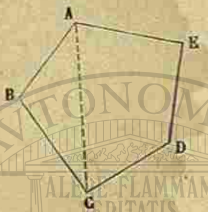

Fig. 37.

Se llama *triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, eptágono, octógono, decágono,* etc., un polígono que tiene 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, etc. lados.

Se llama *paralelógramo* el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (fig. 38).

Se llama *rombo* el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales (fig. 39).


Fig. 38


Fig. 39.


Fig. 40.

El *rectángulo* es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos (fig. 40).


Fig. 41.


Fig. 42.

Cuadrado es el cuadrilátero que tiene sus lados iguales y los ángulos rectos (fig. 41).

Trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos, que se llaman *bases* del trapecio (fig. 42).

65. Teorema. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos* (fig. 43).

Sea ABC un triángulo, del cual prolongo el lado AC en CD y por el punto C trazo la línea CE paralela á BA. El ángulo A del triángulo es igual á DCE como correspondientes formados por las paralelas BA y CE cortadas por la secante AD; el ángulo B del triángulo es igual al ángulo BCE como alterno interno formado por las paralelas AB, CE cortadas por la secante BC. Luego la suma de los tres ángulos del triángulo es igual á la suma de los ángulos DCE + ECB + ACB y como esta suma vale dos rectos, dos rectos (**22**) vale tambien la suma de los tres ángulos del triángulo en cuestión. Q. E. L. D.

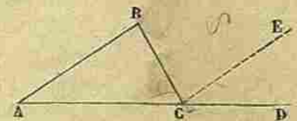

Fig. 43.

66. Corolario I. El ángulo BCD formado por un lado BC y la prolongacion de otro lado se llama *exterior* al triángulo. Resulta de la demostracion precedente que *el ángulo exterior de un triángulo es igual á la suma de los ángulos interiores no adyacentes.* Así el ángulo BCD es igual á la suma de los ángulos interiores A y B.

67. Corolario II. El tercer ángulo de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos. Luego *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales uno á uno, los terceros ángulos son tambien iguales.*

68. Corolario III. *Un triángulo no puede tener más que un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.*

69. Corolario IV. *En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios.*

70. Teorema. *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos* (fig. 44).

Sea ABCDEF un polígono convexo, y desde el vértice A tracemos todas las diagonales posibles, con lo cual el polígono quedará descompuesto en triángulos que tendrán por vértice comun A y en los que los lados opuestos á dicho vértice son todos los lados del polígono, á escepcion de los dos lados AB, AF que parten del punto A. El número de estos triángulos es, pues, igual al número de lados del polígono menos dos. La suma de los ángulos del polígono es evidentemente la misma que la de los ángulos de todos estos triángulos. Luego, en virtud del teorema precedente, es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos. Q. E. L. D.

Fig. 44.

71. Observacion. Sea n el número de lados de un polígono: la suma de sus ángulos es igual á

$$2 \text{ rectos} \times (n-2) = (2n-4) \text{ rectos.}$$

72. Teorema. *En todo paralelógramo,*

1.º *Los ángulos opuestos son iguales;*

2.º *Los lados opuestos son iguales.*

1.º Los ángulos opuestos son iguales por tener los lados paralelos y dirigidos en distintos sentidos (**62**, 2.º).

2.º Sea el paralelógramo ABCD (fig. 45). Si trazamos la diagonal BD comun, los triángulos ABD, CDB, tienen comun el lado BD, el ángulo ABD = CDB como alternos internos á las paralelas AB, DC cortadas por la secante BD, y el ángulo ADB = CBD como alternos internos con relacion á las paralelas DA, BC cortadas por la secante DB. Dichos triángulos son, pues, iguales (**51**), y por

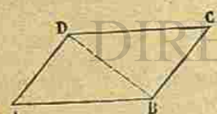

Fig. 45.

consiguiente AD opuesto al ángulo ABD es igual á BC opuesto al ángulo CDB y lo mismo AB = CD. Q. E. L. D.

73. Corolario. *Dos paralelas están á igual distancia en toda su longitud* (fig. 46). Sean AB, CD dos paralelas; EF, GH dos perpendiculares á dichas paralelas, las cuales son paralelas (**54**). La figura EGHF es, pues, un paralelógramo y por consiguiente EF = GH. Q. E. L. D.

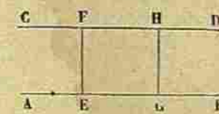

Fig. 46.

74. Teorema. *Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos son respectivamente iguales, el cuadrilátero es un paralelógramo.*

La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro rectos (**70**); los ángulos opuestos son iguales dos á dos, y por tanto la suma de dos ángulos no opuestos valdrá la mitad de cuatro rectos ó sean dos rectos, es decir, que dos ángulos inmediatos de este cuadrilátero son suplementarios. Ahora bien, si teniendo esto en cuenta suponemos que en el cuadrilátero ABCD (fig. 47) los ángulos A y C son iguales así como los ángulos B y D, resultará que los ángulos A y B, v. g., son suplementarios; pero estos ángulos son interiores de un mismo lado con relacion á las dos líneas AD y BC cortadas por la secante AB; luego las líneas AD y BC son paralelas (**61**) y lo mismo sucede á los otros dos lados opuestos, y el cuadrilátero es un paralelógramo. Q. E. L. D.

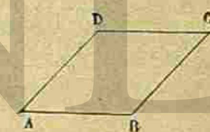

Fig. 47.

75. Corolario. *Un rectángulo es un paralelógramo*, por que sus ángulos opuestos son iguales dos á dos, como rectos que son.

76. Teorema. *Si en un cuadrilátero los lados opuestos son guales, el cuadrilátero es un paralelógramo* (fig. 48).

Sea ABCD el cuadrilátero en el cual tenemos:

$$AB = CD, \quad AD = BC.$$

Trazamos la diagonal BD y los dos triángulos ABD, CDB tienen el lado comun BD, $AB = CD$, $AD = BC$, por el supuesto, y por tanto son iguales (**35**) y lo mismo los ángulos ABD y CDB. Estos ángulos son alternos internos con relacion á las líneas AB y CD, cortadas por la secante BD; luego estas líneas son paralelas. De igual manera los ángulos ADB, CBD son iguales y las rectas AD, CB son paralelas, y la figura es por lo tanto un paralelógramo. Q. E. L. D.

Fig. 48.

77. Corolario. *Un rombo es un paralelógramo*, porque sus ángulos opuestos son evidentemente iguales.

El cuadrado es tambien un paralelógramo.

78. Teorema. *Si en un cuadrilátero dos lados opuestos son iguales y paralelos, el cuadrilátero es un paralelógramo* (fig. 48, *bis*).

Sea ABCD el cuadrilátero en el cual suponemos que el lado AB es igual y paralelo al CD, y pretendemos demostrar que los otros dos lados AD y BC son tambien paralelos. En efecto: tracemos la diagonal BD y los dos triángulos ABD, CDB tienen el lado BD comun, el lado $AB = CD$ por el supuesto, y el ángulo $ABD = CDB$ como alternos internos entre las paralelas AB, CD cortadas por la secante BD; luego son iguales (**32**); luego el ángulo $ADB = DBC$. Mas estos ángulos son alternos internos entre las rectas AD, CB cortadas por la secante BD; luego estas rectas son paralelas (**61**) y el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo. Q. E. L. D.

Fig. 48 *bis*.

79. Teorema. *Las diagonales de un paralelógramo se cortan mutualmente en dos partes iguales* (fig. 49).

Sea ABCD un paralelógramo, AC, DB sus diagonales que se cortan en O; y decimos que $OA = OC$ y que $OB = OD$. En efecto: los dos triángulos OAB, OCD tienen el lado $AB = CD$ como lados opuestos de un mismo paralelógramo; (**72**) el ángulo $OAB = OCD$ como alternos internos, y el ángulo $OBA = ODC$ por la misma razon. Estos dos triángulos son, pues, iguales (**31**) y los lados AO, CO opuestos á los ángulos iguales ABO, CDO son iguales, y lo mismo puede decirse que $OB = OD$. Q. E. L. D.

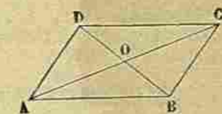

Fig. 49.

80. Corolario I. *Las diagonales de un rombo* ABCD *son perpendiculares entre sí* (fig. 50).

Teniendo el rombo sus cuatro lados iguales, los puntos B y D están uno y otro á igual distancia de los puntos A y C, y pertenecen los dos á la perpendicular levantada en medio de AC (**48**); por consiguiente BD es perpendicular á AC. Q. E. L. D.

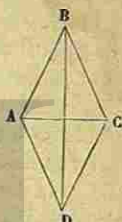

Fig. 50.

81. Corolario II. *Las diagonales de un rectángulo* ABCD *son iguales* (fig. 51).

En efecto: los dos triángulos rectángulos ABC, BAD tienen el lado comun AB y el lado $BC = AD$ (**72**), y por tanto un ángulo igual comprendido entre lados iguales uno á uno; luego son iguales (**32**), resultando que sus hipotenusas AC y BD son tambien iguales. Q. E. L. D.

Fig. 51.

Observacion. El cuadrado es á la vez un rombo y un rectángulo: *luego las diagonales de un cuadrado son perpendiculares é iguales entre sí.*

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO PRIMERO

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si un punto tomado en el interior de un triángulo se une con los tres vértices, la suma de estas líneas es menor que la suma de los tres lados del triángulo.

2. La línea que une uno de los vértices de un triángulo con el medio del lado opuesto (esta línea se llama una *mediana* del triángulo), es menor que la semisuma de los otros dos lados.

3. Si la línea que junta uno de los vértices de un triángulo con el medio del lado opuesto es perpendicular á este lado, el triángulo es isósceles.

4. Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo es perpendicular al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

5. Si la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo al lado opuesto divide este lado en dos partes iguales, el triángulo es isósceles.

6. Si las perpendiculares bajadas desde dos vértices de un triángulo sobre los lados opuestos son iguales entre sí, el triángulo es isósceles.

7. Las perpendiculares levantadas en medio de los tres lados de un triángulo se cortan en un mismo punto.

8. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto.

9. Dadas dos líneas paralelas, si se traza otra paralela á igual distancia de las dos primeras, aquella divide en dos partes iguales todas las rectas comprendidas entre las dos paralelas dadas.

10. Si por cada uno de los vértices de un triángulo se traza una paralela al lado opuesto, dichas rectas, suficientemente prolongadas, forman un nuevo triángulo que vale cuádruplo del primero y cuyos lados tienen una longitud doble que los lados del primero.

11. Las perpendiculares bajadas desde los tres vértices de un triángulo sobre los lados opuestos se cortan en un mismo punto.

12. Si en un triángulo la línea que junta uno de los vértices con el medio del lado opuesto es igual á la mitad de este lado, el triángulo es rectángulo.

13. Si en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es doble que el otro, la hipotenusa es doble que el menor de los otros dos lados.

14. Si se prolongan en un mismo sentido todos los lados de un polígono convexo, la suma de los ángulos exteriores de esta manera formados es igual á cuatro ángulos rectos.

15. Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados que son respectivamente iguales.

16. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mútuamente en dos partes iguales, este cuadrilátero es un paralelógramo.

17. Si en un cuadrilátero las diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales y son perpendiculares, el cuadrilátero es un rombo.

18. Si en un cuadrilátero las diagonales son iguales y se cortan recíprocamente en partes iguales, el cuadrilátero es un rectángulo.

19. La línea trazada por el medio de un lado de un triángulo paralelamente á otro lado, pasa tambien por el medio del tercer lado, y su longitud es la mitad de aquel lado á que es paralela.

20. Si se unen dos á dos los medios de los lados de un cuadrilátero convexo, se forma un nuevo cuadrilátero que es un paralelógramo: ¿en qué caso será dicho paralelógramo un rombo ó un rectángulo?

21. En un trapecio los puntos medios de los lados no paralelos y de las diagonales están en línea recta.

22. En un trapecio isósceles, esto es, aquel en que los lados no paralelos son iguales entre sí, los ángulos opuesto son suplementarios.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. ¿Cuál es el lugar geómetrico de los medios de las rectas trazadas desde un punto fijo á una recta?

2. Dos puntos A y B y una recta MN dados (fig. 52), determinar sobre la recta MN un punto C tal que el ángulo ACM sea igual al BCN (Problema del billar). Demostrar que la línea quebrada ACB determinada de este modo, es mas corta que toda otra línea quebrada obtenida mediante la union de un punto de la línea MN á los puntos A y B.

Fig. 52.

3. Dadas dos paralelas y dos puntos A y B situados fuera de ellas y en lados diversos, encontrar el camino mas corto desde A á B mediante una línea quebrada tal que la porcion comprendida entre las dos paralelas tenga una direccion dada.

4. ¿Cuál es el valor del ángulo de un triángulo equilátero?

5. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es los $\frac{2}{5}$ de un ángulo recto; ¿cuál es el valor del otro?

6. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles es los $\frac{6}{7}$ de un ángulo recto; ¿cuánto vale cada uno de los ángulos de la base?

7. Cada uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es igual á $\frac{3}{4}$ de un recto; ¿cuál es el valor del ángulo del vértice?

8. La suma de los ángulos de un polígono convexo es igual á 94 ángulos rectos; ¿cuántos lados tiene este polígono?

9. ¿Cuáles son las propiedades del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un paralelógramo, y del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos exteriores? (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1866).

10. Si en un trapecio ABCD (el lector tendrá á bien imaginarse la figura) cuyos lados paralelos son AB y CD, se trazan las bisectrices de los ángulos A y D, ¿en qué ángulo se cortarán? ¿Cuál es la direccion de la recta que une el punto de encuentro de las bisectrices de los ángulos A y D con el punto de encuentro de las bisectrices de los ángulos B y C? (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1868).

LIBRO II

DE LA CIRCUNFERENCIA

§ VI. De la circunferencia. — Dependencia mútua de los arcos y de las cuerdas, de las cuerdas y de sus distancia al centro.

82. Definiciones. La *circunferencia* es una línea curva ABC (*fig*. 53) cuyos puntos equidistan de uno interior O que se llama *centro*. *Círculo* es la porcion de plano limitado por la circunferencia.

Rádio se llama toda recta, como OA que va desde el centro á un punto cualquiera de la circunferencia. Por la definicion, todos los rádios son iguales. Todo punto interior á la circunferencia está á una distancia del centro menor que el rádio; y todo punto exterior, á una distancia mayor que el rádio.

Fig. 53.

Dos círculos del mismo rádio son iguales, porque si se los superpone de modo que los centros coincidan, la igualdad de los rádios hará que coincidan evidentemente las dos circunferencias.

Se llama *arco* una porcion cualquiera BC de la circunferencia; y se llama *cuerda* la recta que une los dos extremos del arco. Se dice frecuentemente que la cuerda *subtiende* al arco ó que el arco está *subtendido* por la cuerda.

Se llama *segmento* de círculo la porcion de este comprendida entre un arco y su cuerda.

83. Teorema. *Una recta no puede tener mas que dos puntos comunes con una circunferencia.*

Porque desde un punto no pueden trazarse á una recta mas que dos líneas iguales (**44**); luego desde el centro no podrán trazarse á la recta mas de dos líneas iguales al rádio.

Observacion. Por esta razon se dice que la circunferencia es una curva *convexa*.

84. Definiciones. Se llama *secante* de una circunferencia la recta que la corta en dos puntos.

Diámetro es una recta que pasa por el centro y termina por sus dos extremos en la circunferencia. El diámetro es el doble del rádio, y por tanto todos los diámetros son iguales.

85. Teorema. *El diámetro es la mayor de las cuerdas* (fig. 54.)

Sea AB una cuerda, BC un diámetro de la circunferencia O, y tracemos el rádio OA. La línea recta AB es mas corta que la línea quebrada AOB, ó lo que es lo mismo, la cuerda AB es menor que el doble del rádio, menor, pues, que el diámetro BC. Q. E. L. D.

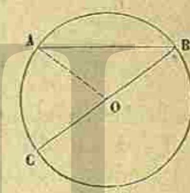

Fig. 54.

86. Teorema. *Todo diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, y lo mismo al círculo* (fig. 55).

Doblemos la figura por el diámetro AB hasta que la parte superior del plano se aplique sobre la inferior. Un rádio OM cualquiera tomará una posicion ON formando con OA un ángulo AON = AOM; y como todos los rádios son iguales, el punto M caerá en el punto N situado en la parte inferior de la circunferencia. Todos los puntos del arco AMB caerán de igual modo sobre el arco AND, luego estos dos arcos coincidirán, con lo cual queda demostrado el teorema.

Fig. 55.

Observacion. Una cuerda que no pasa por el centro divide la circunferencia en dos arcos desiguales el uno menor que la semi-circunferencia, y el otro mayor, y dicha cuerda subtiende los dos arcos mencionados, de los cuales, ordinariamente no se considera sino el arco menor.

87. Teorema. *Por tres puntos que no están en línea recta, se puede siempre hacer pasar una circunferencia pero no mas de una* (fig. 55).

Sean A, B, C los puntos dados; unimos AB y BC. En medio de AB levantamos la perpendicular DE á dicha recta, y en medio de BC la FG perpendicular á BC. Las dos líneas DE y FG no son paralelas porque las perpendiculares BA, BC trazadas á estas dos rectas por un mismo punto, no están en línea recta. Sea ahora O el punto en que se encuentran aquellas dos rectas, y resultará que el punto O hallándose en la recta DE perpendicular en medio de AB, está igualmente distante de los puntos A y B (**46**); este mismo punto por hallarse en FG está tambien á igual distancia de los puntos B y C; está pues á igual distancia de los tres puntos A, B, C, ó lo que es lo mismo, es el centro de una circunferencia que pasa por dichos tres puntos A, B, C.

Fig. 56.

Decimos además que por ellos no puede pasar mas que una circunferencia; porque el centro de toda circunferencia que pasara por A y B estaria igualmente distante de dichos dos puntos, y seria un punto de DE (**48**). Por iguales razones el centro de toda circunferencia por pasando B y C se hallaria en la recta FG. Luego si una circunferencia ha de pasar por los tres puntos A, B, C, su centro se hallará á la vez sobre DE y sobre FG, y coincidirá con el punto O, de donde resulta que por los tres puntos A, B, C, no puede trazarse mas que una circunferencia.

88. Corolario I. Si unimos AC y elevamos una perpendicular en medio de esta línea, deberá contener tambien el punto O que está igualmente distante de los puntos A y C.

Por consiguiente: *las perpendiculares elevadas en la mitad de los tres lados de un triángulo se cortan en un mismo punto que es el centro del círculo circunscrito al triángulo.*

89. Corolario II. *Dos circunferencias no pueden tener mas de dos puntos comunes sin coincidir.*

D No

90. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*
1.º *A arcos iguales corresponden cuerdas iguales;*
2.º *Si dos arcos menores que una semi-circunferencia son desiguales, al mayor corresponde la cuerda mayor* (fig. 56).

1.º Sean dos arcos AB, CD iguales tomados sobre las circunferencias iguales O y O′. Llevemos la circunferencia O′ de manera que el rádio O′C coincida con su igual OA: las circunferencias coincidirán, y como el arco CD es igual al arco AB, el punto D caerá en el punto B; y las cuerdas AB y CD coincidirán. Q. E. L. D.

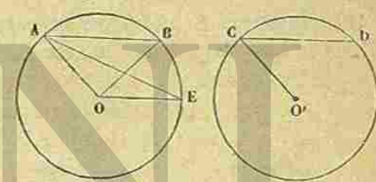

Fig. 57.

2.º Supongamos que los arcos AE, CD tomados en las circunferencias iguales O y O′ sean desiguales y sea AE el mayor, y decimos que la cuerda AE es mayor que la cuerda CD. En efecto: tomemos sobre AE un arco AB igual al arco CD, y evidentemente el punto B caerá entre A y E. Tracemos los rádios OA, OB y OE. El ángulo AOB será menor que AOE. Los dos triángulos, AOB, AOE tienen comun el lado OA, el lado $OB = OE$, como rádios, el ángulo $AOB < AOE$; luego (**33**) el lado AB es mas pequeño que AE. La cuerda $AE = CD$ (1.º), luego, últimamente la cuerda CD es menor que la AE.

91. Corolario. Las recíprocas de los teoremas precedentes se deducen con facilidad.

En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.º *Cuerdas iguales subtienden arcos iguales.*

2.º *Si dos cuerdas son desiguales, la mayor subtiende al arco mayor.*

Porque en virtud del teorema precedente, las cuerdas son iguales ó desiguales segun que los arcos mismos son iguales ó desiguales; luego las cuerdas no pueden ser iguales, si los arcos son desiguales, ni las cuerdas desiguales, si los arcos son iguales. Además, cuando son desiguales, la mayor subtiende necesariamente el arco mayor.

Observacion. Los enunciados que preceden suponen expresamente que se trata de arcos menores que la semi-circunferencia.

92. Teorema. *El diámetro perpendicular á una cuerda, divide la cuerda y cada uno de los arcos que subtiende en dos partes iguales* (fig. 58).

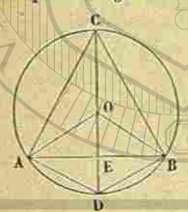

Fig. 58.

Sea CD el diámetro perpendicular á la cuerda AB, E el punto de interseccion. Tracemos los rádios OA, OB. Estas dos líneas son oblícuas y como son iguales, distan igualmente del pié de la perpendicular OE (**43**), luego $AE = BE$. Tracemos despues las cuerdas CA, CB, DA, DB. Puesto que E es el medio de AB, la oblícua CA es igual á CB, luego (**88**) los arcos CA, CB son iguales, y lo mismo los arcos DA y DB.

93. Observacion. Resulta que el medio de una cuerda, el medio de los dos arcos que subtiende y el centro del círculo son cuatro puntos en línea recta, y dicha recta es perpendicular á la cuerda, lo cual equivale á decir que la recta CD tiene ó cumple cinco condiciones. Cuando dos de estas cinco se cumplen, se cumplen tambien los otras tres, lo cual hace que el teorema precedente pueda enunciarse de diez modos distintos.

94. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.º *Dos cuerdas iguales, están igualmente distantes del centro.*

2.º *De dos cuerdas desiguales, la menor es la que más dista del centro* (fig. 59).

1.º Sean AB, CD dos cuerdas iguales en la circunferencia O; OE y OF las perpendiculares bajadas desde el centro á cada una de las cuerdas. Segun lo dicho (**92**) las dividen en dos partes iguales y por tanto $CF = AE$. Tracemos los rádios OA, OC, y los triángulos OAE, OCF que son rectángulos tienen las hipótenusas OA, OC iguales como rádios, y $AE = CF$; luego son iguales (**47**), é iguales tambien OE y OF. Q. E. L. D.

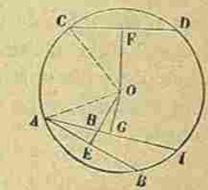

Fig. 59.

2.º Sean AI, CD dos cuerdas desiguales y supongamos $AI > CD$. El arco AI será mayor que el arco CD (**91**). Tracemos desde el centro sobre las dos cuerdas las perpendiculares OG, OF y decimos que $OG < OF$. Con efecto, tomemos sobre el arco AI un arco AB igual al arco CD, y tracemos la cuerda AB, que será igual á la cuerda CD y la perpendicular $OE = OF$ (1.º). Esto supuesto, cayendo el punto B sobre el arco AI, la cuerda AB y el centro O se hallarán en lados diferentes de la línea AI, y OE cortará á AI en un punto H situado entre O y E; de donde resulta $OH < OE$; $OG < OH$ puesto que OG es perpendicular y OH es oblícua á AI: luego *á fortiori* $OG < OE$, ó bien $OG < OF$. Q. E. L. D.

95. Corolario. Recíprocamente, *en un mismo círculo ó en círculos iguales, las cuerdas igualmente distantes del centro son iguales, y de dos cuerdas desigualmente distantes del centro, la que más se aleja es la más pequeña.*

§ VII. — Tangente al círculo. — Interseccion y contacto de dos círculos.

96. Definiciones. Se llama *tangente* del círculo una recta que no tiene mas que un punto comun con la circunferencia. Dicho punto se llama de *contacto* ó *tangencia*.

Dos circunferencias son *tangentes* cuando no tienen mas que un punto comun, que se llama tambien punto de *contacto*. Cuando dos circunferencias tienen dos puntos comunes se llaman *secantes*, y no pueden tener mas que los dos puntos comunes dichos.

97. Teorema. *Toda perpendicular al estremo de un rádio es tangente al círculo* (fig. 60).

Fig. 60.

La línea AT perpendicular al extremo del rádio OA es tangente al círculo, porque toda línea OB, por ejemplo, trazada desde el centro á la línea AT es oblícua á esta línea, por consiguiente mas larga que OA, y por esta razon todos los puntos de AT, á escepcion del punto A son exteriores al círculo y AT, por tanto, tangente á la circunferencia. Q. E. L. D.

98. Teorema. Recíprocamente, la tangente á la circunferencia es perpendicular al extremo del rádio que termina en el punto de contacto (fig. 60).

Sea AT una tangente al círculo O, y A el punto de contacto. Todos los puntos de AT á escepcion del punto A son esteriores al círculo; luego OA es la línea mas corta que puede trazarse desde el punto O á la línea AT; y por consiguiente (**45**) OA es perpendicular á AT. Q. E. L. D.

99. Coralorio. *Por un punto de una circunferencia no puede trazarse más de una tangente*, porque no puede trazarse

mas que una perpendicular al extremo del rádio que pasa por dicho punto.

100. Teorema. *Cuando dos circunferencias se cortan, la línea que une sus centros es perpendicular á la cuerda comun y pasa por el medio de esta* (fig. 61).

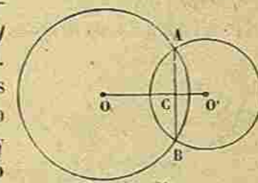

Fig. 61.

Sean O y O′ dos circunferencias que se cortan en A y B. El punto O está igualmente distante de A y de B, y lo mismo sucede al punto O′. Luego los puntos O y O′ se encuentran en la perpendicular elevada en medio de AB (**48**) y por tanto OO′ es perpendicular en medio de AB. Q. E. L. D.

101. Teorema. *Si dos circunferencias O y O′ tienen un punto comun A fuera de la línea de los centros, estas dos circunferencias son secantes* (fig. 61).

Con efecto: desde el punto A bajemos la línea AC perpendicular á OO′ y la prolongamos una cantidad CB = CA, con lo cual resulta que el punto O está igualmente distante de los puntos A y B (**48**) y el punto B está en la circunferencia O, y por iguales razones en la circunferencia O′; luego dichas dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Q. E. L. D.

102. Corolario. *Cuando dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros.*

103. Observacion. Dos circunferencias pueden ocupar una con relacion á otra cinco posiciones diferentes: pueden no tener ningun punto comun y ser *exteriores* (fig. 62), ó *interiores* (fig. 66), ó *tangentes exteriormente* (fig. 63), ó *interiormente* (fig. 65), ó por fin pueden ser secantes (fig. 64).

104. Teorema. 1.° *Si dos circunferencias son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.*

2.° *Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.*

3.° *Si dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios, y mayor que su diferencia.*

4.° *Si dos circunferencias son tangentes interiormente,*

Fig. 62.

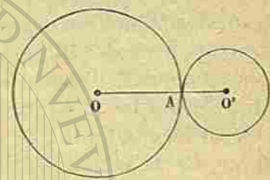

Fig. 63.

la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.

5.° *Si dos circunferencias son interiores, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.*

1.° Tenemos en la (fig. 62)

$$OO' = OA + O'B + AB$$

luego :

$$OO' > OA + O'B.$$

2.° El punto de contacto A está en la línea de las centros (**102**) y comprendido entre los dos centros; y tenemos (fig. 63)

$$OO' = OA + AO'.$$

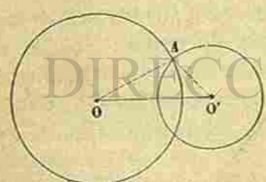

Fig. 64.

3.° Sea A uno de los dos puntos de encuentro de dos circunferencias secantes O, O' (fig. 64) y tendremos en el triángulo O'OA (**29**)

$$OO' < OA + O'A$$
$$OO' > OA - O'A.$$

4.° Sean O y O' dos circunferencias tangentes interiormente

y A el punto de contacto (fig. 65) que está situado en la prolongacion de la línea de los centros (**102**) y tendrémos

$$OO' = OA - O'A.$$

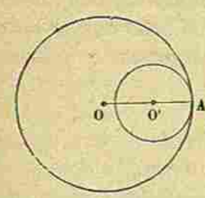

Fig. 65.

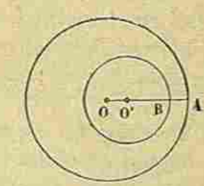

Fig. 66.

5.° Sean O y O' dos circunferencias interiores (fig. 66) y tendremos :

$$OO' = OA - O'A = OA - O'B - BA;$$

luego :

$$OO' < OA - O'B.$$

105. Observacion. Las recíprocas de los cinco teoremas que preceden son verdaderas, y se deducen inmediatamente, porque las condiciones relativas á cada caso se excluyen mútuamente.

Demostremos, por ejemplo que si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, las circunferencias se cortan. En efecto : dichas circunferencias no pueden ser ni exteriores, ni tangentes exteriormente, puesto que la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios ; tampoco pueden ser tangentes interiormente ni interiores, puesto que la distancia de los centros es mayor que la diferencia de los rádios ; luego son secantes. Q. E. L. D.

De igual manera se pueden demostrar las otras cuatro recíprocas.

§ VIII. — Medida de los ángulos. — Ángulos inscritos.

106. Definiciones. Se llama *ángulo central* aquel cuyo vértice está en el centro de una circunferencia, y *ángulo inscrito* el que está formado por dos cuerdas que se cortan en la circunferencia.

107. Teorema. *En un mismo círculo ó círculos iguales : 1.° dos ángulos centrales iguales interceptan dos arcos iguales ; 2.° Dos ángulos centrales desiguales comprenden dos arcos desiguales, y al ángulo mayor corresponde el mayor arco* (fig. 67.)

Fig. 67.

1.° Sean AOB, A'O'B' dos ángulos centrales iguales en los círculos iguales O y O'. Unamos AB y A'B', y los triángulos AOB, A'O'B' tienen el ángulo AOB = A'O'B' por el supuesto, OA = O'A', OB = O'B' como rádios de círculos iguales, y por tanto dichos triángulos son iguales y AB = A'B' ; y los arcos AB y A'B' que están subtendidos por cuerdas iguales, son iguales. Q. E. L. D.

2.° Sean AOC > A'O'B' y decimos que el arco AC > arco A'B'. Con efecto : si formamos el ángulo AOB = A'O'B', la línea OB caerá en el interior del ángulo AOC, y por tanto el punto B caerá sobre el arco AC ; luego el arco AB < arco AC, y como el arco AB = arco A'B' (1.°) resulta al fin que arco A'B' < arco AC. Q. E. L. D.

108. Corolario. *Los ángulos centrales que comprenden arcos iguales en círculos iguales, son iguales*, porque si fueran desiguales, los arcos comprendidos entre sus lados, serian desiguales, lo cual es contra el supuesto.

109. Teorema. *En un mismo círculo ó círculos iguales, la relacion de dos ángulos centrales es igual á la relacion de los arcos que comprenden entre sus lados* (fig. 68) [1].

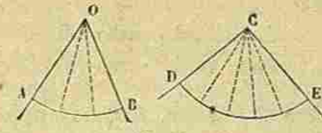

Fig. 68.

Supongamos que los arcos AB y DE tienen una medida comun (V. la *Arithmética*) que esté contenida, v. g. tres veces en AB y cinco en DE, y tendremos :

$$\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DE}} = \frac{3}{5};$$

Unimos los puntos de division de los dos arcos con sus centros respectivos O y C, y los dos ángulos AOB, DCE quedarán divididos en pequeños ángulos, iguales entre sí, puesto que comprenden arcos iguales (**108**) ; luego el ángulo AOB

1. Recordamos aquí que se llama *relacion* de dos magnitudes de la misma especie al número entero ó fraccionario que expresa la medida de la primera, cuando se toma la segunda por unidad, ó el número que indica las veces que la primera magnitud contiene la segunda, ó qué fraccion de la segunda magnitud representa la primera. Así, decir que la relacion de dos ángulos es igual á $\frac{3}{5}$, es decir que el primero contiene tres veces la 5.ª parte del 2.°, ó, mas sencillamente, que el primero vale los $\frac{3}{5}$ del segundo.

Nótese tambien que para abreviar el lenguaje, representaremos la relacion de dos cantidades de la misma especie por una fraccion que tenga por numerador la primera cantidad y por denominador la segunda, aun en el caso en que estas dos cantidades no se expresen en números : así la fraccion $\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DE}}$ significa la relacion del arco AB al DE. Si las dos magnitudes estuvieran reducidas á números, su relacion, como se sabe, se expresaria realmente por el cociente del primer número por el segundo, ó por la fraccion que tenga el primero por numerador y el segundo por denominador. (Véase la *Aritmética*).

contiene 3 y el ángulo DCE contiene 5; de donde resulta :

$$\frac{\text{áng. AOB}}{\text{áng. DCE}}=\frac{3}{5};$$

y por consiguiente

$$\frac{\text{áng. AOB}}{\text{áng. DCE}}=\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DC}}$$ Q. E. L. D.

Siendo verdadero el teorema, por muy pequeña que sea la medida comun de los arcos AB y DE, será verdad cuando los arcos son incomensurables.

110. Teorema. *Si se toma como unidad de ángulo central el ángulo que comprende entre sus lados la unidad de arco, la medida de un ángulo central es la misma que la del arco comprendido entre sus lados* (fig. 68), ó mas brevemente, *el ángulo central tiene por medida el arco comprendido entre sus lados.*

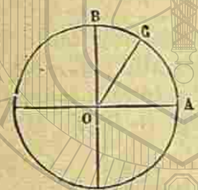

Fig. 69.

Sea AOC el ángulo que es necesario medir, AOB la unidad de ángulo. Desde el punto O como centro, con un rádio cualquiera describo una circunferencia. La unidad de arco será por el supuesto el arco AB comprendido entre los lados de la unidad de ángulo; luego la medida del ángulo AOC será (V. la *Aritmética*) la relacion $\frac{\text{áng. AOC}}{\text{áng. AOB}}$, y la medida del arco AC será la relacion $\frac{\text{arco AC}}{\text{arco AB}}$; y como estas medidas son iguales segun el teorema precedente, luego, etc.

111. Si se toma el ángulo recto por unidad de ángulo, la unidad de arco será evidentemente la cuarta parte de la circunferencia, ó sea el *cuadrante*.

112. Para comparar con mas facilidad los arcos, se ha dividido la circunferencia entera en 360 partes iguales llamadas *grados*, cada grado en 60 *minutos* y cada minuto en 60 *segundos*, y segun esto, se dice *ángulo de un grado, de un minuto*, etc., al ángulo central que comprende un arco de un grado, de un minuto, etc.

Los grados se indican por el signo (°), los minutos por el signo (′) y los segundos por (″); y así 18 grados y 25 minutos y 13 segundos se escriben así : 18°, 25′, 13″.

Si un ángulo central comprende entre sus lados un arco de 25° por ejemplo, este ángulo será 25 veces mayor que el ángulo de 1° y se dice por esta razon que este es un ángulo de 25°; de igual manera, si un ángulo central comprende entre sus lados un arco de 25°, 13′, 45″, este será un ángulo de 25°, 13′ y 45″.

El ángulo recto vale 90° ó 5400′ ó 324 000″.

113. Teorema. *La medida de un ángulo inscrito es igual á la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados* ó mas breve : *un ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

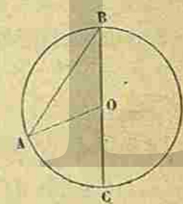

Fig. 70.

Hay que distinguir tres casos :

1.° *Que uno de los lados del ángulo inscrito pase por el centro*, como ABC (fig. 70).

Unamos el punto A con el O, y resultará que el triángulo OAB es isósceles puesto que OA = OB, y por consiguiente el ángulo A = B (**37**). El ángulo AOC exterior al triángulo AOB es igual á la suma de los dos ángulos A y B no adyacentes (**66**) y por tanto es doble que el ángulo B, ó en otros términos, el ángulo B es la mitad del ángulo AOC. Este tiene por medida el arco AC comprendido entre sus lados (**110**), luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC. Q. E. L. D.

2.° *Que el centro O esté en el interior del ángulo* ABC (fig. 71).

Trazamos el diámetro BD, y resultará que el ángulo ABC es la suma de los ABD y DBC; y como la medida (1.°) de ABD es arco $\frac{AD}{2}$ y la de DBC $\frac{\text{arco DC}}{2}$, resulta que la de ABC será

$$\frac{\text{arco AD}}{2}+\frac{\text{arco DC}}{2}=\frac{\text{arco AC}}{2} \quad \text{Q. E. L. D.}$$

3.° *Que el centro O sea exterior al ángulo* ABC (fig. 72).

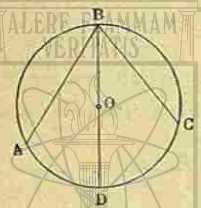

Fig. 71.

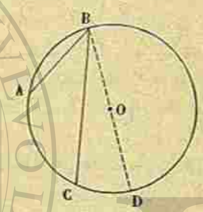

Fig. 72.

Trazando el diámetro BD, resultará

$$ABC = ABD - CBD.$$

La medida de ABD es $\frac{\text{arco AD}}{2}$ (1.°) y la de CBD $\frac{\text{arco CD}}{2}$; luego la medida de ABC es

$$\frac{\text{arco AD}}{2}-\frac{\text{arco CD}}{2}=\frac{\text{arco AC}}{2} \quad \text{Q. E. L. D.}$$

Ejemplo. Supongamos, que el arco AC comprendido entre los lados del ángulo inscrito ABC valga 69°,35′,42″; el ángulo ABC valdrá la mitad de este número ó sean 34°, 47′ y 51″; en términos mas exactos, el ángulo inscrito ABC será la mitad del ángulo central que comprenda entre sus lados un arco igual á AC.

114. Coralario I. *Todo ángulo inscrito en una semi-circunferencia es recto* (fig. 73).

Porque tiene por medida la mitad de una semi-circunferencia, ó cuadrante y por tanto es recto.

115. Corolario II. *Todo ángulo inscrito en un segmento mayor que un semicírculo es agudo; y todo ángulo inscrito en un segmento mas pequeño que un semicírculo es obtuso.*

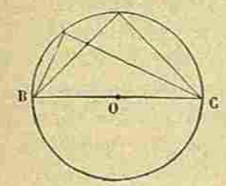

Fig. 73.

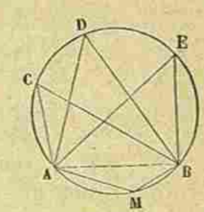

Fig. 74.

El ángulo ADB, por ejemplo, (fig. 74) inscrito en el segmento ACDEB mayor que un semicírculo tiene por medida la mitad del arco AMB, menor que una semicircunferencia; su medida es, pues, menor que la de un ángulo recto, ó en en otros términos, el ángulo es agudo.

Igualmente claro resulta que el ángulo AMB inscrito en un segmento menor que un semicírculo, es obtuso.

116. Corolario. III. *Todos los ángulos inscritos en un mismo segmento son iguales* (fig. 74).

Los ángulos ACB, BDA, AEB son todos iguales porque todos tienen por medida la mitad del arco AMB. El segmento ACDEB suele llamarse el *segmento capaz del ángulo* ACB.

117. Corolario IV. Los ángulos ACB, AMB (fig. 74) inscritos en los dos segmentos determinados por la cuerda AB son suplementarios; porque la suma de sus medidas es igual á la semi-circunferencia. *Así pues, en un cuadrilátero inscrito los ángulos opuestos son suplementarios.*

118. Teorema. *El ángulo formado por una tangente y* *una cuerda trazada por el punto de contacto tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados* (fig. 75).

Sea AC una cuerda, y BA la tangente en punto A. Por este mismo punto trazo una secante AD, y el ángulo inscrito CAM tiene por medida la mitad del arco CM. Si ahora la secante AM gira sobre el punto A de manera que el segundo punto de interseccion M se acerque cada vez mas al punto A, hasta confundirse con él, la secante llegará á ser la tangente, y se confundirá con AB. Siempre resultará que por más próximo que el punto M esté del punto A, el ángulo CAM tiene siempre por medida la mitad del arco AM comprendido entre sus lados. Lo mismo sucede cuando al fin el punto M llega á confundirse con el punto A, y por consiguiente el ángulo CBA tiene por medida la mitad del arco CA comprendido entre sus lados Q. E. L. D.

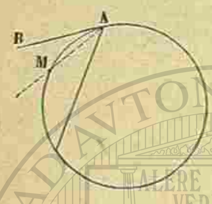

Fig. 75.

119. Teorema. *El ángulo formado por dos cuerdas que se cortan en un círculo tiene por medida la semi-suma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos* (fig. 76).

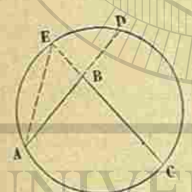

Fig. 76.

Sea ABC el ángulo dado, BD, BE las prolongaciones de sus lados; y únase el punto A con el E. El ángulo ABC exterior al triángulo ABE es igual á la suma de los ángulos interiores A y E (**66**). El ángulo A y el E tienen por medida $\frac{\text{arco AC}}{2}$ y $\frac{\text{arco DE}}{2}$ (**115**)

Luego el ángulo ABC tiene por medida $\frac{\text{arco AC} + \text{arco DE}}{2}$.

Q. E. L. D.

120. Teorema. *El ángulo formado por dos secantes á un círculo que se cortan fuera de la circunferencia, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados* (fig. 77).

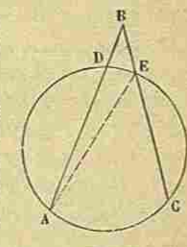

Fig. 77.

Sea ABC el ángulo dado; trazemos la cuerda AE, y el ángulo AEC exterior al triángulo ABE es igual á la suma de los ángulos A y B (**66**). Luego el ángulo B es igual al esceso de AEC sobre el ángulo A. La medida de AEC es $\frac{\text{arco AC}}{2}$, la del ángulo A es $\frac{\text{arco DE}}{2}$, luego la del ángulo ABC $= \frac{\text{arco AC} - \text{arco DE}}{2}$.

Q. E. L. D.

121. Teorema. *En la porcion de plano situado sobre una recta AB, el lugar de los puntos desde donde esta recta se vé bajo un ángulo dado, es un arco de círculo que tenga á AB por cuerda* (fig. 78).

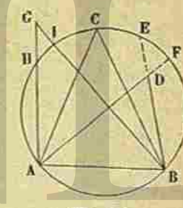

Fig. 78.

Sea C un punto del lugar: por los tres puntos A, B, C, se hace pasar un círculo, y decimos que el arco ACB es el lugar pedido.

En efecto: 1.º desde todos los puntos de este arco la recta AB se ve bajo el mismo ángulo (**116**).

2.º Sea D un punto interior al segmento ACB, el ángulo ADB tiene por medida $\frac{\text{arco AB} + \text{arco EF}}{2}$ (**119**); luego es mayor que el ángulo ACB cuya medida es $\frac{\text{arco AB}}{2}$. Sea G un punto exterior al segmento. El ángulo AGB tiene por medida $\frac{\text{arco AB} - \text{arco HI}}{2}$ (**20**); luego es menor que el ángulo ACB.

Los puntos del arco ACB son pues los únicos desde donde la recta AB es vista bajo un ángulo igual al ángulo dado.

122. Observacion. Si el ángulo dado es recto el lugar es la semi-circunferencia descrita sobre AB como diámetro por la parte superior de esta recta; pero en la porcion de plano situado bajo ella, el lugar de los puntos desde donde esta recta se ve bajo un ángulo recto es la otra mitad de la circunferencia descrita sobre AB como diámetro; luego.

El lugar geométrico de los puntos del plano desde donde una recta dada se ve bajo un ángulo recto, es la circunferencia descrita sobre esta recta como diámetro.

§ IX. Uso de la regla y del compás en los trazados sobre el papel. Trazado de perpendiculares y paralelas; uso de la escuadra.

123. En las aplicaciones de la geometría es necesario trazar las figuras con precision para determinar con exactitud la posicion de un punto, la direccion de una recta, la longitud de esta ó la amplitud de un ángulo. En los problemas que siguen, todos los trazados *gráficos* que habrá necesidad de efectuar se reducirán al de líneas rectas y circunferencias de círculos: los instrumentos que deberémos estudiar al principio son, pues, la *regla*, que sirve para el trazado de líneas rectas y el *compás* para el de circunferencias. Mas adelante darémos á conocer otros instrumentos que abrevian las operaciones.

124. La *regla* (fig. 79) es una plancha longitudinal, comunmente de madera, uno de cuyos lados, por lo menos, debe estar perfectamente recto. Para comprobarlo, se traza con el lado en cuestion una línea AB y se marcan los dos puntos A y

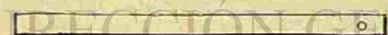

Fig. 79.

B. Despues se vuelve la regla de manera que la otra cara, la de arriba, caiga sobre el papel, y una vez aplicado el borde á los dos puntos marcados, y partiendo aproximadamente del mismo sitio en que concluyó el trazado anterior con relacion á

la regla, se traza otro de nuevo. Si el borde está perfectamente rectilíneo, las dos rectas así trazadas coincidirán entre los puntos A y B; en caso contrario resultarán dos líneas diferentes tales como ACB y ADB (fig. 80).

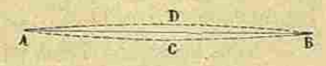

Fig. 80.

Cuando se quiere hacer pasar una recta por dos puntos dados, se coloca la regla sobre el papel de modo que el borde toque los dos y despues con la punta de un lapiz fino ó con un tiralíneas se hace el trazo á lo largo del borde de la regla.

125. El *compás* (fig. 81) es un instrumento formado de dos brazos unidos por un ege en torno del cual pueden girar rozando suavemente. Estos dos brazos pueden terminar en dos puntas finas de acero, en cuyo caso se dice que el compás es de *puntas fijas*, ó bien una de ellas se sustituye por un lapiz ó tiralíneas. El ege que une los dos brazos se llama *cabeza* del compás. Sirve este instrumento para tomar las distancias y trazar circunferencias. Para tomar las distancias, se fija una de las puntas en uno de los puntos, se abre el compás con precaucion y de una manera contínua hasta que la otra punta coincida exactamente con el segundo punto dado. La distancia de las dos puntas es la de los dos puntos dados; y levantando el compás sin variar la abertura de los brazos, podrá trasladarse la distancia sobre otra parte cualquiera del papel.

Fig. 81.

Cuando se desea describir una circunferencia cuyo rádio y centro son conocidos, se sustituye una de las puntas metálicas por un lapiz ó tiralíneas; se coloca la punta en el centro, se abre el compás de modo que la distancia entre las dos puntas sea igual al rádio dado, y cogiendo el instrumento por la cabeza se le hace girar cuidando de que la abertura no cambie, y de que el lapiz ó tiralíneas no se separe del papel, hasta dejar trazada la circunferencia pedida.

126. Problema. *Por un punto* C *dado en una recta* AB, *levantarle una perpendicular* (fig. 82).

A uno y otro lado del punto C tomamos sobre la recta AB dos longitudes iguales CD y CE. Desde el punto D como centro, con una abertura de compás mayor que DC, describimos un arco de círculo, y desde el punto E como centro, con la *misma anchura de compás*, describimos un segundo arco de círculo que corte al primero en el punto F, el cual se une con el punto C mediante la recta FC que será la perpendicular pedida.

Fig. 82.

Hacemos notar en primer lugar que los dos arcos de círculo se cortarán si se los prolonga suficientemente; porque en efecto, por una parte la distancia de los centros DE es menor que la suma de los rádios, puesto que cada uno de ellos es mayor que la mitad de DE. Y por otra, la distancia de los centros DE es mas grande que la diferencia de los rádios, puesto que los rádios son iguales. De todo ello resulta (**105**) que las circunferencias se cortarán en dos puntos, de los que no consideramos mas que el F.

Decimos ahora que la línea CF es perpendicular á AB, porque, segun la construccion, el punto C y el F están equidistantes uno y otro de los puntos D y E y pertenecen ambos á la perpendicular levantada en medio de DE (**48**) y por consecuencia la línea CF que une estos dos puntos es perpendicular á DE ó á AB. Q. E. L. D.

127. Problema. *Desde un punto fuera de una recta* AB *bajar una perpendicular á dicha recta* (fig. 83).

Desde el punto C como centro, con una abertura de compás suficientemente grande describimos una circunferencia que corte á AB por los dos puntos D, E. Desde estos dos puntos

como centro con un mismo rádio mayor que la mitad de DE describimos dos arcos de círculo que se corten en F, y tiramos CF que es la perpendicular pedida.

La demostracion es idéntica á la que ha sido dada para el problema precedente.

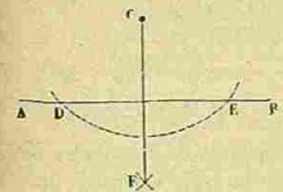

Fig. 83.

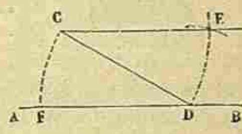

Fig. 84.

128. Problema. Por un punto C dado fuera de una recta AB, trazarle una paralela (fig. 84).

Desde el punto C como centro describimos un arco de círculo DE que corte á AB en el punto D. Desde el punto D como centro y con el mismo rádio trazamos un arco de círculo CF que pase por el punto C y que corte á AB en el punto F. Desde el punto D como centro con un rádio igual á la cuerda del arco CF describimos un arco de círculo que corte al arco DE en el punto E y unimos el punto C con el punto E y esta será la paralela pedida. En efecto : segun la construccion los arcos CF, DE del mismo rádio tienen las cuerdas iguales y por consiguiente son iguales (**88**). Los ángulos centrales CDF, DCE son tambien iguales (**108**), y como son alternos internos, las rectas que los forman son paralelas (**61**).

129. De la escuadra. *La escuadra* es una lámina de madera que tiene la forma de un triángulo rectángulo (fig. 85) y de la que podemos servirnos para el trazado de perpendiculares y paralelas.

Para que una escuadra sea buena, es necesario en primer lugar que sus lados sean perfectamente rectilíneos, lo cual se comprueba como se hizo con la regla. Es menester además que su ángulo sea recto, lo cual se comprobará de la manera siguiente. Se traza sobre el papel una línea recta AB (fig. 86).

Fig. 85.

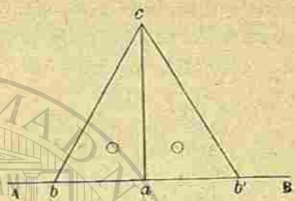

Fig. 86.

Se coloca uno de los lados del ángulo recto de la escuadra *ab* á lo largo de esta línea y con la punta de un lapiz se traza la línea *ac* á lo largo del otro lado del ángulo recto. Se vuelve luego la escuadra, como lo indica la figura, de manera que el lado *ba* venga á parar á *ab'* y quede todavía aplicado á lo largo de la línea AB. Se traza la línea *ac* en esta nueva posicion, y si coincide con la primera, la escuadra está perfecta, porque en este caso los dos ángulos adyacentes *bac*, *b'ac* siendo iguales entre sí, son rectos por la definicion misma del ángulo recto.

130. Problema. *Por un punto* C *tomado fuera de una recta* AB *trazar una paralela á esta recta, sirviéndose de la regla y la escuadra* (fig. 87).

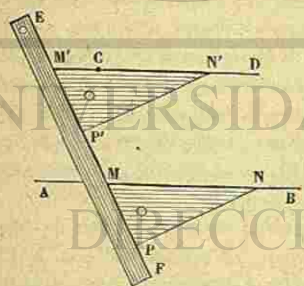

Fig. 87.

Se aplica uno de los lados MN de la escuadra á lo largo de AB, y se coloca una regla EF á lo largo del otro lado MP de la escuadra. Una vez fija la regla EF, se hace deslizar la escuadra hasta que el lado MN pase por el punto C. La línea M'N' es la paralela pedida. En efecto: los ángulos N'M'P, NMP son evidentemente iguales y como son correspondientes, las rectas CD y AB que los forman, son paralelas (**61**).

Observacion. Este modo de trazar las paralelas es muy sencillo y exacto: se ve además que no exige que el ángulo de la escuadra sea recto; basta que los lados sean perfectamente rectilíneos.

131. Problema. *Por un punto tomado sobre una recta* AB, *ó fuera de esta recta, trazarle una perpendicular, sirviéndose de la regla y la escuadra* (figs. 88 y 89).

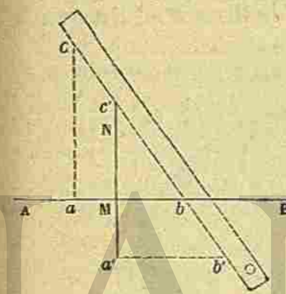

Fig. 88.

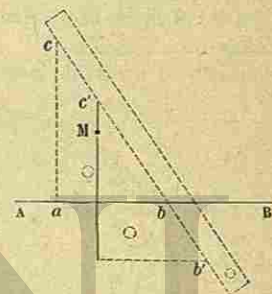

Fig. 89.

En la primera figura el punto M está sobre la recta AB, fuera de ella en la segunda, pero la construccion es la misma.

Se coloca primero la escuadra de manera que uno de los lados del ángulo recto *ab* coincida con la recta AB. Se aplica luego una regla á lo largo de la hipotenusa, teniendo cuidado de mantener la escuadra en la posicion en que se habia colocado. Fijando despues la regla, se corre la escuadra á lo largo de la regla hasta que el otro lado del ángulo recto *ac* venga á pasar por el punto M. La escuadra ocupa entonces la posicion *a'b'c'*, y si se traza la línea MN á lo largo de *a'c'* se tendrá la perpendicular pedida. La razon es obvia: si la escuadra es exacta, *ac* es perpendicular á AB y MN es una paralela á AC trazada por el punto M (**130**); luego MN es perpendicular á AB (**57**).

Observacion. El trazado de perpendiculares con auxilio de la regla y el compás es preferible al precedente, que no alcanza gran precision.

§ X. Valuacion de los ángulos en grados, minutos y segundos. Semi-círculo graduado.

132. Hemos ya explicado cómo los ángulos pueden valuarse en grados, minutos y segundos (**112**); réstanos describir el instrumento mediante el que puede hallarse el número de grados y fracciones de grado que vale un ángulo trazado sobre el papel : á dicho instrumento se le llama semi-círculo graduado.

Consiste en un semi-círculo de asta trasparente ó de cobre,

Fig. 90.

vacio (fig. 90) en el centro, y cuyo borde se halla divido en 180 partes iguales ó grados, y si el diámetro es suficientemente grande, cada grado se halla dividido á su vez en medios grados y algunas veces en cuartos de grado.

Para apreciar un ángulo con el semi-círculo se coloca el centro del instrumento en el vértice del ángulo (fig. 91) y su diámetro sobre el lado OA; luego se lee sobre el borde del semi-círculo la division *b* por la cual pasa el otro lado OB del ángulo.

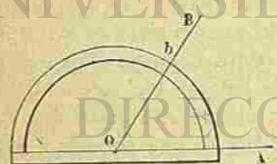

Fig. 91.

El semi-círculo es un instrumento que carece de precision, y aun en el caso que sea de grandes dimensiones y bien construido, cosa rara, no da á conocer sino ángulos con medio grado de error.

§ XI. Problemas elementales sobre la construccion de ángulos y triángulos. — Trazar una tangente por un punto exterior á un círculo. — Trazar á un círculo una tangente paralela á otra dada. — Trazar una tangente á dos círculos. — Describir sobre una recta dada un segmento que pueda contener un ángulo dado.

133. Problema. *Por un punto* A *dado sobre una recta* AB *formar con dicha recta un ángulo igual á otro dado* M (fig. 92).

Desde el vértice M como centro, con un radio cualquiera se describe un arco de círculo NP y desde el punto A como centro y con igual rádio se describe otro arco de círculo que corte á AB en el punto C. Desde el punto C como centro, con un rádio igual á la cuerda del arco PN se describe un arco de círculo que corte al arco CD en el punto D y se une A con D y el ángulo BAD es el ángulo pedido. En efecto : los arcos CD y PN del mismo rádio son iguales por tener cuerdas iguales (**91**) y por esta razon los ángulos centrales A y M que comprenden arcos iguales en círculos iguales, son iguales tambien. (**108**). Q. E. L. D.

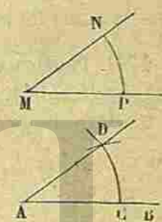

Fig. 92.

134. Observacion. El círculo graduado podria igualmente servir para resolver este problema, para lo cual se determinaria previamente el número de grados del ángulo dado M; despues se colocaria el semi-círculo de manera que, estando el centro en A, su diámetro tomara la direccion AB, para enseguida con la punta del lapiz marcar sobre el papel el punto en que cae la division del semi-círculo correspondiente á la medida del ángulo M, y juntar luego este punto con el punto A. Pero este procedimiento hemos dicho ya que carece de precision.

135. Problema. *Dados dos ángulos de un triángulo construir el tercero.*

Sean A y B los dos ángulos dados (fig. 93). Trazamos una recta indefinida MN y en el punto O tomado á voluntad sobre dicha línea formo con OM un ángulo MOC igual al ángulo A; en el mismo punto O formo con OC un ángulo COD igual al ángulo B; y el ángulo DON será el pedido, porque la suma de este ángulo y de los A y B es igual á dos rectos (**65**).

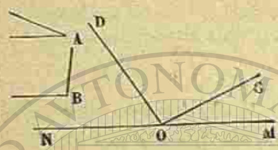

Fig. 93.

Observacion. El problema no es posible sino en el caso en que la suma de los ángulos A y B es inferior á dos rectos.

136. Problema. *Dividir una recta dada* AB *en dos partes iguales* (fig. 94).

De los puntos A y B como centros, con un mismo rádio mayor que la mitad de AB se describen dos arcos de círculo que se cortan en C por la parte superior de AB; y haciendo la misma operacion por la parte de abajo para determinar el punto D, y uniendo C con D, tendremos la perpendicular CD. Con efecto: los puntos C y D están cada uno á igual distancia de los puntos A y B; luego pertenecen á la perpendicular levantada en medio de AB, (**48**) y CD por tanto es esta perpendicular y el punto E es el medio de AB.

Fig. 94.

137. Problema. *Dividir un arco de círculo en dos partes iguales.*

Por igual procedimiento que el anterior se levanta una perpendicular en medio de la cuerda, y dicha perpendicular pasa tambien por el medio del arco (**89**).

138. Problema. *Dividir un ángulo* AOB *en dos partes iguales* (fig. 95).

Desde el vértice O del ángulo y con un rádio cualquiera se

describe un arco de círculo BA. Desde los puntos B y A con un rádio mayor que la mitad de la cuerda BA se describen dos arcos de círculo que se corten en C, y OC es la bisectriz pedida. Evidentemente: los puntos O y C, estando cada uno á igual distancia de los puntos B y A, la línea OC es perpendicular en medio de la cuerda AB; divide por tanto al arco en dos partes iguales en el punto D (**92**) y por consecuencia los ángulos BOD, DOA son iguales (**108**).

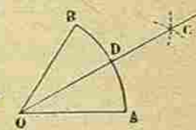

Fig. 95.

139. Problema. *Construir un triángulo del que se conoce un lado y dos ángulos.*

Dados dos ángulos de un triángulo, se encuentra el tercero restando de dos rectos el valor de los dos ángulos dados (**135**). Puede, pues, suponerse que se conocen un ángulo y los dos ángulos adyacentes.

Sea, esto sabido, *c* el lado conocido (fig. 96), A y B los dos ángulos tambien dados que deben ser adyacentes al lado conocido. Sobre una recta indefinida tomenos la longitud AB igual á *c*; en el punto A formemos un ángulo BAC igual al ángulo dado A; en el punto B, un ángulo ABC igual al ángulo dado B. Prolongadas las dos rectas AC y BC se cortan en el punto C y el triángulo ABC es el pedido.

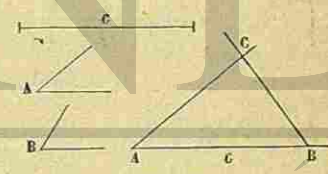

Fig. 96.

Observacion. Para que el problema sea posible, es necesario que la suma de los ángulos dados sea menor que dos rectos.

140. Problema. *Construir un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos.*

Sean *b* y *c* los lados conocidos (fig. 97) y A el ángulo dado. Formo un ángulo igual á A, y á partir de su vértice, tomo sobre uno de sus lados una longitud $AC = b$, y sobre el otro

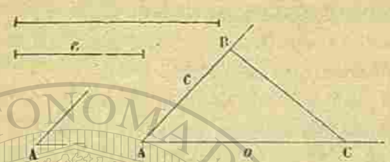

Fig. 97.

lado, otra $AB = c$. Unimos despues BC y el triángulo ABC es el pedido.

141. Problema. *Construir un triángulo del que se conocen los tres lados.*

Sean a, b, c los tres lados conocidos (fig. 98). Sobre una recta indefinida tomamos una longitud BC igual á a; desde el punto B como centro y con un rádio igual á c describimos una circunferencia; y desde el punto C como centro describimos, con un rádio igual á b, otra circunferencia que corta á la primera en dos puntos A y A′. Los dos triángulos BAC y BA′C son iguales al pedido y cualquiera de ellos será el que deseamos.

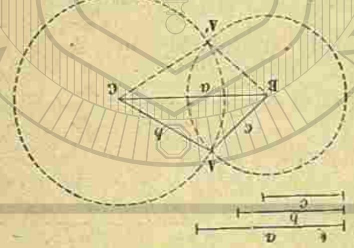

Fig. 98.

142. Observacion. Para que el problema sea posible es necesario que las dos circunferencias se corten, y para ello es bastante que la distancia de los centros sea menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia; es decir, que el lado a sea mas pequeño que la suma de los otros y mayor que su diferencia; luego:

Para que pueda construirse un triángulo con tres longitudes determinadas como lados, es necesario que una de dichas longitudes sea menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

143. Problema. *Por un punto A dado en una circunferencia de círculo, trazar una tangente á este círculo* (fig. 99).

Trazemos el radio OA y en el extremo le levantamos una perpendicular que será la tangente pedida (**97**).

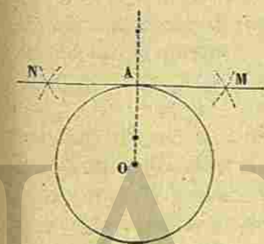

Fig. 99.

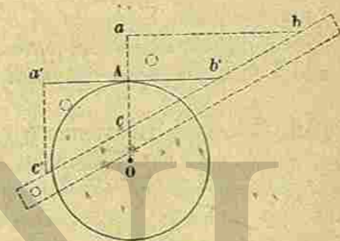

Fig. 100.

La figura 99 indica la construccion llevada á cabo con la regla y el compas (**126**); y la figura 100 la construccion mediante la regla y la escuadra. (**131**). —

144. Problema. *Desde un punto A fuera de un círculo trazar una tangente al mismo* (fig. 101).

Unamos el punto A con el centro O : tomenos la mitad C de la línea OA. Desde el punto C como centro, y con un rádio igual á CO se describe una circunferencia, de la cual AO es el diámetro y la cual corta á la circunferencia O en dos puntos D y E. Se unen despues AD y AE, que son las tangentes pedidas. En efecto : tracemos OD, OE y los ángulos ADO, AEO inscritos en semi-circunferencias son rectos (**114**). Las

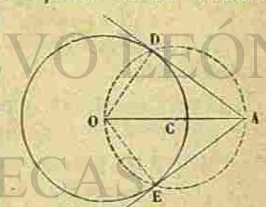

Fig. 101.

rectas AD, AE son respectivamente perpendiculares en los extremos de los rádios OD, OE y por consiguiente tangentes al círculo O (**97**).

145. Corolario. Los dos triángulos rectángulos AOD, AOE tienen la hipotenusa AO comun, OD = OE como rádios, y por consiguiente son iguales (**47**). Los lados AD y AE son iguales y el ángulo OAD = OAE, como DOA = EOA. De aquí resultan las propiedades siguientes : *Si desde un punto exterior á un círculo se le trazan tangentes, estas son iguales, y la línea que junta el punto dado con el centro, divide en dos partes iguales el ángulo de las tangentes, y el ángulo de los rádios trazados á los puntos de contacto.*

146. Problema. Trazar una tangente á un círculo paralelamente á una recta dada (fig. 102.)

Fig. 102.

Bajemos desde el centro una perpendicular á la recta dada. Dicha perpendicular encuentra al círculo en dos puntos A y B. En cada uno de estos puntos trazamos una paralela á la recta dada, y estas dos son las tangentes pedidas, porque son perpendiculares en los extremos del diámetro AB.

147. Problema. *Trazar una tangente comun á dos circunferencias.*

Dos circunferencias que tocan una misma recta pueden estar colocadas á un mismo lado de esta recta, ó en lados diversos : en el primer caso la tangente comun se llama *exterior;* en el segundo, *interior*.

Busquemos en primer lugar las tangentes comunes exteriores á los círculos O y O′ (fig. 103). Sea AB una de estas tangentes. Tracemos los rádios OA y O′B que terminan en los dos puntos de contacto, y por el centro O′ de la circunferencia menor, trazo O′C paralela á AB. Los dos rádios OA y O′B per-

pendiculares á una misma recta AB, son paralelos. Las líneas O′B y CA son tambien paralelas comprendidas entre paralelas y por consiguiente son iguales (**72**). Además OC = OA — CA, y como CA = O′B, OC es igual OA — O′B, es decir á la diferencia de los rádios de las dos circunferencias. Tambien,

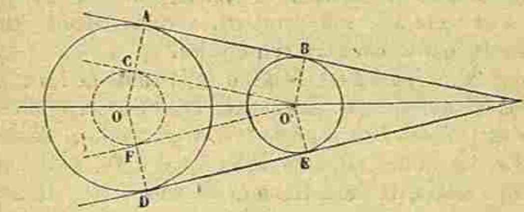

Fig. 103.

OA perpendicular á AB lo es tambien á CO′ paralela á AB Resultando de todo que si desde el punto O, como centro y con un rádio OC describimos un círculo, la línea O′C es tangente á este círculo, puesto que es perpendicular en el extremo del rádio OC.

Se deduce de este análisis la construccion siguiente de la tangente exterior : desde el centro de la circunferencia mayor, con una abertura de compás igual á la diferencia de los rádios se describe una circunferencia, y por el centro O′ de la menor se traza una tangente á la circunferencia que se ha descrito. Se une el punto de contacto C con el centro O, y se prolonga esta línea hasta que en A se encuentre con la circunferencia mayor. Por el punto A se traza una paralela á O′C, y esta línea es la tangente pedida. Como desde el punto O′ pueden trazarse dos tangentes al círculo OC, se obtienen dos tangentes comunes exteriores, AB, DE.

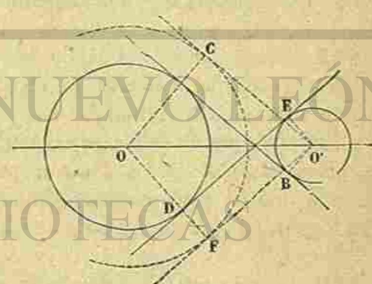

Fig. 104.

Veamos ahora como se trazan las tangentes comunes interiores. Sea AB (fig. 104) una de estas tangentes. Tracemos los rádios OA y O'B que terminan en los puntos de contacto. Por el centro O' de la una de las circunferencias trazamos una paralela O'C á la tangente AB hasta que se encuentre en C con la prolongacion del rádio OA. Las dos líneas O'B y CA perpendiculares á la recta AB, son paralelas, y como ademas están comprendidas entre paralelas, son iguales.

La línea OC es igual á OA + O'B ó á la suma de los rádios de las dos circunferencias. Ademas la línea OC perpendicular á AB lo es tambien á su paralela O'C, y por tanto si desde el punto O como centro, con un rádio igual á OC se describe una circunferencia, la línea O'C será tangente á esta circunferencia.

De ello resulta la construccion siguiente : desde el centro O de una de las circunferencias con una abertura de compás igual á la suma de los rádios se describe un círculo. Desde el centro O' de la otra circunferencia se traza una tangente O'C al círculo que se ha trazado : se traza ademas el rádio OC del punto de contacto, cuyo rádio corta á la primera de las circunferencias dadas en el punto A y por este punto se traza una paralela á O'C que será la tangente comun pedida. Trazando por el punto O' la segunda tangente O'F á la circunferencia OC se obtendrá una segunda tangente comun interior DE.

148. Observacion I. Cuando las dos circunferancias son iguales no puede aplicarse la construccion precedente en cuanto á la tangente comun exterior; pero desde luego se nota con facilidad que en este caso las tangentes exteriores son paralelas á la línea de los centros, por consiguiente, bastará trazar á uno de estos círculos tangentes paralelas á la línea de los centros, cosa que ya se sabe hacer (**146**).

149. Observacion II. Cuando las circunferencias son exteriores una á otra, como en las figuras precedentes, pueden trazarse cuatro tangentes comunes, dos interiores y dos exteriores.

Cuando las dos circunferencias son tangentes exteriormente, pueden trazárseles dos tangentes comunes exteriores y una sola tangente comun interior.

Si las circunferencias se cortan, pueden todavía trazárseles dos tangentes comunes exteriores, pero no tienen tangente comun interior.

Cuando son las circunferencias tangentes interiormente, no tienen mas que una tangente comun que es exterior.

Finalmente, en el caso de ser las circunferencias interiores, no tienen tangente comun.

150. Observacion III. Es útil llamar la atencion sobre el método que hemos seguido para dar solucion al problema precedente, y que lleva por lo comun el nombre de método *analítico*. Hemos supuesto que el problema está resuelto, que está trazada una de las tangentes comunes, y por un análisis exacto de las condiciones que debe reunir esta línea, hemos hallado la construccion que es menester ejecutar para obtener dichas condiciones. Cuando los problemas no ofrecen una solucion inmediata, suele emplearse este procedimiento para hallarla.

151. Problema. *Describir sobre una recta dada* AB *un segmento capaz de un ángulo dado* K (fig. 105.)

Supongamos el problema resuelto y sea O el centro del círculo buscado. Este centro se encuentra en la perpendicular levantada en medio de la recta AB (**89**). En el punto A trazamos la tangente AC al círculo. El ángulo BAC tiene por medida la mitad del arco AB (**118**); luego es igual al ángulo inscrito en el segmento AMB y por consiguiente al ángulo K. Para obtener esta línea AC, se formará en el punto A un ángulo igual al ángulo K. Despues se elevará en el punto A una perpendicular á AC. Esta línea pasará por el centro (**98**). Este quedará determinado por el punto

Fig. 105.

de encuentro de la recta AO con la perpendicular levantada en medio de AB. Desde el punto O como centro, con OA por rádio, se trazará una circunferencia cuya porcion AMB, sobre AB será el segmento pedido.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO II

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Dos secantes paralelas interceptan en la circunferancia correspondiente dos arcos iguales. — Caso en que una de las secantes sea tangente ó que lo sean las dos.

2. Dada una circunferencia O y un punto exterior A; desde el punto O, como centro, se describe una segunda circunferencia que tenga un rádio doble del de la circunferancia dada. Desde el punto A como centro, con OA par rádio, una segunda circunferencia que corte la precedente en dos puntos B y C. Júntese OB y OC. Estas líneas cortan la circunferencia dada en dos puntos D y E. Demostrar que AD y AE son tangentes á la circunferencia dada.

3. Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible en un círculo.

4. Si por el punto C, medio de un arco AB de una circunferencia se trazan dos cuerdas, la primera que corte la cuerda AB en D y la circunferencia en E, y la segunda que corte la cuerda AB en F y la circunferencia en G, el cuadrilátero DFGE es inscriptible.

5. Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera forman un cuadrilátero inscriptible.

6. Las perpendiculares bajadas desde los vértices de un triángulo sobre los lados opuestos son las bisectrices de los ángulos del triángulo formado por los piés de estas perpendiculares.

7. Si desde un punto cualquiera de una circunferencia circunscrita á un triángulo se bajan perpendiculares sobre los tres

lados de este triángulo, los piés de estas perpendiculares están en línea recta.

8. Si por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes se trazan los diámetros de las dos circunferencias, la línea que une los extremos de estos dos diámetros pasa por el segundo punto de interseccion de las dos circunferencias y corta la cuerda comun en ángulo recto.

9. Si por el punto de contacto de dos circunferencias tangentes se les trazan dos secantes cualesquiera, las cuerdas que pasan por los puntos de interseccion de estas secantes con cada circunferencia, son paralelas.

10. Por un punto A exterior á un círculo O se traza una secante ABC, cuya parte exterior AB es igual al rádio; se junta OB y OC y se traza el diámetro AOD que pasa por el punto A: y esto así, demostrar que el ángulo COD es triplo del ángulo AOB,

11. En un cuadrilátero circunscrito á un círculo, es decir, que sus cuatro lados son tangentes al círculo, la suma de los dos lados opuestos es igual á la de los otros dos; y recíprocamente.

12. Desde un punto A tomado en una circunferencia se trazan dos cuerdas á lados diversos del punto A; la línea que une el medio de los arcos subtendidos por las cuerdas las corta en dos puntos equidistantes del punto A.

12. Se da una circunferencia y dos tangentes á ella, que parten de un punto A. Se traza una tercera tangente variable que forma con las dos primeras un triángulo exterior al círculo. Debe demostrarse que el perímetro de este triángulo es constante, como el ángulo bajo el que se ve desde el centro el lado opuesto al punto A, cualquiera que sea la tangente. — ¿Cómo seria menester modificar el enunciado del teorema, si la tangente variable estuviera trazada de modo que el círculo fuera interior al triángulo formado por las tres tangentes?

14. Las bisectrices de los ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito son perpendiculares.

15. En un triángulo los medios de los tres lados, los piés de las perpendiculares bajadas desde los vértices á los lados y los medios de las distancias del punto de reunion de estas per-

pendiculares á los tres vértices, son nueve puntos de una misma circunferencia.

16. En un triángulo isósceles ABC en el que se supone AB = AC, se traza una circunferencia tangente al lado AB en el punto B y con su centro sobre AC : se prolonga la base BC hasta que encuentre la circunferencia en el punto D. Hay que demostrar que el rádio que pasa por el punto D es perpendicular á AC.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Trazadas por todos los puntos de una circunferencia líneas paralelas iguales entre sí y dirigidas en el mismo sentido, hallar el lugar geométrico de los extremos de estas líneas.

2. Dada una circunferencia y un punto interior, hallar la cuerda menor que pasa por este punto.

3. Trazadas en una circunferencia cuerdas que tengan una misma longitud, hallar el lugar geométrico de los medios de estas cuerdas.

4. Por un punto dado en el plano de un círculo trazar una secante que sea tal que la cuerda comprendida por la circunferencia en esta secante tenga una longitud dada. — Discusion del problema.

5. Por un punto fijo tomado en el plano de un círculo se trazan secantes, y se desea hallar el lugar de los medios de las cuerdas comprendidas en estas secantes.

6. Por un punto de una circunferencia se trazan una infinidad de cuerdas, y cada una se prolonga otro tanto de su longitud. ¿Cúal es el lugar de los extremos de estas rectas?

7. Sea un arco de círculo y su cuerda AB. Se consideran todos los triángulos formados uniendo un punto cualquiera del arco de círculo con las extremos de la cuerda. En cada uno de dichos triángulos se bajan desde los puntos A y B perpendiculares á los lados opuestos, y se desea saber cuál es el lugar geométrico de los puntos de encuentro de estas perpendiculares.

8. Tomados arbitrariamente cuatro puntos en un plano, trazar por estos puntos cuatro rectas paralelas dos á dos, y que formen un cuadrado mediante sus mútuas intersecciones.

9. Describir con un rádio dado un círculo que pase por dos puntos dados.

10. Describir con un rádio dado un círculo que pase por un punto dado tambien y que sea tangente á una recta dada. Discusion.

11. Trazar con un rádio dado un círculo tangente á dos rectas dadas. Discusion.

12. Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y que tenga su centro en una recta ó una circunferencia dada. Discusion.

13. Describir un círculo tangente á tres rectas dadas.

14. Describir un círculo tangente á una recta dada, que pase por un punto dado tambien y que tenga su centro en una línea que pase por este último punto.

15. Construir un triángulo, conociendo dos lados y la mediana que cae en uno de ellos.

16. Construir un triángulo, conociendo dos lados y la mediana que cae sobre el tercero. Discusion.

17. Construir un triángulo, conociendo un lado, el ángulo opuesto, y la distancia del lado dado al vértice opuesto. Discusion.

18. Construir un triángulo, conociendo un lado, el ángulo opuesto y la suma ó la diferencia de los otros dos lados. Discusion.

19. Construir un triángulo, conociendo un lado, uno de los ángulos adyacentes y la suma ó la diferencia de los otros dos lados.

20. Construir un triángulo, conociendo los piés de las perpendiculares bajadas desde los tres vértices á los lados opuestos.

21. Construir un triángulo rectangulo, conociendo la hipotenusa y la diferencia entre esta línea y uno de los lados del ángulo recto.

22. Construir un rectángulo, conociendo un lado y el ángulo de las diagonales.

23. Construir un paralelógramo conociendo las diagonales y su ángulo.

24. Construir un trapecio conociendo los cuatro lados.

25. Construir un pentágono, conociendo los puntos medios de los cinco lados.

26. Trazar por un punto exterior á una circunferencia una secante cuya parte exterior sea igual á la cuerda comprendida por la circunferencia.

27. Por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes trazar una recta tal que la suma de las cuerdas comprendidas sobre esta recta por las dos circunferencias tenga una longitud determinada.

28. Trazar una circunferencia que pase á igual distancia de cuatro puntos dados que no están en línea recta.

29. Una circunferencia gira sin resbalar en el interior de otra circunferencia de rádio doble que la primera, y se desea encontrar la línea descrita por un punto de la circunferencia móvil.

30. Dado un círculo y dos tangentes al mismo, trazar una tercera, cuya parte comprendida entre las dos primeras tangentes sea igual á una longitud dada. (Concurso general de la clase de tercera, 1868.)

31. Dadas dos circunferencias O y O′ que se cortan, se traza por uno de los dos puntos comunes una secante que encuentra la circunferencia O en un punto B y la circunferencia O′ en un punto B′. Se une el punto B con el centro O y el punto B′ con el centro O′. Las dos rectas así trazadas se cortan en un punto M : y se pregunta cuál es el lugar de este punto. (Concurso general de la clase de tercera, 1875.)

32. Dos circunferencias se cortan en dos puntos. Por uno de los puntos comunes se trazan dos rectas rectangulares cualesquiera, que prolongadas cuanto sea necesario, cortan la primera circunferencia en los puntos A y B y la segunda en los A′ y B′. Se trazan las dos líneas AB y A′B′, y se desea encontrar el lugar de su punto de interseccion. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1869.)

33. Dada una recta AB y dos puntos C y D exteriores á esta recta y situados á un mismo lado, encontrar en la recta un punto M, tal que el ángulo CMA sea doble del DMB.

34. Se inscriben en un círculo dado todos los triángulos de los cuales dos lados son respectivamente paralelos á dos rectas fijas dadas, y se pide el lugar de los centros de los círculos inscritos en estos triángulos. (Concurso general de la clase de filosofía, 1873.)

LIBRO III

DE LAS ÁREAS

§ XII. Medida de las áreas. — Área del rectángulo, del paralelógramo, del trapecio, de un polígono cualquiera. — Área aproximada de una figura limitada por una curva cualquiera. — Teorema del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo. — Numerosas aplicaciones numéricas.

152. Definiciones. Se llama *área* la extension de una superficie. Las dos palabras *área* y *superficie*, tienen sentidos diversos, puesto que la segunda se refiere á la forma de la superficie, y la primera á su extension. Cuando no puede haber confusion, en el lenguage usual se dice *superficie* por *área*, y otras veces se emplea la palabra *superficie* como sinónima de *área*.

Dos figuras *equivalentes* son las que tienen áreas iguales, sean ó no superponibles. Así un triángulo puede ser equivalente á un rectángulo, á un paralelógramo, á un un círculo.

153. Se toma por *unidad de área* el área de un cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud: por consiguiente, cuando se toma el metro por unidad de longitud, es necesario tomar por unidad de área el *metro cuadrado*, ó el cuadrado que tiene por lado un metro. Del mismo modo, cuando se miden longitudes por medio del decímetro, se deben medir las áreas tomando como unidad el cuadrado que tiene un decímetro de lado y que se llama *decímetro cuadrado* y así en adelante. Segun esto, las unidades superficiales empleadas en Francia son: el *miriámetro cuadrado*, el *kilómetro cuadrado*, el *hectómetro cuadrado*, el *decámetro cuadrado*, el *metro*, el *decímetro*, *centímetro y milímetro cuadrados*. En la medidá de superficies

de los campos se emplean esclusivamente el hectómetro, decámetro y metro cuadrado, á los que se les denomina para el caso *hectárea*, *área* y *centiárea*, y á todas se las llama medidas *agrarias*.

154. El *decámetro cuadrado* vale cien *metros cuadrados*. Con efecto: coloquemos diez metros cuadrados unos al lado de otros á lo largo de una recta AB, y obtendremos un rectángulo de diez metros de largo por uno de ancho: coloquemos despues unos al lado de otros diez rectángulos iguales ál anterior, de manera que se toquen por su longitud, y formaremos evidentemente un cuadrado ABCD, que tendrá diez metros de lado, es decir, un decámetro cuadrado. Dicho cuadrado se compone de diez rectángulos iguales, cada uno de los que contiene diez metros cuadrados. Luego el cuadrado en cuestion vale diez veces diez, ó sean cien metros cuadrados (fig. 106).

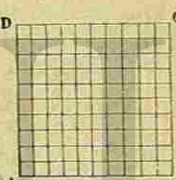

Fig. 106.

De igual manera se demostraria que el miriámetro cuadrado vale cien kilómetros cuadrados; el kilómetro cuadrado 100 hectómetros cuadrados, etc., y en general, *que cada una de las unidades de área vale 100 veces la que le sigue inmediatamente en órden inferior de magnitud*. Resulta de esta sencillez de relaciones que bastará para pasar de una de estas unidades á otra, multiplicar ó dividir los números que expresan las áreas, por 100, 10,000 ó 1,000,000, etc. Lo cuál se hace fácilmente sin cálculo.

Cuando, v. g., se exprese un área en hectómetros cuadrados, bastará multiplicar el número que la represente por 100 si se desea expresarla en decámetros cuadrados; por 10,000 si se quiere referir á metros cuadrados y así en adelante.

155. Se llaman *bases* de un paralelógramo dos lados opuestos cualesquiera, y *altura* la longitud de una perpendicular comun á las dos bases. En un rectángulo la base y la altura son dos lados consecutivos del rectángulo : se las llama en este caso usualmente *dimensiones* del rectángulo.

Se llama *base* de un triángulo la longitud de un lado cualquiera; y *altura*, la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice opuesto á esta base.

Por último, se llaman *bases* de un trapecio las longitudes de los lados paralelos, y *altura* la longitud de la perpendicular comun á las dos bases.

156. Teorema. *El área de un rectángulo tiene por medida el producto de su base por su altura.*

Consideremos primeramente el caso en que los lados del rectángulo son dos múltiplos exactos de la unidad de longitud : supongamos, por ejemplo, que la base del rectángulo ABCD (fig. 107) sea igual á cinco metros, y la altura á tres. Dividamos AB en cinco parte iguales; todas ellas serán metros. Por cada uno de los puntos de division de AB se trazan paralelas á AD, y por cada uno de los de AD, paralelas á AB. Estas líneas descompondrán el rectángulo en cuadrados que tienen todos un metro de lado, y que son por tanto metros cuadrados. Basta contarlos : cinco de estos cuadrados se hallan colocados á lo largo de AB y forman un trozo, y el rectángulo entero contiene tres trozos paralelos, esto es, tres veces cinco metros cuadrados, ó en otros términos, su área es igual á :

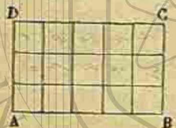

Fig. 107.

$$5 \times 3 = 15 \text{ metros cuadrados,}$$

y se halla perfectamente expresada por el producto de la base por la altura.

Supongamos en segundo lugar que las dimensiones del rectángulo no sean múltiplos de la unidad de longitud : tomemos, por ejemplo, un rectángulo cuya base sea igual á $5^{m},2$ y cuya altura sea $1^{m},83$. Para referir este caso al precedente, tomo el centímetro por medida de longitud y por consecuencia el centímetro cuadrado por unidad de área; la base será

520 centímetros y la altura 183 centímetros; y el área del rectángulo será, segun la demostracion precedente,

$$520 \times 183 \text{ centím. cuadrados}$$

Ahora es necesario expresar este área en metros cuadrados : para esto sabemos que el centímetro cuadrado es la diezmilesima parte del metro cuadrado, y que por tanto para referir el área encontrada al metro cuadrado como unidad, bastará dividir el número producido, por 10,000, es decir, separar cuatro cifras decimales de la derecha del producto 520×183, y dará justamente el producto de los dos números decimales 5,2 y 1,83, y el área buscada será por consiguiente

$$5,2 \times 1,83 = 9^{mc},516.$$

El área se obtiene en casos semejantes, tambien multiplicando los números que representan la base y la altura del rectángulo. Q. E. L. D.

157. Observacion. Es indispensable para que este teorema sea exacto que las dos dimensiones del rectángulo se expresen mediante la misma unidad de longitud, lo cual resulta evidente de la demostracion anterior. Así, cuando se pide el areá de un rectángulo cuya base es igual á 67 metros y la altura por 4 decímetros, será necesario en primer término referir estas dos líneas á una misma unidad, al metro, por ejemplo, lo que dará 67 metros y $0^{m},4$ y por tanto el área será igual á $67 \times 0,4 = 26^{mc},8$.

158. Corolario. *El área de un cuadrado tiene por medida el cuadrado de su lado.*

Con efecto : un cuadrado no es otra cosa que un rectángulo cuyas dos dimensiones son iguales entre sí, siendo necesario, para obtener el areá, multiplicar el lado por sí mismo, es decir, formar el cuadrado de este lado.

Resulta de lo dicho que para obtener el lado de un cuadrado cuya área sea conocida, será indispensable extraer la raiz cuadrada del número que exprese la medida de este área Si el área de un cuadradro es, pues, igual á 64 metros cuadrados, el lado de este cuadrado será $\sqrt{64}$ ó sean 8 metros.

Aplicaciones. I. Una parcela de tierra rectangular tiene $258^{m},6$ de longitud y $123^{m},45$ de anchura, y se desea hallar el área de dicha parcela y expresarla en hectáreas, áreas y centiáreas.

El área es igual á $258^{m},6 \times 123^{m},45 = 31,924^{mc},17$ y como el área es un decámetro cuadrado, vale por consiguiente 100 metros cuadrados, y como la hectárea vale 100 veces mas ó 10,000 metros cuadrados, el área propuesta equivale á tres hectáreas, 19 áreas, 24 centiáreas, 17 decímetros cuadrados.

II. Uno de los lados de una habitacion es un muro de forma rectangular que tiene $4^{m},72$ de largo por $3^{m},40$ de altura y se quiere cubrir con papel pintado cuya anchura es $0^{m},465$: cuánto papel se necesitará ?

Todas las bandas de papel puestas unas á continuacion de otras formarian una superficie rectangular $0^{m},465$ de anchura, equivalente á la del muro, es decir, á $4^{m},72 \times 3^{m},40$ metros cuadrados. Para obtener la longitud del papel bastará dividir $4^{m},72 \times 3^{m},40$ por $0^{m},465$, y la longitud seria

$$\frac{4,72 \times 3,40}{0,465} = 34^{m},58,$$

con un centímetro de diferencia.

III. Una losa cuadrada tiene $27^{c},5$ de lado : ¿ cuál es su área ?

Basta formar el cuadrado de 27,5, que es $756^{cc},25$, ó de otro modo 7 decímetros cuadrados, 56 centímetros cuadrados, y veinticinco milímetros cuadrados.

IV. El área de un cuadrado es igual á $17^{mc},368$; ¿cuál es su lado ?

Basta extraer la raiz cuadrada de 17,368, que da $4^{m},167$ con un milímetro de error.

V. Hallar el lado de un cuadrado equivalente á un rectángulo cuyas dimensiones son : $3^{m},2$ y $4^{m},75$.

El área del cuadrado es igual á $3,2 \times 4,75 = 15^{mc},2$ y su lado seria igual á la raiz cuadrada de este número, esto es, á $3^{m},858$, con un milímetro de diferencia.

159. Teorema. El área de un parolelógramo tiene por medida el producto de su base por su altura (fig. 108).

Sea ABCD el paralelógramo que se va á medir. Por los extremos A y B de la base levanto perpendiculares á esta línea hasta que encuentren el lado opuesto en E y en F, formando de esta suerte el rectángulo ABEF, que digo que es equivalente al paralelógramo ABCD.

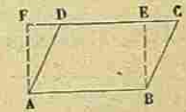

Fig. 108.

En efecto : los dos triángulos rectángulos AFD, BEC tienen las hipotenusas AD y BC iguales como paralelas comprendidas entre paralelas, y los lados AF y BE iguales por la misma razon ; luego estos triángulos son iguales (**47**). Esto dicho, si del trapecio ABCF se quita el triángulo ADF queda el paralelógramo ABCD, y si del mismo trapecio se quita el triángulo BEC igual al primero, queda el rectángulo ABEF, y por tanto este rectángulo es equivalente al paralelógramo. Ahora bien : el área del rectángulo tiene por medida el producto $AB \times BE$; luego el área del paralelógramo tiene la misma medida, es decir, el producto de su base por su altura, $AB \times BE$. Q. E. L. D.

160. Teorema. *El área de un triángulo tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura* (fig. 109).

Sea ABC un triángulo que tiene por base AB y por altura CE. Por los vértices B y C se trazan paralelas á los lados opuestos y se forma de este modo un paralelógramo ABDC que tiene la misma base AB y la misma altura CE que el triángulo ABC. Los dos triángulos ABC, BCD son iguales por tener los tres lados iguales, y por tanto el triángulo ABC es la

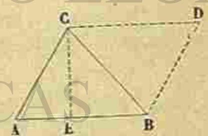

Fig. 109.

mitad del paralelógramo ABCD. El área de este último tiene por medida el producto $AB \times CE$; luego el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura. Q. E. L. D.

161. Corolario I. *Todo triángulo es la mitad del rectángulo que tenga la misma base y la misma altura.* Esto es lo que resulta relacionando los teoremas n.os **156** y **160**.

162. Corolario II. *Dos triángulos que tienen la misma base y la misma altura son equivalentes* (fig. 110). Porque tienen la misma medida.

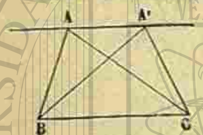

Fig. 110.

Los dos triángulos ABC, A'BC que tienen la misma base BC y sus vértices A y A' en una misma paralela á la base, son equivalentes, porque sus alturas son iguales (**75**).

163. Corolario III. *Dos triángulos que tienen la misma base, son entre sí como sus alturas, y dos triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.* Tomemos primero dos triángulos que tienen la misma base B y sean H y H' sus alturas: las áreas respectivas de dichos dos triángulos serán:

$$\frac{1}{2} B \times H, \qquad \frac{1}{2} B \times H',$$

y la relacion de estas dos áreas se expresará por el cociente

$$\frac{\frac{1}{2} B \times H}{\frac{1}{2} B \times H'}$$

cuyo cociente no cambiara si se dividen sus dos términos por $\frac{1}{2}$ B, resultando igual $\frac{H}{H'}$, es decir á la relacion de las alturas. E. L. D.

El mismo razonamiento servirá para demostrar que la relacion de dos triángulos de la misma altura es igual á la relacion de las bases.

Observacion: Del mismo modo puede demostrarse *que dos rectángulos ó dos paralelógramos que tienen la misma base, son entre sí como las alturas, y que dos rectángulos ó dos paralelógramos que tienen la misma altura, son entre sí como las bases.*

Aplicaciones I. La base de un triángulo es igual á $72^{m},25$ y su altura á $45^{m},40$; y se pregunta cuál será su área.

Será igual á

$$\frac{1}{2}\, 72{,}25 \times 45{,}40 = 72{,}25 \times 22{,}70 = 1640^{mc}{,}075$$

ó bien 16 decámetros cuadrados, 40 metros cuadrados, 7 decímetros cuadrados y 50 centímetros cuadrados.

II. Hallar el lado de un cuadrado equivalente al triángulo que precede.

Será la raíz cuadrada del número 1640,075 que mide el área, es decir $40^{m},498$ con menos de un milímetro de exceso.

III. El área de un triángulo es igual á $74^{decametc},469$ y su base á $401^{m},8$ y se desea saber cuál será la altura.

Para ello comenzamos por referir el área y la base dadas á unidades correspondientes, el área al metro cuadrado, puesto que la base se refiere al metro. El área será, pues, $7446^{mc},9$ Este número es igual al producto de la base por la mitad de la altura, y por tanto se obtendria esta dividiendo el área 7446,9 por la mitad de la base, por 200,9, de lo cual resultaria $37^{m},068$, con menos de un milímetro de exceso.

164. Teorema. *El area de un trapecio tiene por medida el producto de la semi-suma de sus bases paralelas por su altura.*

Sea ABCD un trapecio cuyas bases son AB y DC (fig. 111) y cuya altura es DH. Prolongemos la base AB tanto como sea la longitud de la otra base, BE = DC, y tiremos DE que encuentra en F el lado BC del trapecio. Los dos triángulos BEF, CDF tienen los lados BE y CD iguales por construccion, los ángulos BEF, CDF, iguales como alternos internos formados por las paralelas BE y DC cortadas por la secante DE, y los ángulos EBF, DCF iguales por la misma razon, luego los dos triángulos son iguales (**41**). Si los resto sucesivamente del polígono total AEFCD, el trapecio ABCD y el triángulo ADE, que obtengo como residuos, son equivalentes. El triángulo ADE tiene por medida $\frac{1}{2}AE\times DH$ ó bien $\frac{AB+CD}{2}\times DH$, puesto que $AE=AB+CD$; luego el área del trapecio tiene por medida la expresion $\frac{AB+CD}{2}\times DH$, es decir, el producto de la semi-suma de las bases por la altura. Q. E. L. D.

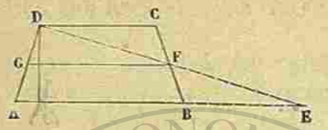

Fig. 111.

165. PROBLEMA. Construir un triángulo equivalente á un polígono dado ABCDE (fig. 112).

Separemos del polígono un triángulo ABC por la diagonal AC. Por el vértice B tracemos una paralela á AC hasta que encuentre á DC, prolongado hasta F, y unamos A con F. Los dos triángulos ACB, ACF tienen la misma base AC y sus vértices B y F en una misma paralela á la base, y por tanto son equivalentes (**162**), pudiendo reemplazarse el triángulo ABC por el ACF sin alterar el área del polígono, y el nuevo que resulta AFDE es equivalente al polígono dado, con la diferencia de que tiene un lado menos. Siguiendo en esta manera de proceder, se concluiria por llegar á un triángulo GAF equivalente el polígono dado.

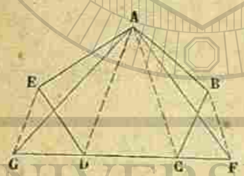

Fig. 112.

166. PROBLEMA *Hallar el área de un polígono cualquiera.*

Primer método. Se descompone el polígono ABCDE (fig. 113) dado, en triángulos por medio de diagonales procedentes de un mismo vértice A. Se miden las áreas de todos estos triángulos y se suman. Así en la figura indicada, en la cuál se han trazado las alturas de los diversos triángulos, el área del polígono tiene por medida la suma siguiente

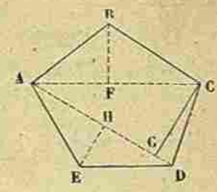

Fig. 113.

$$\frac{1}{2}AC\times BF+\frac{1}{2}AD\times CG+\frac{1}{2}AD\times EH.$$

Segundo método. En el polígono ABCDEFG (fig. 114) trazamos una diagonal AE y desde todos los vértices se bajan perpendiculares á esta diagonal, descomponiendo así el polígono en trapecios y en triángulos rectángulos. Sumando las áreas de los trapecios y de los triángulos, tendremos el área del polígono. Estando las alturas de los trapecios y triángulos dirigidas á la diagonal AE, basta para tener todas las áreas parciales, medir las diversas partes de la diagonal y las perpendiculares BB′, CC′, etc. El área del polígono, tendrá, pues, por medida la suma.

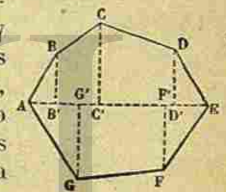

Fig. 114.

$$\frac{1}{2}BB'\times AB'+\frac{BB'+CC'}{2}\times B'C'+\frac{CC'+D'D}{2}\times C'D'$$
$$+\frac{1}{2}DD'\times D'E+\frac{1}{2}FF'\times EF'+\frac{FF'+GG'}{2}\times F'G'$$
$$+\frac{1}{2}GG'\times AG'.$$

Este método es el mas cómodo sobre el terreno.

Tercer método. Se transforma el polígono dado en un triángulo equivalente (**165**) y se mide el área de este triángulo. Este método es el mas rápido, cuando el polígono dado está sobre el papel.

Aplicaciones I. Medir el área del polígono ABCDE (fig. 113) sabiendo que

$$AC=22^{m},\qquad CG=11^{m},25,$$
$$AD=21^{m},30,\qquad EH=6^{m},$$
$$BF=17^{m},80.$$

El área pedida es igual á

$$\frac{1}{2}.\,22\times17,80+\frac{1}{2}.\,21,50\times11,25+\frac{1}{2}21,50\times6$$

ó simplificando;

$$11\times17,80+10,65\times17,25=203^{mc},2925.$$

II. Medir el área del polígono ABCDEFG, (fig. 114), sabiendo que

$$AB'=3^{m},80,\qquad C'D'=10^{m},10,$$
$$B'C'=5^{m},70,\qquad D'E=4^{m},50,$$
$$EF'=5^{m},80,\qquad CC'=10^{m},82,$$
$$F'G=11^{m},55,\qquad DD'=7^{m},50,$$
$$G'A=6^{m},75,\qquad FF'=8^{m},70,$$
$$BB'=6^{m},40,\qquad GG'=10^{m}.$$

El área pedida será igual á

$$\frac{6,40}{2}\times3,80+\frac{6,40+10,82}{2}\times5,70$$
$$+\frac{10,82+7,50}{2}\times10,10+\frac{7,50}{2}\times4,50+\frac{8,70}{2}\times5,80$$
$$+\frac{8,70+10}{2}\times11,55+\frac{10}{2}\times6,75.$$

que haciendo todos los cálculos será en resúmen $337^{mc},6005$.

167. Problema. Hallar el área aproximada de una figura limitada por una curva.

Para ello se marcan sobre la curva una porcion de puntos bastante próximos unos á otros, con el fin de que pueda asimilarse á una línea recta la parte de curva comprendida entre dos de ellos, y se reemplaza la línea curva por una quebrada, cosa que se obtiene uniendo dos á dos estos puntos. El área del polígono así obtenido difiere poco del área dada, y puede substituirse una por otra. Como se comprende, el error cometido es tanto menor mientras mas próximos se hallen los vértices unos á otros.

168. Teorema. *El cuadrado* BCDE *formado sobre la hipotenusa* BC *de un triángulo rectángulo* ABC, *es equivalente á la suma de los cuadrados* ABFG *y* ACHK *construidos sobre los dos lados del ángulo recto* (fig. 115).

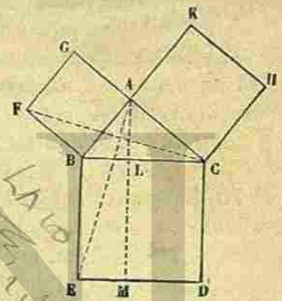

Fig. 115.

Bajemos desde el punto A sobre BC una perpendicular AL que se prolonga hasta encontrarse con DE en M, y decimos que el rectángulo LBEM es equivalente al cuadrado ABFG; porque, uniendo AE y CF, los dos triángulos ABE, FBC tienen el lado AB=FB, como lados de un mismo cuadrado; BE=BC por la misma razon, y el ángulo ABE igual al FBC, como formados los dos agregando un ángulo recto al ABC, y por tanto los dos triángulos son iguales.

Ahora bien: el triángulo ABE tiene la misma base que el rectángulo BEML y la misma altura, puesto que el vértice A del triángulo está sobre la prolongacion de la otra base; luego el área del rectangulo BELM es doble de la del triángulo ABE (164). De igual modo el triángulo FBC tiene la misma base BF que el cuadrado ABFG y la misma altura, puesto que su vértice C está sobre la prolongacion de AG; luego el área del cuadrado ABFG es doble de la del triángulo FBC. Por consiguiente el rectángulo BELM es equivalente al cuadrado ABFG.

Del mismo modo se demostraria que el rectángulo CLMD es equivalente al cuadrado ACHK, quedando demostrado finalmente que CBDE que es la suma de los dos rectángulos, es equivalente á la suma de los dos cuadrados ABFG, ACHK. Q. E. L. D.

Observacion. El descubrimiento de esta propiedad notable del triángulo rectángulo se atribuye al filósofo griego Pitágoras.

169. Corolario. El área del cuadrado construido sobre BC tiene por medida el cuadrado del número que mida BC; y de igual manera, la medida de los cuadrados formados sobre AB y sobre AC tiene respectivamente por expresion los cuadrados de los números que midan á AB y AC; luego el teorema precedente, puede tambien enunciarse de la manera siguiente:

El cuadrado del número que mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los números que miden los dos lados del ángulo recto.

170. Problema. *Dos lados de un triángulo rectángulo se nos dan en números, y se desea saber cuál es el tercero.*

Primer caso. Se dan los dos lados del ángulo recto.

Supongamos que los dos lados sean iguales uno á $7^m,50$, y el otro á 10^m; el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de estos dos números, es decir á

$$7{,}50^2 + 10^2 = 56{,}25 + 100 = 156{,}25$$

y por consiguiente, se obtendrá la hipotenusa, extrayendo la raiz cuadrada de este número, que será $12^m,5$.

Para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los dos lados del ángulo recto, no hay que hacer mas que sumar los cuadrados de los números dados y estraer la raiz cuadrada de esta suma.

Segundo caso. Se nos dan la hipotenusa y uno de los lados del ángulo recto. Supongamos, v. g: que la hipotenusa sea igual á 5 m. y uno de los lados del ángulo recto á 3 m. El cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los dos lados del ángulo recto. Si, pues, del cuadrado de la hipotenusa se sustrae el cuadrado de uno de los lados del

ángulo recto, se tendrá el cuadrado del otro lado, y en el caso propuesto el cuadrado del lado desconocido será igua á

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de 16 se tendrá el valor del lado, que sera 4 m.

Cuando se conoce en un triángulo rectángulo la hipotenusa y uno de los lados del ángulo recto, para averiguar el valor del otro lado, se resta del cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del lado dado, y se extrae luego la raiz cuadrada de la diferencia que resulte.

171. Problema. *Construir un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados dados.*

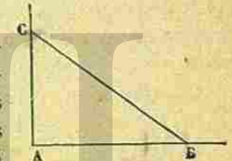

Fig. 116.

Primer caso. Propongámonos, primeramente construir un cuadrado equivalente á la suma de dos cuadrados cuyos lados son conocidos. Sobre los lados de un ángulo recto, se toman á partir del vértice A (fig. 116), dos longitudes AB y AC respectivamente iguales á los lados de los cuadrados dados, y uniendo BC, esta línea es el lado del cuadrado que se busca (**168**).

Segundo caso. Propongámonos, en segundo lugar, construir un cuadrado igual á la diferencia de dos cuadrados dados. Sobre uno de los lados de un ángulo recto tomamos, á partir del vértice A (fig. 116), una longitud AB igual al lado del menor de los dos cuadrados dados, y desde el punto B, como centro, con un radio igual al lado del mayor cuadrado, describimos un arco de círculo que corte en C el otro lado del ángulo recto: AC es el lado del cuadrado que se busca. En efecto: si juntamos BC se forma un triángulo rectángulo ABC, y resulta del teorema n.º **168** que el cuadrado construido sobre AC es equivalente á la diferencia de los cuadrados construidos sobre BC y sobre AB, es decir, á la diferencia de los cuadrados dados.

Observacion. El problema precedente podria servir para construir un cuadrado doble de un cuadrado dado, y tambien para construir un cuadrado equivalente á la suma de muchos cuadrados dados menos la suma de muchos otros cuadrados dados tambien.

§ XIII. Nociones de agrimensura. — Uso de la cadena y de la escuadra de agrimensor.

172. *Medir* un terreno, es apreciar su superficie.

En todo lo que sigue supondrémos que el terreno que se va á medir es llano y horizontal.

Los teoremas que acabamos de demostrar enseñan que para obtener el área de una figura plana hay necesidad de medir líneas rectas y perpendiculares á estas líneas. Es menester, pues, aprender en primer lugar á trazar líneas rectas en el terreno, á medir longitudes, y á trazar perpendiculares á otras rectas.

Fig. 117.

173. *Trazado de una línea recta sobre el terreno*. Es raro que se trace efectivamente una línea recta sobre el terreno; limítase la operacion á marcar un cierto número de puntos con auxilio de señales llamadas *jalones*, á lo cual se llama *jalonar una alineacion*.

Un jalon es un baston de madera (fig. 117) de uno á dos metros de altura, aguzado en su extremo inferior, y hendido en el superior longitudinalmente para recibir un cuadrado de papel blanco ó una placa de hojalata pintada de dos colores que se llama *mira*. Supongámos ahora que A y C sean los dos extremos de una línea recta, marcados por dos jalones clavados perfectamente verticales (fig. 118), y que se

quiere colocar un jalon entre A y C en la alineacion determinada por dichos dos puntos. El agrimensor se coloca un poco detrás del jalon A, y envia un ayudante que lleva un jalon en la direccion AC. Mediante señales hechas con las manos

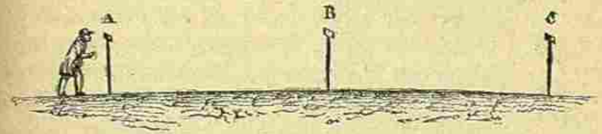

Fig. 118.

hace variar la colocacion del jalon hásta que, mirando en la direccion AC, el jalon A cubra simultáneamente los jalones B y C, en cuyo caso se está seguro de que los pies de los tres jalones estan en línea recta. De igual manera se colocan cuantos jalones se desee, bien entre los puntos A y C ó sobre la prolongacion de la línea AC.

174. *Medida de longitudes sobre el terreno*. Colocándose comunmente los jalones de veinte en veinte metros, no hay que pensar en el emplo del metro para medir tales distancias; se emplea un instrumento llamado *cadena de agrimensor*. Esta (fig. 119) se compone de cincuenta eslabones de hilo grueso de

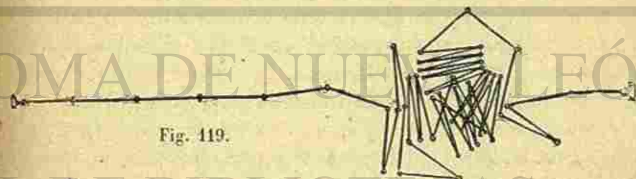

Fig. 119.

hierro, cada uno de los cuales tiene 20 centímetros de longitud, de suerte que la cadena entera tiene la de 10 metros ó un decámetro. Estos eslabones están reunidos por anillos de hierro, sustituidos de cinco en cinco por anillos de cobre que indican los metros: el medio de la cadena está señalado por un anillo de forma particular. Los dos extremos de la misma los forman dos asas de hierro, cuya magnitud está tomada de los eslabones finales. Con la cadena se emplean diez agujas de hierro de 30 á 40 centimetros de altura (figura 120), que suelen llamarse piquetes.


Fig. 120.

Para medir una recta AB (fig. 121) jalonada, el operador apoya contra el jalon extremo A y en la base, el asa de la cadena; el ayudante, cogida la otra con una mano y llevando en la otra las diez agujas, marcha en la direccion AB, deteniéndose cuando la cadena está bien tendida sobre el suelo. Entonces el operador hace que el ayudante cambie á derecha ó izquierda, segun convenga, hasta que la línea trazada en el suelo por la cadena coincida con la alineacion AB. Entonces el ayudante clava en el suelo una aguja en el extremo de la cadena y dentro del asa final que llevaba él cogida. Hecho esto, operador y ayudante se ponen en marcha en la direccion AB, llevando la cadena. Una vez que el agrimensor llega á la aguja clavada se detiene, apoya contra ella la cadena, y hace que el ayudante clave otra aguja, teniendo cuidado, como la primera vez, de que la cadena esté bien estendida y en la direccion de la recta AB. Recoge luego la primera aguja, y así continua hasta que el ayudante haya llegado al extremo B de la recta. Este apoya contra el jalon B el asa de la cadena que deja tendida en el suelo. El agrimensor avanza hasta la última aguja P; cuenta las que lleva, teniendo en cuenta la del punto P y por ellas sabe el número de decametros que hay entre A y P. Estando la cadena tendida, aprecia el agrimensor el número de metros y dobles decimetros que hay en PB, y con el auxilio de un doble decimetro dividido en centímetros puede apreciar la fraccion de eslabon que queda, si hay alguna, y por tanto puede averiguar la magnitud completa de AB. Supongamos por ejemplo que el número de agujas clavada sea cinco, y que la línea PB contiene cuatro

Fig. 121.

metros, tres eslabones y diez y ocho centímetros; la longitud AB valdrá 5 decámetros, 4 metros, 6 decimetros, 18 centimetros, ó $54^{m},78$.

Observacion. Para las pequeñas distancias sustituye á la cadena una cinta de hilo engomada, de diez metros de larga, dividida en metros, decimetros y centímetros. Esta cinta se enrolla en un carrete y el todo se encierra en una caja cilíndrica de cuero, cuyo pequeño instrumento toma el nombre de ruleta (fig. 122).

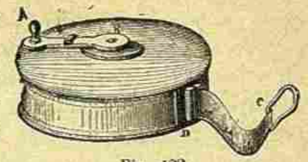
Fig. 122.

175. *Trazado de perpendiculares sobre el terreno*. El instrumento que se emplea para trazar sobre el terreno líneas perpendiculares á otras se llama *escuadra de agrimensor* ó simplemente *escuadra*. Consiste en una caja cilíndrica ó prismática de cobre, de ocho á diez centimetros de alta por cinco ó seis de diámetro, y cuyo contorno esta hendido por cuatro ventanas verticales que determinan dos líneas de visualidad perpendiculares. Tomemos, por ejemplo, una escuadra prismática de ocho caras (fig. 123). La cara A está hendida en su parte inferior por una hendidura vertical, muy estrecha, y en su parte superior por una ventana rectangular, dividida en sentido de su longitud por un hilo muy fino cuya direccion coincide con la de la hendidura inferior: la reunion de estas dos aberturas así dispuestas se llama una *pínula*: la ventana estrecha se llama *ojetillo* porque se aplica á ella el ojo, y la abertura rectangular se denomina *ventana*. La cara A′ paralela y

Fig. 123.


Fig. 124.

opuesta á la A presenta una pínula enteramente semejante, con la sola diferencia de que la mira está arriba y la ventana abajo. Si se aplica el ojo al ogetillo de la cara A y se ve el hilo de la ventana de la cara A′, queda así determinada una direccion perfectamente definida; y lo mismo sucederá con la direccion determinada por la hendidura de la cara A′ y el hilo de la ventana de la cara A. Las caras B y B′ llevan igualmente dos pínulas, y el instrumento está construido de modo que la línea de visualidad dada por estas otras pínulas sea perpendicular á la precedente.

La caja termina en la parte inferior por un cubo que sirve para fijarla sobre un baston ferrado que se coloca verticalmente en el suelo, cuando se quiere hacer uso de la escuadra (fig. 124).

Expliquemos ahora el uso de este instrumento. Hay dos problemas que resolver segun que se quiera trazar una perpendicular á una recta por un punto tomado en ella, ó por un punto exterior á dicha recta.

1.° *Trazar una perpendicular á una recta* MN *por un punto* A *de esta recta* (fig. 125).

Fig. 125.

El operador coloca en A el baston de la escuadra y hace girar el instrumento hasta que la línea de mira determinada por dos pínulas opuestas pase por el jalon colocado en M. Mira despues en la direcion perpendicular, y hace colocar un jalon en un punto B de esta direccion: la línea determinada por los jalones A y B es la perpendicular pedida.

2.° *Trazar una perpendicular á una recta* MN *por un punto* A *tomado fuera de esta recta* (fig. 126).

El operador coloca la escuadra en un punto O de la línea MN que le parece á simple vista ser el pié de la perpendicular. Comienza por asegurarse de que el punto O esta en la línea MN y al efecto gira la escuadra hasta que á traves de dos pínulas opuestas vea el jalon M. Después, á traves de las mismas pínulas mira en direccion opuesta, y sí el punto O está sobre la

recta, deberá ver el jalon N. Esto hecho, el operador mira en la direccion perpendicular, y lo mas fácil será que la visual no pase por el punto A, que quedará á derecha ó izquierda. Se trasladará entonces la escuadra hácia donde fuere necesario, cuidando de cerciorarse en el nuevo punto de que se halla este sobre la línea MN.

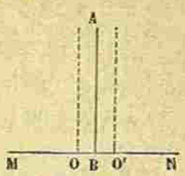

Fig. 126.

Después de algunos ensayos se llegará á encontrar el pié de la perpendicular en el punto B.

176. Problema. *Medir un polígono* (fig. 127).

Se colocan jalones en todos los vértices del polígono dado ABCDEFG, y se jalona sobre el terreno una línea MN, sobre la cual se bajan desde todos los vértices las perpendiculares AA′, BB′, CC′, etc. Se mide con la cadena la porcion de la línea MN comprendida entre los piés A′ y E′ de las perpendiculares extremas, teniendo cuidado de anotar las distancias al punto A′ de todos los jalones B′, C′, D′, F′, G′ que marcan los piés de las perpendiculares.

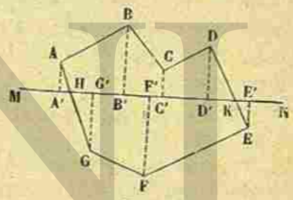

Fig. 127.

Se mide además el largo de todas las perpendiculares, con lo que se tienen todos los datos necesarios para calcular las areas de los triángulos y los trapecios, tales como AA′H, AA′B′B, y por consiguiente el área del polígono.

177. *Medir una porcion de terreno limitado por una línea curva.*

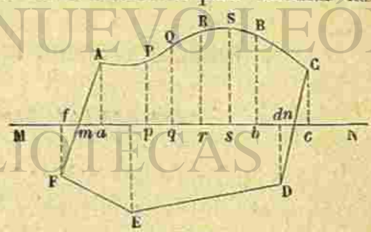

Fig. 128.

Consideremos un terreno limitado en parte par la línea curva ABC (fig. 128).

Se buscan sobre esta curva los puntos P, Q, R, S, bastante próximos para que el arco de curva comprendido entre dos puntos consecutivos difiera poco de la línea recta, que ha de juntar los dos puntos, y se sustituye la curva ABC por la quebrada APQRSBC. Queda desde entonces la operacion reducida á medir un polígono, como se hizo antes.

178. *Medir un terreno cuyo interior no es accesible.*

Se rodea el terreno de otro polígono que ordinariamente es un rectángulo ó un trapecio y se mide de una parte este polígono, y de otra el terreno comprendido entre el perímetro de este polígono y el del terreno dado, hallando después la diferencia de las dos áreas. Así para medir el estanque ABCD.... U (fig. 129) se rodea de un trapecio rectángulo MNPQ, cuya área se obtendria sin dificultad. Después, bajando de los puntos ABC.... U perpendiculares sobre los lados próximos del trapecio, se miden las porciones de terreno comprendidas entre los lados y el borde del estanque. Se suman estas áreas, y se restan del área del trapecio MNPQ y tendremos la superficie del estanque.

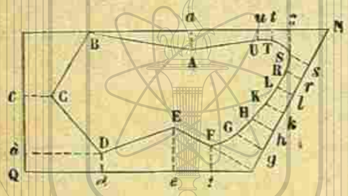

Fig. 129.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO III

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si se junta un punto interior á un paralelogramo con los cuatro vértices, los cuatro triángulos formados son tales, que la suma de los dos triángulos opuestos es equivalente á la suma de los otros dos.

2. Si se unen dos á dos los puntos medios de los lados de

un cuadrilátero, se forma un paralelógramo que equivale á la mitad del cuadrilátero.

3. Dos cuadriláteros que tienen las diagonales iguales é igualmente inclinadas, son equivalentes.

4. El área de un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares tiene por medida la mitad del producto de las diagonales.

5. Si se une un punto P interior á un paralelógramo ABCD á todos los vértices, y se considera los tres triángulos que tienen su vértice comun en el punto P y por bases respectivas la diagonal y los dos lados que parten del mismo punto A, el primero de estos triángulos es igual á la diferencia de los otros dos. ¿Cómo será menester modificar el enunciado del teorema cuando el punto P sea exterior al paralelógramo?

6. Dado un cuadrilátero, por el punto medio de cada diagonal se traza una paralela á la otra diagonal. Estas dos líneas se cortan en un punto que se une con los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero. Estas líneas descomponen el cuadrilátero dado en cuatro cuadriláteros equivalentes.

7. El cuadrado que tiene por lado la diagonal de otro cuadrado, tiene un área doble de la de este cuadrado.

8. Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se construyen triángulos equiláteros, el triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los otros dos.

9. Demostrar que el cuadrado construido sobre la suma de dos líneas A y B es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos líneas, mas dos veces el rectángulo que tiene una de estas líneas por base y la otra por altura.

10. Demostrar que el cuadrado construido sobre la diferencia de dos líneas A y B es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos líneas, menos dos veces el rectángulo que tiene una de estas líneas por base y la otra por altura.

11. Demostrar que la diferencia de los cuadrados construidos sobre dos líneas A y B es equivalente al rectángulo que tiene por base la suma $A + B$ y por altura la diferencia $A - B$.

12. Dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que comprenden el ángulo igual.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es a. Aplicacion al caso en que $a=5$m.

2. Un trapecio rectángulo tiene un ángulo igual $\frac{2}{3}$ de recto: calcular su área: 1.º cuando se dan las dos bases; 2.º cuando se dan una base y la altura; 3.º cuando se dan una base y la longitud del lado oblicuo á esta base.

3. En un trapezio ABCD, la base mayor AB es igual á 18 m.; los ángulos A y B son iguales los dos á 45°; y los lados no paralelos son los dos iguales á 7 m. Hallar el área de este trapecio y la del triángulo obtenido prolongando los lados no paralelos hasta que se encuentran.

4. El mismo problema suponiendo que los ángulos A y B sean iguales los dos á 60°.

5. Dos triángulos equiláteros están colocados uno al lado del otro de modo que tienen un vértice comun y sus bases en línea recta. Se unen los dos vértices y se obtiene un cuadrilátero, cuya área se pide, sabiendo que los lados de los dos triángulos equiláteros tienen las longitudes respectivamente iguales á a y á b. — Aplicacion al caso en que $a=1$ m. y $b=2$ m.

6. Hallar el área de un polígono circunscrito á un círculo de 54 m. de rádio y cuyo perímetro es igual á 432 m.

7. Se construyen cuadrados sobre los tres lados de un triángulo rectángulo; se unen dos á dos los vértices próximos de estos tres cuadrados. Se obtiene así un exágono cuya área se desea conocer.

8. Dividir un triángulo en partes equivalentes por líneas que emanan de un mismo vértice.

9. Dividir un trapecio en partes equivalentes por líneas que encuentren las dos bases.

10. De entre todos los triángulos que pueden construirse con dos lados dados, ¿ó cual esel mayor?

11. De todos los triángulos inscritos en un mismo círculo y teniendo una misma base, ¿cuál es el mayor?

12. ¿Cuál es el mayor de todos los triángulos inscritos en un mismo círculo, teniendo un vértice comun?

13. De entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un mismo círculo, ¿cuál es el mayor?

14. Con diagonales de longitud dada pueden construirse una infinidad de cuadriláteros: ¿bajo que ángulo deben estas diagonales cortarse para que las áreas de estos cuadriláteros sean lo mayor posible?

15. Dos campos están separados por una línea quebrada: se pide sustituir esta línea de separacion por una línea recta, de modo que la superficie de las dos parcelas de tierra no cambie.

LIBRO IV

LAS FIGURAS SEMEJANTES

§ XIV. Líneas proporcionales.

179. LEMA. *Sobre una recta* AB *existen dos puntos tales que la relacion de sus distancias á dos puntos dados* A *y* B *es igual á una relacion dada; y no hay mas que dos, uno colocado sobre la recta* AB *y el otro en su prolongacion* (fig. 130.)

Fig. 130.

Para aclarar las ideas, supongamos que la relacion de las distancias del punto buscado á los puntos A y B sea igual á $\frac{5}{2}$.

Partamos la línea AB en $5+2$ ó en 7 partes iguales y tomemos 5 de estas partes desde el punto A, y tendremos así un punto M tal que

$$\frac{MA}{MB}=\frac{5}{2};$$

y si el punto M cambia de lugar entre A y B, la relacion $\frac{MA}{MB}$ cambiará, porque uno de los términos de esta relacion aumentará mientras que el otro disminuirá. El punto M es pues el único que divide AB proporcionalmente á los números 5 y 2.

Busquemos ahora un punto sobre la prolongacion de AB; dicho punto debiendo estar mas alejado del punto A que del B, no puede hallarse mas que sobre la prolongacion de AB, mas allá del punto B. Para obtenerlo dividamos AB en $5-2$ ó en

tres partes iguales y tomamos á partir del punto A, 5 de estas partes, con lo cual obtenemos un punto P tal que

$$\frac{PA}{PB}=\frac{5}{2}.$$

Sí el punto P varía sobre la prolongacion de AB, la relacion $\frac{PA}{PB}$ variará, porque los dos términos de ella aumentarán ó disminuirán en una misma cantidad, y es sabido que una fraccion cambia de valor cuando se le añade ó quita á ambos términos una misma cantidad.

Tambien puede hacerse ver de la manera siguiente: tenemos evidentemente

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PB+AB}{PB}=1+\frac{AB}{PB}.$$

Si el punto P cambia de posicion en la prolongacion de AB, la relacion $\frac{AB}{PB}$ cuyo numerador es fijo y el denominador variable, variará; y lo mismo tendrá lugar por consiguiente con la relacion $\frac{PA}{PB}$. El punto P es pues el único de los situados en la prolongacion de AB cuya relacion de sus distancias á los puntos A y B es igual á $\frac{5}{2}$.

180. TEOREMA. *Una paralela á un lado de un triángulo determina en los otros dos lados segmentos proporcionales.*

Sea DE paralela al lado BC del triángulo ABC (fig. 131) y decimos que hay:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC};$$

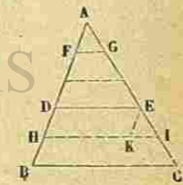

Fig. 131.

Suponemos que las líneas AD y DB tienen una medida comun, contenida 5 veces, por ejemplo, en

AD, y dos veces en DB; la relacion $\frac{AD}{DB}$ será en este caso igual á $\frac{3}{2}$. Por los puntos de division de AB, trazamos paralelas á BC, que dividirán á AC en segmentos iguales entre sí. Tomemos, con efecto, los segmentos AG y EI; trazemos EK paralela á AB, en cuyo caso las líneas EK y DM son iguales como lados opuestos de un paralelógramo : DH$=$AF por construccion, y por tanto EK$=$AF. Además los triángulos AFG, EKI tienen el lado AF$=$EK, el ángulo AFG $=$ EKI por tener los lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido (**82**), el ángulo FAG$=$KEI como correspondientes, luego son iguales, y el segmento AG$=$EI. Lo mismo podria demostrarse la igualdad de los demas segmentos de la línea AC. Resulta en fin que AE contiene 3 de estas partes y EC contiene 2; luego la relacion $\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$; luego es igual á $\frac{AD}{DB}$. Q. E. L. D.

Demostrado el teorema para el caso en que las dos líneas AD y DB tengan una medida comun, por pequeña que sea, es tambien cierto para el caso en que sean incomensurables.

181. Corolario I. Si en la proporcion

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

se cambian de lugar los medios, resultará esta otra :

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}.$$

De esta se deduce por una propiedad conocida de las relaciones iguales

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AD+DB}{AE+EC},$$

y reemplazando AD$+$DB por AB, y AE$+$EC por AC,

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC},$$

igualdad de relaciones que puede enunciarse así :

Cuando se cortan dos lados de un triángulo por una paralela al tercero, la relacion de los dos primeros lados es igual á la relacion de los segmentos comprendidos entre el vértice y la secante, y á la relacion de los segmentos comprendidos entre la secante y el tercer lado.

Observacion. El teorema y el corolario precedentes son verdad tambien, cuando la secante en vez de cortar los lados mismos del triángulo, corta su prolongacion, y se demuestran del mismo modo.

182. Corolario II. *Las paralelas interceptan en dos rectas* AC, DF *segmentos proporcionales* (fig. 132.)

Sean AD, BE, CF, tres paralelas que cortan las rectas AC y DF, y decimos que resulta

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}.$$

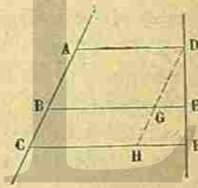

Fig 132.

En efecto : por el punto D trazamos DH paralela á AC, y tendremos (**181**)

$$\frac{DG}{DE}=\frac{GH}{EF},$$

y como DG$=$AB, GH$=$BC (**72**), luego

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}.$$ Q. E. L. D.

183. Teorema. Recíprocamente, *si una línea* DE *divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado.* (fig. 133.)

Suponemos que la línea DE divide los lados AB y AC en segmentos proporcionales, de manera que resulte

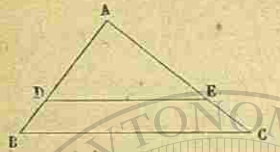

Fig. 133.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC};$$

y decimos que en este caso DE es paralela á BC. En efecto, si por el punto D trazamos una paralela á BC, esta paralela divide el lado AC en segmentos proporcionales á AD y DB (**180**); mas el punto E es el único que divide AC en la relacion de AD á DB (**179**), y por tanto la paralela trazada pasa por el punto E. Q. E. L. D.

§ XV. — Polígonos semejantes. — Condiciones para la semejanza.

184. Definiciones. Dos polígonos son *semejantes* cuando tienen los ángulos iguales uno á uno y los lados *homólogos* proporcionales. Se llaman lados *homólogos* de dos polígonos semejantes los que son adyacentes de una y otra parte á los ángulos iguales. En dos triángulos semejantes los lados homólogos son opuestos á los ángulos iguales. Llámanse vértices homólogos de dos polígonos semejantes los vértices de los ángulos iguales; y diagonales homólogas, las que unen vértices homólogos.

185. Teorema. *Toda paralela* DE *á uno de los lados de un triángulo* ABC *determina un nuevo triángulo semejante al primero* (fig. 134.)

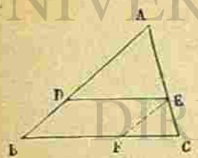

Fig. 134.

En efecto: desde luego resulta que los dos triángulos ABC, ADE son equiángulos porque tienen el ángulo A comun y los otros iguales respectivamente como correspondientes.

Los lados homólogos son proporcionales: en efecto, tenemos la proporcion (**181**)

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$$

de la que resulta:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}; \qquad [1]$$

trazamos luego EF paralela á AB, y tendremos (**181**)

$$\frac{AE}{BF}=\frac{AC}{BC} \quad ó \quad \frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC};$$

y como BF = DE (**72**), tenemos:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}. \qquad [2]$$

Las proporciones [1] y [2] tienen una relacion comun $\frac{AE}{AC}$, luego las tres relaciones son iguales, y resulta:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC};$$

lo que demuestra que los dos triángulos ADE, ABC tienen los lados proporcionales, y como son equiángulos, son semejantes. Q. E. L. D.

186. Corolario. *En un trapecio la línea que junta los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela á las bases é igual á su semi-suma.*

Volvamos sobre la figura que sirvió para hallar el área del trapecio (fig. 135); juntemos los puntos medios F y G de los lados no paralelos BC y AD; el punto F es al mismo tiempo tambien el medio de la línea DE puesto que los dos triángulos BEF, CDF son iguales. La línea GF divide, pues, en dos partes iguales los lados DA y DE del triángulo DAE (**185**). Por consecuencia los triángulos DGF, DAE son semejantes (**185**) y sus lados homólogos proporcionales; DG es la mitad de DA;

Fig. 135.

luego GF es la mitad de AE, es decir, que GF es igual á la semisuma de las bases. Q. E. L. D.

Resulta inmediatamente de aquí que el *área del trapecio tiene por medida el producto de su altura por la línea que junta los puntos medios de los lados no paralelos* (**164**).

187. Teorema. *Dos triángulos* ABC, A'B'C' *que tienen los ángulos iguales uno á uno, son semejantes* (fig. 136).

Fig. 136.

Suponemos que $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; tomamos sobre AB una longitud $AD = A'D'$ y trazamos DE paralela á BC; y el triángulo ADE es semejante á ABC (**185**).

Decimos además que este mismo triángulo ADE es igual al triángulo A'B'C'; porque efectivamente tienen el lado $AD = A'B'$ por construccion; el ángulo A igual al A' por la hipótesis, y por último ADE igual al ángulo B', porque los dos lo son al ángulo B. Los dos triángulos ADE, A'B'C' son pues iguales (**31**); y por consiguiente el triángulo A'B'C' es semejante al ABC. Q. E. L. D.

Observacion. Basta que los dos triángulos, ABC, A'B'C' tengan dos ángulos iguales para ser semejantes, porque si los tienen, son equiángulos (**67**) y son por tanto semejantes.

188. Teorema. *Dos triángulos* ABC, A'B'C' *que tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, son semejantes* (fig. 137).

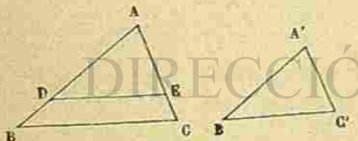

Fig. 137.

Tenemos por hipótesis

$$A = A', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}. \quad [1]$$

Tomemos sobre AB una longitud $AD = A'B'$ y trazamos DE paralela á BC. El triángulo ADE es semejante á ABC (**185**).

Por consecuencia tendremos :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}; \quad [2]$$

las proporciones [1] y [2] tienen los tres primeros términos iguales, puesto que $AD = A'B'$; luego $AE = A'C'$, de donde resulta que los triángulos ADE, A'B'C' tienen el ángulo $A = A'$ por hipótesis, $AD = A'B'$ por construccion, y $AE = A'C'$ por lo demostrado; luego son iguales (**32**), y por ello A'B'C' es semejante á ABC.

189. *Dos triángulos*, ABC, A'B'C', *que tienen los lados proporcionales, son semejantes* (fig. 138).

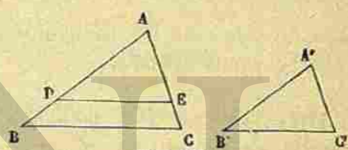

Fig. 138.

Suponemos que hay lo siguiente :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}. \quad [1]$$

Tomamos sobre AB una longitud $AD = A'B'$; trazamos una paralela DE á BC y el triángulo ADE es semejante á ABC (**185**). Por tanto

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}. \quad [2]$$

Comparando las igualdades de las relaciones [1] y [2], y teniendo en cuenta que $AD = A'B'$, se deduce

$$AE = A'C'; \quad DE = B'C';$$

los triángulos ADE, A'B'C' tienen, pues, los tres lados iguales, luego son iguales y A'B'C' es semejante á ABC.

190. Teorema. *Dos triángulos que tienen los lados paralelos ó perpendiculares son semejantes.*

Estos triángulos tienen, segun lo dicho, los ángulos iguales ó suplementarios respectivamente (**62** y **63**). Designemos con

A, B, C, A′, B′, C′, los ángulos de los dos triángulos. No puede suceder al mismo tiempo :

$$A + A' = 2 \text{ rectos} ; \quad B + B' = 2 \text{ rectos} ; \quad C + C' = 2 \text{ rectos},$$

porque la suma de los seis ángulos seria igual á 6 rectos, lo cual es imposible (**65**) ; tampoco puede ocurrir que :

$$A = A' ; \; B + B = 2 \text{ rectos} ; \; C + C' = 2 \text{ rectos},$$

porque, aun en este caso, la suma de los seis ángulos seria mayor que cuatro rectos, cosa imposible tambien. Será necesario que suceda que :

$$A = A' ; B = B' ; C = C' ;$$

pero en este caso los triángulos son equiángulos y por esta razon semejantes (**187**).

191. Teorema. *Dos polígonos* ABCDE, A′B′C′D′E′ *compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, son semejantes* (fig. 139).

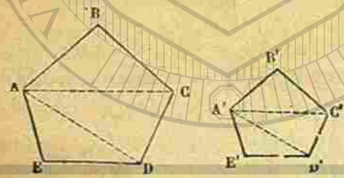

Fig. 139.

En efecto : decimos en primer lugar que los dos polígonos tienen los ángulos iguales uno á uno. Los ángulos B y B′ son iguales como ángulos homólogos de dos triángulos semejantes ABC, A′B′C′ ; los ángulos E y E′ son iguales por la misma razon. Los ángulos BCD, B′C′D′ son iguales como compuestos uno y otro de dos ángulos iguales uno á uno, el ángulo BCA = B′C′A′ á causa de la semejanza de los triángulos ABC, A′B′C′, y el ángulo ACD igual al ángulo A′C′D′ á causa de la semejanza de los triángulos ACD, A′C′D′ ; los dos ángulos CDE, C′D′E′ son iguales por una razon análoga. En fin los ángulos BAE, B′A′E′ compuestos de un mismo número de ángulos iguales uno á uno son tambien iguales ; luego los dos polígonos son equiángulos.

En segundo lugar decimos que los dos polígonos tienen los lados homológos proporcionales. En efecto : la semejanza de los triángulos ABC y A′B′C′, ACD y A′C′D′, ADE y A′D′E′ dan las igualdades de las relaciones siguientes :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'},$$
$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

de donde se deduce, á causa de las relaciones comunes,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

igualdades que demuestran la proporcionalidad de los lados homólogos.

Los polígonos son, pues, equiángulos y tienen los lados proporcionales y por tanto son semejantes. Q. E. L. D.

192. Teorema. Recíprocamente, *dos polígonos semejantes* ABCDE, A′B′C′D′E′ *pueden ser descompuestos en un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos* (fig. 140).

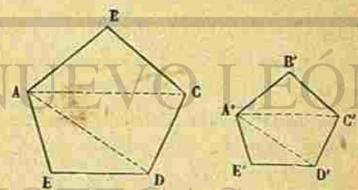

Fig. 140.

Por los vértices homólogos A y A′ se trazan todas las diagonales posibles en los dos polígonos, las cuales descomponen cada uno de ellos en tantos triángulos como lados hay menos dos. El número de los triángulos es el mismo en cada polígono y decimos que son semejantes uno á uno.

Tomemos primeramente los dos triángulos ABC, A′B′C′. Tienen el ángulo B igual al ángulo B′, como ángulos homólogos de dos polígonos semejantes. La semejanza de estos da además la proporcion :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

luego los dos triángulos ABC, A'B'C' tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, y por consecuencia son semejantes (**188**).

Resulta de lo dicho que el ángulo BCA es igual á B'C'A', y como el ángulo BCD es igual al B'C'D' en virtud de la hipótesis, el ángulo ACD, diferencia de los BCD y BCA, es igual al ángulo A'C'D', diferencia de los ángulos B'C'D' y B'C'A'. La semejanza de los dos triángulos ABC, A'B'C' da la proporcion

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'};$$

y la de los dos polígonos origina la de

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'};$$

deduciéndose de la comparacion de estas dos proporciones :

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{CD}{C'D'};$$

luego los dos triángulos ACD, A'C'D' tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, y por tanto son semejantes.

De igual modo podria demostrarse la semejanza de los demás triángulos.

193. Teorema. La relacion de los perímetros de dos polígonos semejantes ABCDE, A'B'C'D'E' es igual á la relacion de dos lados homólogos (fig. 140).

Tenemos por hipótesis :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'};$$

de donde se deduce inmediatamente por una propiedad sabida de las relaciones iguales :

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{AB}{A'B'}.\quad \text{Q. E. L. D.}$$

Es además fácil darse razon de la exactitud de este teorema mediante la siguientes sencillas consideraciones : supongamos, para concretar las ideas, que la relacion de dos lados homólogos de los dos polígonos sea igual á $\frac{5}{3}$. Esto quiere decir que cada lado del primer polígono vale $\frac{5}{3}$ del lado homólogo del otro polígono, y por consecuencia el perímetro del primero vale tambien $\frac{5}{3}$ del perímetro del segundo, que era cabalmente lo que era preciso demostrar.

§ XVI. Relaciones entre la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, los segmentos de la hipotenusa, la hipotenusa misma y los lados del ángulo recto.

194. Definiciones. Se llama *proyeccion* de un punto sobre una recta el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto sobre la recta.

Se llama *proyeccion* de una recta AB sobre una recta CD la porcion A'B' de esta última recta comprendida entre las proyecciones A' y B' de los dos extremos de AB (fig. 141).

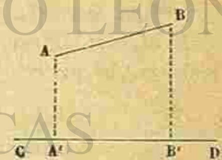

Fig. 141.

Recordemos que cuando los dos medios de una proporcion son iguales, cada uno de ellos se llama *medio proporcional* entre los dos extremos. Tambien importa tener presente que esta definicion equivale á decir que la media proporcional entre dos números es un tercer número cuyo cuadrado es igual al producto de los dos primeros. Así la media proporcional entre 2 y 18 es 6, porque el cuadrado de 6 es igual al producto 2×18 (v. la *Aritmética*).

195. Teorema. *Si desde el vértice A del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC se baja una perpendicular sobre la hipotenusa:*

1.º *Cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre la hipotenusa entera y su proyeccion sobre la hipotenusa;*

Fig. 142.

2.º *La perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa* (fig. 142).

1.º Los dos triángulos ABC, ABD son rectángulos y tienen el ángulo B comun, luego son semejantes (**187**). Escribiendo ahora la proporcionalidad de los lados homólogos de dichos triángulos, tendremos:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad \text{ó} \quad \overline{AB}^2 = BC \times BD;$$

lo cual prueba que el lado AB del ángulo recto es medio proporcional entre la hipotenusa entera BC y la proyeccion BD de dicho lado sobre la hipotenusa. Comparando del mismo modo los triángulos semejantes ABC, DAC hallaríamos igualmente

$$\overline{AC}^2 = BC \times CD$$

2.º Los dos triángulos ABD, CAD equiángulos con relacion al triángulo ACB son equiángulos entre sí, y por tanto semejantes, de lo que resulta la proporcion

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \quad \text{ó} \quad \overline{AD}^2 = BD \times CD;$$

que muestra que la perpendicular AD es media proporcional entre los segmentos BD y CD de la hipotenusa.

196. Corolario I. Uniendo un punto cualquiera A de una

semicircunferencia con los dos extremos del diámetro BC (fig. 142) se forma un triángulo rectángulo (**114**) y en virtud del teorema precedente resultará:

1.º *Toda cuerda de un círculo es media proporcional entre el diámetro que pasa por su extremo y su proyeccion sobre el diámetro;*

2.º *La perpendicular bajada desde un punto cualquiera de la circunferencia sobre un diametro, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

197. Corolario II. *Los cuadrados de los dos lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo son proporcionales á las proyecciones de estos lados sobre la hipotenusa.*

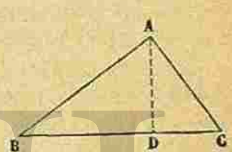

Fig. 143.

Tenemos (fig. 142)

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD,$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times CD.$$

Dividiendo miembro á miembro estas dos igualdades y observando que BC, factor comun á los dos terminos puede desaparecer, resultará

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

198. Teorema. *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los lados del ángulo recto* (fig. 143).

Tenemos (**195**, 1.º)

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times CD;$$

sumando se obtiene:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times (BD + CD) = BC \times BC = \overline{BC}^2. \qquad \text{Q. E. L. D}$$

Observacion. Este teorema no difiere en el fondo del que se ha demostrado en el nº **168**.

199. **Aplicaciones.** Los teoremas desde los nºs **195** y **198** establecen relaciones entre los tres lados de un triángulo rectángulo, la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa y los dos segmentos de esta, las cuales son seis cantidades entre todas. Dadas dos de estas cantidades se puede, con auxilio de estas relaciones, calcular las cuatro restantes. De aquí nueve problemas distintos sobre el triángulo rectángulo, cuya solucion se deduce de los teoremas precedentes; he aquí algunas de esta soluciones.

I. Los dos lados de un triángulo rectángulo son iguales, el primero á 21 metros y el segundo á 28. Se desea saber cuál será la hipotenusa, los dos segmentos y la perpendicular.

La hipotenusa se obtiene como lo hemos explicado ya (**170**) reuniendo los cuadrados de los dos lados y extrayendo la raiz cuadrada de esta suma, de este modo :

$$\sqrt{21^2+28^2}=\sqrt{1225}=35 \text{ metros.}$$

Los segmentos de la hipotenusa se calculan mediante la propiedad del nº **195**, 1º; del cual se deduce en efecto que :

$$BD=\frac{\overline{AB}^2}{BC}; \qquad CD=\frac{\overline{AC}^2}{BC};$$

cuyas expresiones en números serian :

$$BD=\frac{21^2}{35}=\frac{441}{35}=12^m,60;$$

$$CD=\frac{28^2}{35}=\frac{784}{35}=22^m,40.$$

Por último la perpendicular AD se obtiene aplicando la segunda parte del mismo teorema

$$\overline{AD}^2=BD\times CD$$

lo cual da por resultado

$$\overline{AD}^2=12,6\times 22,4=282,24,$$

de donde

$$AD=\sqrt{282,24}=16^m$$

Se halla, sin embargo AD más rápidamente teniendo en cuenta que :

$$BC\times AD=AB\times AC$$

porque estos dos productos representan, uno y otro el doble del área del triángulo, y de ello se deduce que

$$AD=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{21\times 28}{35}=\frac{588}{35}=16^m,8.$$

II. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 13 metros, y uno de los lados del ángulo recto es igual á 5, y se desea saber cual será el otro lado del ángulo recto, los segmentos de la hipotenusa y la perpendicular.

Este problema se reduce inmediatamente al anterior, calculando el otro lado del ángulo recto, cosa que ya sabemos hacer (**170**) y que es igual dicho lado á :

$$\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12 \text{ metros.}$$

Pero pueden calcularse primeramente los dos segmentos de la hipotenusa, y el que de estos constituye la proyeccion del lado dado se obtiene fácilmente mediante la fórmula

$$BD=\frac{\overline{AB}^2}{BC}=\frac{5^2}{13}=\frac{25}{13}=1^m,923.$$

con un milímetro de aproximacion.

El otro segmento se obtiene por diferencia, y será igual á

$$13^m-\frac{25^m}{13}=\frac{144^m}{13}=11^m,077,$$

con un milímetro de diferencia.

La perpendicular se obtiene tomando la media proporcional entre los dos segmentos, lo cual da :

$$\sqrt{\frac{25}{13}\times\frac{144}{13}}=\frac{60^{m}}{13}=4^{m},615,$$

con un milímetro de aproximacion.

Finalmente el segundo lado del ángulo recto se halla calculando la media proporcional entre la hipotenusa y el segundo segmento, lo cual da

$$\sqrt{13\times\frac{144}{13}}=\sqrt{144}=12 \text{ metros.}$$

III. Los segmentos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo son iguales á $16^{m},15$ el primero, y á $25^{m},60$ el segundo, y se trata de calcular los lados del triángulo y la perpendicular.

La hipotenusa es igual á la suma de los dos segmentos, es decir á

$$16^{m},15+25^{m},60=41^{m},75.$$

Los lados del ángulo recto se obtienen por las medias proporcionales, y el primero es igual á

$$\sqrt{41,75\times16,15}=\sqrt{674,2625}=25^{m},773,$$

con un milímetro de aproximacion. El segundo será igual á

$$\sqrt{41,75\times25,60}=\sqrt{1068,80}=32^{m},693,$$

con un milímetro de aproximacion.

Ultimmamente la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos, y su valor será por tanto :

$$\sqrt{16,15\times25,60}=\sqrt{413,44}=20^{m},333,$$

con un milímetro de diferencia.

IV. Se nos da la perpendicular AD=18 metros y el segmento BD=5 metros y se trata de calcular el otro segmento y los lados del triángulo rectángulo.

De la igualdad

$$\overline{AD}^2=BD\times CD$$

resulta,

$$CD=\frac{AD^2}{BD}=\frac{18^2}{5}=\frac{324}{5}=64^{m},8.$$

La hipotenusa será igual á

$$5^{m}+64^{m},8=69^{m},8.$$

Los lados del ángulo recto pueden calcularse mediante el teorema del n.º **195** ó bien aplicando el teorema **198** á los triángulos rectángulos ABD, ACD. Empleando el primer procedimiento tendremos :

$$AB=\sqrt{BC\times BD}=\sqrt{69,8\times5}\quad=18^{m},681,$$
$$AC=\sqrt{BC\times CD}=\sqrt{69,8\times64,8}=67^{m},254,$$

con un milímetro de diferencia.

§. XVII. Teorema relativo al cuadrado del número que expresa la longitud del lado de un triángulo opuesto á un ángulo agudo ú obtuso.

200. Teorema. *El cuadrado del lado de un triángulo opuesto á un ángulo agudo A es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto del uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre el primero* (fig. 114.)

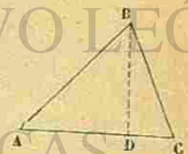

Fig. 114.

Desde el vértice B bajamos la perpendicular BD sobre el lado AC. En el triángulo rectángulo BCD tenemos (198) :

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2; \qquad [1]$$

en el triángulo rectángulo ABD, tenemos igualmente :

$$\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2; \qquad [2]$$

además, observando la figura, resulta que $DC=AC-AD$, y elevando los mienbros de esta igualdad al cuadrado [1] tenemos que

$$\overline{DC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\,AC\times AD.$$

Si ahora sumamos las igualdades [1], [2], [3], y hacemos las reducciones consiguientes resultará al fin que :

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\,AC\times AD. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

201. Teorema. *En un triángulo obtusángulo* ABC *el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso* A *es igual á la suma de los cuadrados de los otros lados, mas dos veces el producto del uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre el primero* (fig. 145.)

Fig. 145.

Desde el punto B bajamos la perpendicular BD sobre el lado opuesto; en cuyo caso el triángulo rectángulo BCD nos da (**198**) :

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2; \qquad [1]$$

el triángulo rectángulo ABD nos da igualmente

$$\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2; \qquad [2]$$

tenemos además en la figura que $CD=AC+AD$, y elevando al cuadrado [1] los miembros de esta igualdad resulta

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+2\,AC\times AD; \qquad [3]$$

1. Suponemos conocida la composicion del cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos números. Demuéstrase en Aritmética y en Algebra que el *cuadrado de la suma de dos números es igual á la suma de los cuadrados de estos dos números, mas el doble producto del primero por el segundo;* y que *el cuadrado de la diferencia de dos números es igual á la suma de los cuadrados de estos números menos el doble producto de uno por otro.*

sumando ahora las igualdades [1], [2] y [3], tendremos por fin

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\,AC\times AD. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

202. Corolario. *Un ángulo de un triángulo es agudo, recto á obtuso, segun que el cuadrado del lado opuesto á este ángulo sea inferior, igual ó superior á la suma de los cuadrados de los otros lados.*

Esto resulta inmediatamente, teniendo al mismo tiempo presente los teoremas de los números **198**, **200** y **201**.

203. Aplicacion. Los teoremas precedentes permiten la resolucion de la cuestion siguiente.

Dados los tres lados de un triángulo hallar la altura que cae sobre uno de los lados y la superficie de este triángulo.

Supongamos que se desea calcular la altura BD (fig. 144 y 145). Se buscará en primer lugar la proyeccion AD del lado AB sobre el lado AC. Si el ángulo A es agudo, tendremos (**200**)

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\,AC\times AD;$$

de donde fácilmente se deduce :

$$AD=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2AC};$$

si el ángulo A fuese obtuso, tendríamos (**201**)

$$AD=\frac{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}{2AC}.$$

Conociendo AD se obtendrá BD en el triángulo rectángulo ABD por la fórmula

$$BD=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}.$$

Despues, se calcula fácilmente la superficie multiplicando AC por BD y tomando la mitad del producto.

EJEMPLO. Se nos da :

$$AB=25^m,$$
$$BC=41^m,$$
$$AC=32^m;$$

y se desea calcular la altura BD y la superficie.

Formamos para ello los cuadrados de los tres lados, que serán

$$\overline{AB}^2=625,$$
$$\overline{BC}^2=1681,$$
$$\overline{AC}^2=1024.$$

$\overline{BC}^2$ es mayor que $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=1649$; luego el ángulo A es obtuso y tendremos

$$AD=\frac{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}{2AC}=\frac{32}{64}=0^m,5.$$

De esto se deduce que

$$BD=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{624,75}=24^m,995,$$

con un milímetro de diferencia. Finalmente, la superficie será :

$$\frac{1}{2}AC\times BD=16\times 24,995=399^{mc},92,$$

con un decímetro cuadrado de diferencia.

§ XVIII. Teorema relativo á las secantes de un círculo que proceden de un mismo punto.

204. TEOREMA. *Si desde un punto tomado en el plano de un círculo se le trazan secantes, el producto de las distancias desde el punto á los otros dos puntos en que las secantes cortan cada cual la circunferencia es el mismo para todas las secantes.*

Hay que distinguir dos casos :

1.º El punto dado P se halla en el interior de la circunferencia (fig. 146). Trazamos por este punto dos secantes cualesquiera, BPA, DPC, y unimos los puntos C y B, A y D. Los dos triángulos CPB, APD tienen el ángulo D=B, como inscritos en el mismo segmento (**116**), el ángulo C=A, por la misma razon; luego son semejantes (**187**), y resulta la siguiente proporcion:

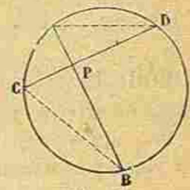

Fig. 146.

$\frac{PB}{PD}=\frac{PC}{PA}$, ó $PB\times PA=PC\times PD$. Q. E. L. D.

2.º El punto P es exterior á la circunferencia (fig. 147). Desde dicho punto se trazan dos secantes cualesquiera PBA, PDC, y se unen BC y AD. Los triángulos PAD, PCB tienen el ángulo P comun y el ángulo A=C como inscritos en el mismo segmento (**116**) y por consiguiente son semejantes (**187**), y dan la proporcion siguiente :

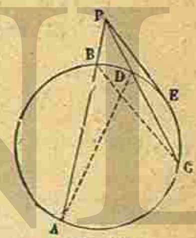

Fig. 147.

$\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$, ó $PA\times PB=PC\times PD$. Q. E. L. D.

205. COROLARIO. *Si desde un punto* P *tomado fuera de un círculo se le traza una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte exterior* (fig. 147).

Sea PBA la secante y PE la tangente; tracemos por el punto P otra secante PDC, y resultará, pues :

$$PD\times PC=PA\times PB.$$

Si consideramos ahora que la secante PDC gira sobre el punto P aproximándose á PE, los puntos D y C tienden á confundirse en uno solo, en el punto E, y entonces la relacion precedente se convierte en esta otra :

$$\overline{PE}^2=PA\times PB.\quad \text{Q. E. L. D.}$$

§ XIX. Problemas : dividir una recta dada en partes iguales, en partes proporcionales á longitudes dadas. — Hallar una cuarta proporcional á tres líneas dadas, y una media proporcional á dos líneas dadas. — Construir sobre una recta dada un polígono semejante á un polígono dado.

206. Problema. *Dividir una recta en un cierto número de partes iguales.*

Propongámonos, por ejemplo, dividir la recta AB (fig. 148) en cinco partes iguales. Por uno de los extremos A de la recta dada trazamos una línea cualquiera indefinida AG, sobre la cual tomamos, á partir del punto A y una tras otra, cinco longitudes AC, CD, DE, EF, FG iguales entre sí. Despues unimos BG, y por los puntos C, D, E, y F trazamos paralelas á BG. Dichas líneas dividen á AB en cinco partes iguales; porque resulta en efecto, de la demostracion del teorema del nº **180** que, cuando un lado AG de un triángulo se divide en partes iguales, las paralelas al lado BG, trazadas por los puntos de division, dividen al otro lado AB en un mismo número de partes iguales.

Fig. 148.

207. *Dividir una recta dada* AB *en partes proporcionales á las longitudes dadas* M, N, P (fig. 149).

Por el punto A se traza una recta indefinida cualquiera, sobre la cual tomamos á continuacion una de otra tres longitudes AC, CD, DE respectivamente iguales á las líneas M, N, P. Unimos BE y por los puntos C y D trazamos paralelas á BE, cuyas líneas dividen la línea AB en segmentos proporcionales á las longitudes M, N, P (**182**).

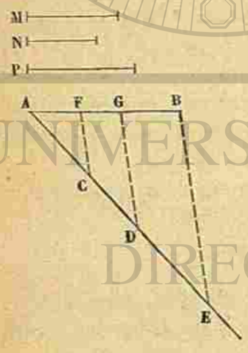

Fig. 149.

Observacion. Si quisiera dividirse la línea AB en partes proporcionales á números dados, como 4, 3 y 5, por ejemplo, tomaríamos una longitud arbitraria como unidad y se construirian tres líneas M, N, P respectivamente iguales á cuatro veces, 3 veces y 5 veces la unidad de longitud, con lo cual, este problema quedaria asimilado al anterior.

208. Problema. Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas M, N, P (fig. 150).

Se llama *cuarta proporcional* á tres líneas dadas el cuarto término de una proporcion en la que figuran como los tres primeros términos las tres líneas dadas. Para construir, pues, la cuarta proporcional á las líneas M, N, P, formo un ángulo cualquiera O y sobre uno de los lados tomo, á partir del punto O dos longitudes OA, OB respectivamente iguales á M y á N, y sobre el otro lado una OC = P. Despues uno AC y trazo BD paralela á AC y OD es la cuarta proporcional pedida; porque los triángulos semejantes OAC, OBD (**185**) dan :

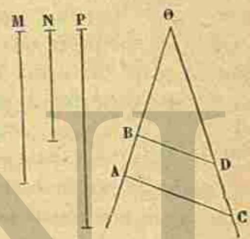

Fig. 150.

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \quad \text{ó} \quad \frac{M}{N}=\frac{P}{OD}.$$

209. Problema. *Construir una media proporcional á dos rectas dadas* a *y* b (fig. 151).

Primera solucion. Sobre una recta indefinida tomamos á continuacion una de otra dos longitudes AB, BC respectivamente iguales á a y b. Sobre AC como diámetro describimos una semicircunferencia, y trazamos BD perpendicular á AC, la cual es media proporcional entre AB y BC (**186**, 2.º).

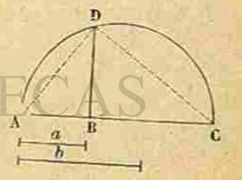

Fig. 151.

Segunda solucion (fig. 152). Sobre una línea indefinida tomamos á partir de un punto A dos longitudes AB y AC respectivamentes iguales á a y á b. Sobre AC, como diámetro, describimos una semicircunferencia y elevamos BD perpendicular al diámetro, uniendo luego AD. Esta es la media proporcional pedida (**196**, 1.º).

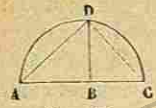

Fig. 152

Tercera solucion (fig. 153). Sobre una línea indefinida tomamos á partir del mismo punto A dos longitudes AC y AB respectivamente iguales á a y á b. Luego por los puntos B y C haremos pasar una circunferencia cualquiera, desde el punto A se le traza una tangente AD á dicha circunferencia; la tangente es la media proporcional pedida (**205**).

Fig. 153.

210. Corolario. Este problema puede servir para *construir un cuadrado equivalente á un rectángulo*; el lado de este cuadrado es una media proporcional entre la base y la altura del rectángulo. Del mismo modo podria obtenerse el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo buscando una media proporcional entre la base y la mitad de la altura del triángulo. Como además sabemos trasformar un polígono en triángulo equivalente, podria tambien construirse un cuadrado equivalente á un polígono dado.

211. Problema. *Construir sobre una recta dada un polígono semejante á otro polígono dado* (fig. 154).

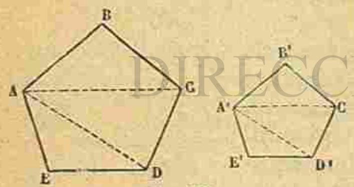

Fig. 154.

Sea ABCDE el polígono dado A'B' el lado dado que debe ser homólogo de AB.

Desde el punto A trazamos en el polígono ABCDE todas las diagonales posibles.

Luego en el punto A' formo con A'B' un ángulo igual á BAC,

y en el punto B', con la misma recta, un ángulo igual á ABC, con la cual resulta un triángulo A'B'C' semejante á ABC (**187**). Formanos por el mismo procedimiento sobre A'C' un triángulo semejante á ACD y así de los demás. El nuevo polígono A'B'C'D'E' será semejante al primero (**191**).

Puede además determinarse cada uno de los vértices del polígono A'B'C'D'E' por la interseccion de rectas que partan todas de los puntos A'B' (fig. 155). Para ello, en el polígono dado se trazarán todas las diagonales posibles por el punto A y por el punto B. Despues se formarán en el punto A' los ángulos B'A'C', C'A'D', D'A'E' respectivamente iguales á los ángulos BAC, CAD, DAE. Lo mismo se hará en el punto B': los ángulos A'B'E', E'B'D', D'B'C' respectivamente iguales á los ángulos ABE, EBD, DBC. Entonces el punto C' se determinará por la interseccion de las rectas A'C' y B'C'; el puuto D' por la de las rectas A'D' y B'D'; y así los demás.

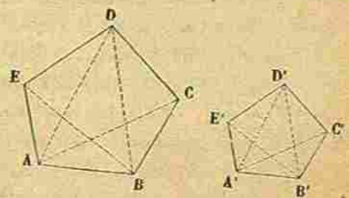

Fig. 155.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO IV

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Sobre una recta AB se marcan dos puntos M y P tales que $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$. Se toma el medio O de la distancia MP. Hay que demostrar que OM es media proporcional entre OA y OB.

2. La bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes.

3. La línea que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio pasa por los puntos medios de las diagonales, y la porcion de este línea comprendida entre las diagonales es igual á la semidiferencia de las bases del trapecio.

4. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto que está situado á los dos tercios de la longitud de cada mediana á partir desde el vértice.

5. Si desde los tres vértices de un triángulo y desde el punto de reunion de sus medianas se bajan perpendiculares sobre una recta cualquiera del plano exterior al triángulo, la cuarta de estas perpendiculares es igual al tercio de la suma de las otras tres.

6. Un polígono ABCDE.... dado, se unen todos sus vértices á un punto cualquiera O del plano, y se dividen las rectas OA, OB, OC,...... en partes proporcionales en los puntos A′, B′, C′...... de suerte que resulte :

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\dots$$

y se trata de demostrar que el polígono A′B′C′D′.... es semejante al polígono ABCD.....

7. Dadas dos circunferencias O y O′ se trazan en ellas rádios paralelos y en el mismo sentido : se juntan sus extremos. Todas las líneas obtenidas de este modo encuentran la línea de los centros prolongada en un mismo punto, que se llama *el centro de semejanza externa* de las dos circunferencias.

8. Si en dos circunferencias se trazan rádios paralelos y en sentido contrario, las líneas que unen sus extremos encuentran todas la línea de los centros en un mismo punto que se llama el *centro* de *semejanza interna* de las dos circunferencias.

9. Las tangentes comunes exteriores á dos circunferencias pasan por el centro de semejanza externa, y las tangentes comunes interiores, por el centro de semejanza interna.

10. En un triángulo rectángulo la inversa del cuadrado de la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa es igual á la suma de las inversas de los cuadrados de los lados del ángulo recto.

11. Si desde el punto medio de un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, la diferencia de los cuadrados de los segmentos

determinados sobre la hipotenusa es igual al cuadrado del otro lado.

12. La distancia de un punto de una circunferencia á una cuerda cualquiera es media proporcional entre las distancias de este mismo punto á las tangentes trazadas por los extremos de la cuerda.

13. Si por los extremos de un diámetro de un círculo se le trazan dos tangentes paralelas, la parte de una tercera tangente cualquiera comprendida entre las dos primeras está dividida por el punto de contacto en dos segmentos, cuyo producto es igual al cuadrado del rádio.

14. Cuando dos circunferencias son tangentes exteriormente, la porcion de la tangente comun exterior comprendida entre los puntos de contacto es media proporcional entre los diámetros de las dos circunferencias.

15. La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual á dos veces el cuadrado de la mitad del tercer lado mas dos veces el cuadrado de la mediana que cae sobre este tercer lado.

16. La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual á la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

17. La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la línea que une los puntos medios de las diagonales.

18. El lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos A y B sea constante, es un círculo cuyo centro está en medio de la línea AB.

19. Si se junta un punto M cualquiera tomado en el plano de un triángulo ABC á los tres vértices y al punto de reunion G de las medianas resultará :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{3MG}^2.$$

20. La diferencia de los cuadrados de dos lados de un trián-

gulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyeccion sobre este lado de la mediana correspondiente.

21. El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos sea constante, es una línea recta perpendicular á la que une los dos puntos fijos.

22. El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura que cae sobre el tercer lado por el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

23. Si desde un punto P tomado fuera de un círculo O se le trazan dos tangentes, la cuerda que pasa por los puntos de contacto corta el diámetro que pasa por el punto P en un punto Q tal que el producto $OP \times OQ$ es igual al cuadrado del radio.

24. Si desde todos los puntos de una línea recta situada en el plano de un círculo se trazan á este círculo dos pares de tangentes, las cuerdas que pasen por los puntos de contacto de cada uno de los pares de tangentes encuentran en un punto fijo el diámetro perpendicular á la recta dada. Este punto se llama el *polo* de la recta. — Recíprocamente.

25. Cuando tres circunferencias son secantes dos á dos, las tres cuerdas comunes concurren á un mismo punto.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Inscribir en un triángulo un rectángulo semejante á un rectángulo dado.

2. Hallar el lugar de los puntos tales, que la relacion de sus distancias á dos rectas fijas sea igual á una relacion dada.

3. Dado un cuadrilátero ABCD hallar en el interior un punto S tal, que si se le une con todos los vértices, las áreas de los cuatro triángulos formados de este modo sean iguales dos á dos, es decir, que tengamos $ASB = CSD$ y $ASC = BSD$ Concurso general de la clase de filosofía, 1867).

4 Se nos da un triángulo ABC rectángulo en A. A la hipotenusa BC se le traza una perpendicular que corta en D el lado AB y en E el lado AC. Se une BE y CD. Se trata ahora de encontrar el lugar descrito por el punto de interseccion de estas dos rectas, cuando la perpendicular á la hipotenusa se mueve.

5. Unimos un punto fijo tomado en el plano del círculo á todos los puntos de la circunferencia, y dividimos las líneas así obtenidas en segmentos proporcionales. Esto hecho, se desea hallar el lugar geométrico de los puntos de division.

6. Hallar el lugar en que se juntan las medianas de los triángulos inscritos en un mismo segmento de círculo.

7. Desde un punto dado fuera de un círculo, trazarle una secante tal que la cuerda comprendida sea media proporcional entre la secante entera y su parte exterior.

8. Determinar sobre una recta AB dos puntos que sean tales que la relacion de sus distancias á dos puntos A y B sea igual á la relacion de dos líneas dadas M y N.

9. Construir un triángulo rectángulo, conociendo uno de los lados del ángulo recto y la suma ó la diferencia de la hipotenusa y del otro lado.

10. Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados y que sea tangente á una recta ó á una circunferencia dada.

11. Describir una circunferencia que pase por un punto dado y que sea tangente á dos rectas dadas.

12. Por un punto dado en un ángulo trazar una secante que corte en los lados longitudes proporcionales á dos líneas dadas.

13. Hallar el área de un trapecio del cual se conocen los cuatro lados.

14. Dados dos círculos hallar el lugar geométrico de los puntos desde donde se le pueden trazar tangentes iguales.

15. Hallar en el interior de un triángulo un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias á los tres vértices sea la mas pequeña posible.

16. Hallar el lugar geométrico de los puntos tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias á los tres vértices de un triángulo sea constante.

17. Dadas dos circunferencias que se tocan exteriormente, se trazan por el punto de contacto A, en las dos circunferencias, las cuerdas AB y AC perpendiculares entre sí. Se juntan por una recta BC los extremos de estas cuerdas y se divide esta recta en dos partes que estén en una relacion dada. Hallar el lugar de los puntos de division. (Concurso general de la clase de tercera, 1870.)

18. Un ángulo recto gira alrededor de su vértice situado en el interior de una circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas comprendidas sobre la circunferencia por los lados de este ángulo y el lugar de las proyecciones de los vértices del ángulo recto sobre estas mismas cuerdas.

19. Un rectángulo ABCD tiene un vértice A fijo : los dos vértices B y D, se mueven sobre una circunferencia dada : ¿cuál es el lugar descrito por el vértice C opuesto al vertice A?

20. Dado un punto fijo P en el plano de un círculo O, se junta este punto P á un punto cualquiera A de la circunferencia y se determina sobre esta recta un punto M tal que el producto $PA \times AM$ sea una constante. Hallar el lugar que describe el punto M cuando el punto A recorre la circunferencia O.

21. Por dos puntos A y B dados en una circunferencia trazar dos cuerdas paralelas cuya suma sea igual á una longitud dada. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1867.)

22. Un ángulo dado gira alrededor de su vértice fijo. Sobre los lados de este ángulo tomamos, á partir del vértice, longitudes variables, pero cuya relacion es invariable y dada. Si los extremos de una de estas longitudes describen una recta de posicion dada, ¿qué línea describirian los extremos de la otra longitud variable? (Concurso académico de Dijon, clase de segunda, 1868.)

23. Dados una circunferencia y dos puntos A y B sobre un mismo diámetro, se unen respectivamente á los puntos A y B los extremos P y Q de un diámetro móvil PQ. Dos rectas PA y QB obtenidas se cortan en un punto M. Se desea hallar el lugar geométrico descrito por este punto M, cuando se hace mover el diámetro PQ. (Concurso general de la clase de tercera, 1866.)

24. Dadas dos circunferencias C y C′ y una recta D perpendicular á la línea de los centros, por cada punto P de la recta se trazan tangentes á una y otra circunferencia, y en cada una de ellas se unen los puntos de contacto. Las dos cuerdas de contacto así obtenidas se cortan en un punto M cuyo lugar geométrico se pide. (Concurso general de la clase de filosofía, 1866.)

25. Dados tres puntos A, C, B en línea recta, se hace pasar por los puntos A y B una circunferencia, se junta el punto C con el medio I del arco AB. Se busca el lugar del punto M donde la línea IC encuentra la circunferencia, cuando el rádio de esta circunferencia varia. (Concurso general de la clase de tercera, 1867.)

26. Dado un punto fijo P en el plano de un círculo O, se trazan por este punto rectas cualesquiera y sobre cada una de ellas se toma un punto M tal que la línea PM sea igual á la longitud de la tangente trazada desde el punto M al círculo. El problema es hallar el lugar del punto M.

27. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno de los lados del ángulo recto es igual á 21 metros, y que la suma de la hipotenusa y del otro lado es doble de esta longitud.

28. Dos móbiles parten al mismo tiempo del vértice de un ángulo recto y recorren los dos lados, el primero con una velocidad uniforme de 12 metros por segundo, y el segundo con una velocidad uniforme ds 16 metros por segundo. ¿Cuánto tiempo necesitarán para alejarse 90 kilómetros?

29. Dos círculos cuyos rádios tienen respectivamente $2^m,5$ y $1^m,2$ de longitud, se cortan de tal manera que las tangentes trazadas por uno de los puntos de interseccion son perpendiculares entre sí, y se pregunta cuál es la distancia de los centros de estos círculos.

30. Dado un círculo cuyo rádio sea de $3^m,19$ de longitud, se le traza una tangente. Se busca sobre esta recta un punto tal que si se une con el centro, la parte exterior de esta secante sea igual al diámetro del círculo. El problema consiste en calcular la distancia de este punto al punto de contacto de la tangente.

31. Dado un círculo cuyo rádio es igual á $4^m,89$ y un punto distante del centro $7^m,28$, calcular la longitud de la tangente trazada desde este punto al círculo.

32. Dos circunferencias se cortan y por uno de los puntos de interseccion se les traza une secante paralela á la línea de los centros. Las longitudes de las cuerdas interceptadas sobre esta secante por las dos circunferencias son 14 metros y 9 metros; la de la cuerda comun 8 metros. El problema es hallar los diámetros de las dos circunferencias.

33. En un triángulo ABC se nos da la base BC igual á 72 metros, la altura que cae sobre el lado BC igual á 45 metros, y la mediana que cae sobre el mismo lado igual á 60 metros. Hallar las longitudes de los lados AB y AC.

34. Dos cuerdas paralelas de un círculo están distantes un metro y sus longitudes respectivas son 6 metros y 8 metros. Hallar el rádio del círculo.

35. Dos circunferencias son tangentes exteriormente; una tiene un rádio de $12^m,45$; la otra, doble. Se les traza una tangente comun exterior y se pide calcular la distancia de los puntos de contacto de esta tangente.

36. Dos circunferencias cuyos rádios son respectivamente iguales á $6^m,80$ y $9^m,75$ se cortan y la distancia de sus centros es igual á $9^m,60$. Calcular la longitud de la cuerda comun.

37. Se nos dan dos lados de un tirángulo ABC, $AB = 16$ metros, $AC = 24$ metros, el ángulo $A = 60°$. El problema es calcular la altura que cae sobre AC, el área del triángulo, el lado BC y la altura que cae sobre este lado.

38. En un círculo cuyo rádio tiene una longitud de $3^m,49$ se inscribe un trapecio cuya gran base es un diámetro y uno de los lados no paralelos igual al rádio. Calcular el área del trapecio.

39. Dos circunferencias cuyos rádios tienen respectivamente 9 metros y 6^m, 50 de longitud son tangentes interiormente. El problema es hallar el área del trapecio que tiene por bases el rádio de la circunferencia mayor que va á parar al punto de contacto, y una cuerda de esta misma circunferencia paralela á la línea de los centros y tangente á la circunferencia menor.

40. Se nos da un círculo cuyo rádio tiene 10 metros, y un punto que dista 3 metros del centro. Por este punto, se trazan dos cuerdas inclinadas 45° sobre el diámetro que pasa por este punto y á cada lado del diámetro. Hallar el área del cuadrilátero inscrito que tiene por vértices los extremos de estas cuerdas.

41. Los dos lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo tienen 17 metros y 24 respectivamente. Hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto.

LIBRO V

LOS POLÍGONOS REGULARES Y EL CIRCULO

§ XX. Polígonos regulares. — Su inscripcion en el círculo : cuadrado, exágeno.

212. Definiciones. Un polígono es *regular* cuando tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales.

Un polígono está *inscrito* en un círculo cuando sus vértices están sobre la circunferencia y recíprocamente, se dice que la circunferencia está en tal caso *circunscrita* al polígono.

Un polígono, está *circunscrito* á una circunferencia cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia, y entonces la circunferencia está *inscrita* en el polígono.

213. Teorema. *Si se divide una circunferencia en partes iguales por los puntos* A, B, C..., *y se reunen los puntos de division, el polígono así formado es regular* (fig. 156).

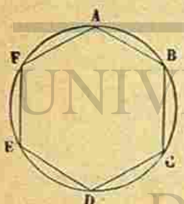

Fig. 156.

En efecto : los lados AB, BC, CD.... son iguales como cuerdas que subtienden arcos iguales, y los ángulos A, B, C.... son iguales como inscritos en los segmentos iguales, formado cada uno por dos de las partes iguales de la circunferencia.

214. Teorema. *Todo polígono regular* ABCDEFGH *puede inscribirse en un círculo y circunscribirse á otro círculo* (fig. 157).

Por los tres vértices A, B, C, haremos pasar una circunferencia, cuyo centro es O, y decimos que pasa tambien por el vértice siguiente D. En efecto : unimos OA, OD, y bajamos OI perpendicular sobre la cuerda BC. En este caso CI será igual á BI (**92**). Hagamos despues girar el cuadrilátero OICD sobre OI para rebatirle sobre OIBA. Los ángulos CIO y OIB son iguales como rectos y la línea IC tomará la direccion IB, y como dichas líneas son iguales, el punto C caerá en el punto B. El ángulo ICD = IBA, supuesto que el polígono es regular. La línea CD tomará la direccion BA y como además CD = BA el punto D caerá sobre A, y por ello OD = OA, y por consiguiente la circunferencia descrita desde el punto O como centro con el rádio OA pasa por el punto D. De igual manera se podria probar que pasa por los otros vértices del polígono, y por tanto este puede ser inscrito en el círculo.

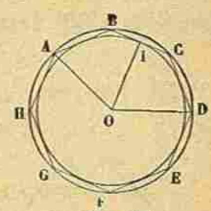

Fig. 157.

Probemos ahora que este mismo polígono puede circunscribirse á otro círculo. En efecto : los lados AB, BC, CD, etc., son cuerdas iguales de la circunferencia circunscrita al polígono; están por esta razon igualmente distantes del centro (**94**) y por consiguiente, si desde el centro O bajamos perpendiculares como OI á todos los lados del polígono, dichas perpendiculares son iguales. La circunferencia descrita desde el punto O como centro con un rádio OI toca todos los lados del polígono en su punto medio y está por consiguiente scrita en el polígono.

215. Corolario. Se llama *centro* de un polígono regular el centro comun de las circunferencias inscrita y circunscrita á dicho polígono. *Rádio* del polígono es el del círculo circunscrito. Al rádio del círculo inscrito se le da el nombre de *apotema*.

Se llama *ángulo central* de un polígono regular el que forman dos rádios consecutivos. Llamando n el número de lados del polígono, su ángulo central vale $\frac{4 \text{ rect.}}{n}$, y el ángulo del polígono mismo (**68**) $2 \text{r.} - \frac{4 \text{ rect.}}{n}$.

216. Problema. *Inscribir un cuadrado en un circulo* (fig. 158).

Fig. 158.

Trazamos dos diámetros perpendiculares AC, BD; unimos sus extremos, con lo cual la figura ABCD es un cuadrado; porque los diámetros perpendiculares dividen la circunferencia en cuatro partes iguales y por consiguiente el polígono ABCD es regular (**213**).

217. Corolario. En el triángulo rectángulo AOB tenemos (**198**) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2;$$

de donde se deduce :

$$AB = OA\sqrt{2}, \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{OA} = \sqrt{2};$$

y por consiguiente la *relacion del lado de un cuadrado inscrito en un círculo con el rádio de este círculo es igual á* $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ es incomensurable, es decir que dicha cantidad no puede expresarse exactamente ni por un número entero ni por un número fraccionario, en lo cual vemos un ejemplo de dos cantidades que no tienen una medida comum.

Observacion. Dividiendo en dos partes iguales los arcos AB, BC, etc., resultaria inscrito un octógono regular, y continuando el procedimiento, se inscribirian polígonos regulares de 16, 32, 64, etc., lados.

218. Problema. *Inscribir en un círculo un exágono regular y un triángulo equilátero* (fig. 159).

Sea AB el lado del exágono regular inscrito en el círculo O. El ángulo central AOB es igual á $\frac{4}{6}$ ó $\frac{2}{3}$ de recto (**215**). La suma de los ángulos OAB, OBA valdrá 2 rect. $- \frac{2}{3}$ rect. $= \frac{4}{3}$ rect. Dichos dos ángulos son iguales puesto que OA = OB : cada uno vale, pues, $\frac{2}{3}$ rect., y el triángulo OAB tiene los tres ángulos iguales; luego es equilátero (**41**) y AB es igual al rádio.

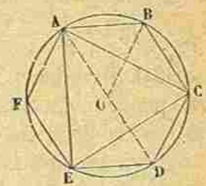

Fig. 159.

Para inscribir, segun esto, un exágono regular en un círculo, basta inscribir una tras otras seis cuerdas iguales al rádio. Uniendo despues de dos en dos los vértices del exágono regular ABCDEF se obtendrá el triángulo equilátero inscrito ACE.

219. Corolario. Tracemos el diámetro AD : el triángulo rectángulo ACD da :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2;$$

ó, llamando R el rádio del círculo

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

y

$$AC = R\sqrt{3};$$

el lado de un triángulo equilátero inscrito es igual al rádio multiplicado por $\sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ es incomensurable; y por tanto el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo y el rádio del círculo no tienen medida comum.

Observacion. Dividiendo sucesivamente en 2, 4, 8, 16.... partes iguales cada uno de los arcos subtendidos por los lados del exágono se inscribirán polígonos regulares de 12, 24, 48, 96.... lados.

§ XXI. Medio de valuar la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro. — Aplicaciones.

220. Definicion. Siendo la circunferencia una línea curva no puede obtenerse inmediatamente su longitud, como se obtiene la de la línea recta, al compararla con la unidad de longitud. De aquí la necesidad de definir lo que debe entenderse por *longitud de una circunferencia.*

Para ello imaginemos que se inscribe un polígono regular en la circunferencia (fig. 160), y que se duplican indefinidamente el número de lados de dicho polígono : se obtendrá de esta manera una serie de polígonos cuyos perímetros irán siempre en aumento pero que no crecerán sin límite, porque cada uno de ellos es mas pequeño que el perímetro de un polígono regular circunscrito, como es fácil comprobarlo. Resulta de aquí que los perímetros de los polígonos regulares inscritos tienden hácia un límite fijo que no pueden jamás alcanzar, pero al cual pueden aproximarse tanto como se quiera : este límite es lo que llamamos longitud de la circunferencia.

Fig. 160.

La longitud de una circunferencia es el límite hácia el cual tiende el perímetro de un polígono regular inscrito, cuando el número de lados de este polígono aumenta indefinidamente.

Lo mismo se definiria la longitud de un arco cualquiera.

221. Teorema. *Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes, y la relacion de los perímetros es igual á la relacion de los rádios.*

El ángulo de un polígono regular de n lados es igual á

$$2 \text{ r.} - \frac{4 \text{ rect.}}{n};$$

luego dos polígonos regulares de n lados son equiángulos.

Los lados de dichos polígonos son proporcionales, puesto que en cada polígono son todos iguales; luego los polígonos son semejantes.

Sean de otra parte, AB y A'B' los lados de los dos polígonos regulares semejantes; O y O' sus centros (fig. 161); los ángulos AOB y A'O'B' son cada uno igual á $\frac{4 \text{ rect.}}{n}$, y los lados que abrazan estos ángulos proporcionales. Los triángulos AOB, A'O'B' son pues semejantes, y resulta :

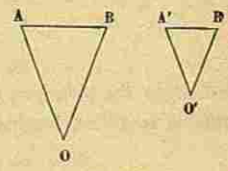

Fig. 161.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

Como la relacion de los perímetros de los dos polígonos es igual á $\frac{AB}{A'B'}$ (**193**), es por ello igual tambien á la relacion de los rádios.

222. Teorema. *La relacion de dos circunferencias es igual á la relacion de sus rádios.*

Si en las dos circunferencias O y O' (fig. 162) inscribimos dos polígonos regulares de un mismo número de lados, la relacion de sus perímetros será igual á la relacion de sus rádios OA y O'A', y esto será verdad por muy grande que sea el número de lados. Cuando se aumenta indefinidamente el número de lados de los dos polígonos, sus perímetros tienen por límites respectivos las longitudes de las dos circunferencias. Luego la relacion de estas es igual á la relacion de los rádios.

Fig. 162.

223. Corolario. I. *La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante.*

Llamemos C y C′ las longitudes de dos circumferencias cuyos rádios son R y R′, y tendrémos segun el teorema precedente

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}.$$

Doblando los términos de la segunda relacion, con lo cual no cambia su valor, tendrémos

$$\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'};$$

cambiando de lugar el término medio resulta

$$\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'};$$

lo cual significa que la relacion de una circunferencia á su diámetro es igual á la relacion de otra circunferencia con el suyo, ó en otros términos, que la relacion de una circunferencia con su diámetro es un número constante, cualquiera que sea la circunferencia. Q. E. L. D.

Llamando π esta relacion constante, tendrémos

$$\frac{C}{2R}=\pi;$$

de donde se deducen las fórmulas

$$C=2\pi R; \quad R=\frac{C}{2\pi}=\frac{C}{2}\times\frac{1}{\pi}$$

que sirven para calcular la longitud de una circunferencia de la que se conoce el rádio, é inversamente, el rádio de una circunferencia de longitud dada. Para ello es menester el número π; se demuestra que π es inconmensurable y que su valor aproximado en decimales es

$$\pi=3,14159265358979323846......$$

Pueden tambien tomarse los valores aproximados mas sencillos $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$: en la mayor parte de las aplicaciones se toma

$\pi=3,1416$ valor aproximado en menos de una centésima de milésimo. Tambien es útil conocer el vator de $\frac{1}{\pi}$, que es :

$$\frac{1}{\pi}=0,318309886183790.....$$

Aplicaciones. I. Calcular la longitud de una circufenrencia cuyo rádio es igual á $56^m,45$.

Tenenos :

$$C=56^m,45\times2\times\pi=112^m,90\times\pi=354^m,686$$

con un milimetro de aproximacion.

II. La circunferencia de una cuenca circular, medida con una cuerda es de $34^m,62$; ¿cúal es el rádio de esta cuenca?

Tenenos :

$$R=\frac{C}{2}\times\frac{1}{\pi}=17^m,31\times\frac{1}{\pi}$$
$$=17^m,31\times0,31830988.....=5^m,510$$

con un milímetro de aproximacion.

III. Calcular el rádio de un meridiano terrestre suponiendo que la circunferencia de este meridiano sea igual á 40 000 000 metros.

La semi-circunferencia valdrá 20 000 000 metros y por consiguiente el rádio estará dado por la fórmula

$$R=20\,000\,000^m\times\frac{1}{\pi}=6366198^m$$

con menos de un metro de esceso.

224. Corolario. II. La longitud de un arco de circulo se deduce fácilmente de la longitud de la circunferencia. Sea R el rádio del arco, *n* el n.° de grados de este arco, C su longitud, *l* la longitud de la circunferencia entera, en cuyo caso es evidente que la relacion del arco á la circunferencia es igual á la relacion de n á 360°, y tendrémos :

$$\frac{l}{C}=\frac{n}{360};$$

sustituyendo C por $2\pi R$, tendremos la fórmula

$$l=\frac{2\pi Rn}{360}=\frac{\pi Rn}{180}.$$

Aplicaciones. I. ¿Cuál será la longitud del arco de 48° en una circunferencia cuyo rádio es de 7^m?

Tenenos :

$$l=\frac{\pi\times7\times48}{180}=\frac{\pi\times7\times4}{15}=\frac{28\pi}{15}=5^m,864$$

con un milímetro de diferencia.

II. La longitud del arco de $31°,17'$ en una circunferencia es de $145^m,6$, ¿cuál es el rádio de esta circunferencia?

De la fórmula precedente se deduce

$$R=\frac{180l}{\pi n};$$

como en este ejemplo, el arco dado contiene minutos, lo convertimos en minutos así como el número 180 que representa el n.° de grados de la semi-circunferencia, y tendremos entonces :

$$R=\frac{10800\times145,6}{1877\times\pi}=\frac{1572480}{1877}\times\frac{1}{\pi}=266^m,668,$$

con menos de un milímetro de diferencia.

III. En un círculo, hay un arco de longitud igual al rádio; ¿cuál es el n.° de grados, minutos y segundos de dicho arco?

De la fórmula $l=\frac{\pi Rn}{180}$ se deduce

$$n=\frac{180l}{\pi R}$$

y como en este caso l es igual á R, la fórmula se simplifica y será

$$n=\frac{180}{\pi}=180\times\frac{1}{\pi}=57°,29577951.....$$

Para valuar en minutos la fraccion decimal de grados, es necesario multiplicarla por 60, de lo cual resulta, trasformada aquella en 17′7467706; y la fraccion decimal de minutos se convertirá á su vez en segundos multiplicándola tambien por 60, y dará 44″8062.... Luego el arco pedido vale :

$$57°,\ 17',\ 44'',\ 806,$$

con un milésimo de segundo de diferencia.

225. Observacion. *Dos arcos que contienen el mismo número de grados, minutos y segundos tienen longitudes proporcionales á sus rádios*, puesto que para obtener la longitud de un arco es necesario multiplicar su rádio por la cantidad $\frac{\pi n}{180}$, cantidad invariable si la medida del arco en grados, minutos y segundos permanece la misma. Luego si el rádio es doble, triple, cuadruplo, etc., la longitud del arco será al mismo tiempo doble, triple, cuadruplo, etc., es decir, que será proporcional al rádio.

226. Problema. *Dado el lado* c *de un polígono regular inscrito en un círculo que tenga por rádio* R, *calcular el lado* c′ *del polígono regular inscrito de un número doble de lados.*

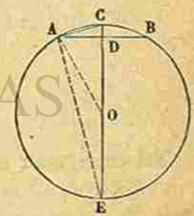

Fig. 163.

Sea AB el lado c dado (figura 163). Trazamos el diámetro CE perpendicular á AB, y AC será el lado c' buscado. Tenemos, pues, (**196**, 1.°) :

$$\overline{AC}^2=CE\times CD=CE\times(CO-OD);$$

Además

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}};$$

luego

$$c'^2=2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}\right),$$

ó bien

$$c'=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-c^2})}.$$

Aplicaciones. I. Supongamos que el rádio de la circunferencia sea igual á 1, y que el polígono regular dado sea el cuadrado inscrito en el círculo: en este caso $AB=\sqrt{2}$ (**217**), y tendrémos:

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}};$$

y multiplicando por 2 los dos términos de la fraccion debajo el radical, resulta que

$$OD=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

de donde se deduce

$$CD=OC-OD=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

de aquí se sigue

$$\overline{AC}^2=CD\times CD=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times 2=2-\sqrt{2}$$

y

$$AC=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Tal es el valor del lado del octógono regular inscrito en el círculo cuyo rádio es igual á uno.

II. Supongamos, en segundo lugar, que el polígono dado sea el exágono regular, siendo el rádio en todo caso igual á 1.

Entonces $AB=1$ y tendrémos:

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

síguese de aquí que

$$CD=OC-OD=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

y

$$\overline{AC}^2=CD\times CE=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times 2=2-\sqrt{3},$$

de donde $AC=\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

que es el valor del lado del dodecágono regular inscrito en el círculo de radio 1.

227. Problema. *Calcular un valor aproximado del número* π.

Tomamos una circunferencia de rádio 1. En este caso la fórmula $C=2\pi R$ nos da $\pi=\frac{C}{2}$ y para tener el valor de π basta calcular la longitud de la semi-circunferencia cuyo rádio es 1. Para ello calcularémos los perímetros de los polígonos regulares inscritos de 4, 8, 16, 32, etc., lados. Estos perímetros serán valores aproximados de C. El lado del cuadrado inscrito en el círculo cuyo rádio es 1 es $\sqrt{2}$ La fórmula del número precedente nos servirá para calcular el lado del octógono regular. Despues calcularemos el lado del polígono regular de 16 lados, y así en adelante. Conocidos los lados de estos polígonos, obtendremos facilmente el de los medios perímetros. He aquí sus valores:

4 lados.	2,82842
8 —	3,06146
16 —	3,12144
32 —	3,13654
64 —	3,14033
128 —	3,14127

y así en adelante. Dichos números son valores cada vez mas aproximadas del número π.

Observacion. Por un método análogo encontró Arquímedes para π el valor aproximado de $\frac{22}{7}$.

§ XXII. Area de un polígono regular. — Area de un círculo, de un sector circular.

228. Teorema. *El área de un polígono regular tiene por medida el producto de su perímetro por la mitad de su apotema.*

Sea ABCDEF un polígono regular (fig. 164). Le descomponemos por medio de rádios OA, OB, OC..., en triángulos, que tienen por bases los lados del polígono, y por altura las líneas iguales OG, OH, etc. Cada uno de estos triángulos tiene por medida el producto de su base por la mitad de la apotema. La suma de todos los triángulos ó el polígono entero tiene por medida la suma de las bases multiplicada por la mitad de la apotema, es decir el producto del perímetro por la mitad de la apotema. Q. E. L. D.

Fig. 164.

229. Teorema. *El área del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del rádio.*

Supongamos que en el círculo dado se inscribe un polígono regular de gran número de lados. El área de este polígono diferirá muy poco de la del círculo, el perímetro del polígono tambien se diferenciará muy poco de la circunferencia y la apotema será próximanente el rádio. Aumentando cada vez mas el número de lados del polígono regular, su área se aproximará indefinidamente de la del círculo, su perímetro tenderá á confundirse con la circunferencia y la apotema llegará á diferenciarse del rádio en una cantidad insignificante. Podremos, segun esto considerar el círculo como un polígono regular de un número ilimitado de lados, que tiene por perímetro la circunferencia y por apotema el rádio, y que en virtud de lo dicho en el teorema anterior, tiene por medida el producto de su circunferencia por la mitad del rádio Q. E. L. D.

230. Observacion. Como anteriormente, llamemos R al rádio del círculo, C á la longitud de la circunferencia, S el área de este mismo círculo, y por el teorema anterior tendrémos :

$$S=\frac{C\times R}{2};$$

pero sabemos por otra parte (**232**) que :

$$C=2\pi R.$$

Podemos, pues, sustituir C por este valor en la primera fórmula y resultará :

$$S=\frac{2\pi R\times R}{2}=\pi R^2, \qquad [1]$$

fórmula que se enuncia en estos términos :

El área del círculo es igual al cuadrado de su rádio multiplicado por el número π.

En vez de sustituir, en la expresion de S, la circunferencia por su valor en funcion del rádio podria por el contrario reemplazarse R por el valor $R=\frac{C}{2\pi}$ (**225**) y tendriamos en este caso :

$$S=\frac{C}{2}\times\frac{C}{2\pi}=\frac{C^2}{4\pi}=\left(\frac{C}{2}\right)^2\times\frac{1}{\pi}. \qquad [2]$$

Esta fórmula, de uso menos frecuente que la anterior, se enuncia así :

El área del círculo es igual al cuadrado de la semi-circunferencia multiplicado por $\frac{1}{\pi}$.

Aplicaciones. I. El diámetro de una pieza de cinco francos en plata es de 37 milímetros, y se desea saber la superficie de esta pieza.

El rádio es igual á $\frac{37^{mm}}{2}=18^{mm},5$; y en este caso la fórmula [1] dará :

$$S=18,5^2\times\pi=1075^{mmc},21.$$

con menos error de una centésima de milímetro cuadrado.

II. La circunferencia de un círculo máximo del globo terrestre es igual á 40 000 kilómetros, y se desea saber la superficie de dicho círculo.

La formula [2] nos dará

$$S=20000^2\times\frac{1}{\pi}=127323954^{kc},$$

con menos de un kilómetro cuadrado de diferencia.

III. Calcular el rádio de un círculo que tuviese la superficie de una hectárea. De la formula [1] se deduce inmediatamente

$$R^2=\frac{S}{\pi};$$

que nos dará en el ejemplo propuesto, tomando el metro por unidad de longitud

$$R^2=10000\times\frac{1}{\pi}=3183,0988\,;$$

y estrayendo la raiz cuadrada de los dos números

$$R=\sqrt{3183,0998}=56^m,42,$$

con menos de un centímetro de error.

231. Definicion. Se llama *sector de círculo* ó simplemente *sector* la porcion de círculo comprendido entre dos rádios.

232. Teorema. *El área de un sector es igual á la longitud del arco que le sirve de base multiplicada por la mitad de su rádio* (fig. 165).

Sea AOB el sector dado. Inscribamos en el arco AB una línea quebrada que tenga todos sus lados iguales, ACDB, y supongamos que aumenta indefinidamente el número de lados. El área comprendida entre esta línea quebrada y los dos rádios OA y OB se acercará cada vez más al área del sector, á medida que la longitud de la línea quebrada inscrita en el arco AB se aproxime á la del arco mismo. En este caso, haremos ver, como en el número (**228**), que el área del polígono formado por los rádios OA y OB y la línea quebrada inscrita tiene por medida la longitud de esta línea quebrada multiplicada por la mitad de su apotema OG; de donde concluiremos, como hicimos respecto al círculo, que el área del sector es igual á la longitud del arco AB multiplicada por la mitad de OA. Q. E. L. D.

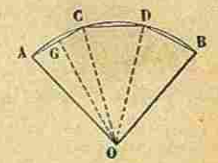

Fig. 165.

233. Observacion. Llamenos R el rádio del sector, l la longitud del arco AB y S el área del sector, y tendrémos segun el teorema precedente,

$$S=\frac{l\times R}{2};$$

y si reemplazamos l por su valor dado en el nº **224**, tendrémos :

$$S=\frac{\pi Rn}{180}\times\frac{R}{2}=\frac{\pi R^2n}{360},$$

fórmula ordinariamente empleada para calcular el área del sector y que puede servir para resolver muchas cuestiones relativas al sector circular : no nos detenemos en ello.

234. Corolario. *La relacion del área del sector con la del círculo es igual á la relacion del arco del sector con la circunferencia.*

Porque estas dos áreas se obtienen multiplicando por una misma cantidad, que es la mitad del radio, de una parte el arco del sector y de otra la circunferencia; luego su relacion es igual á la del arco con la circunferencia.

§ XXIII. Relacion de las áreas de dos figuras semejantes.

235. Teorema. *La relacion de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la relacion de los lados homólogos.*

Fig. 166.

1.º Demostraremos en primer término el teorema relativamente á dos triángulos semejantes ABC, A'B'C' (figura 166). Desde los vértices homólogos A y A' trazamos las alturas AD y A'D', y los dos triángulos ABD, A'B'D' tienen los ángulos D y D' iguales como rectos; los ángulos B y B' iguales como homólogos de dos triángulos semejantes; los dos triángulos son pues semejantes (**187**) y dan la proporcion

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'};$$

lo cual vale tanto como decir que en dos triángulos semejantes, la relacion de dos alturas homólogas es igual á la relacion de los dos lados homólogos. Esto dicho, el área del triángulo ABC tiene por medida el producto $\frac{1}{2}BC\times AD$ y la del triángulo A'B'C' es igual á $\frac{1}{2}B'C'\times A'D'$. La relacion de estas dos áreas es, pues, $\frac{BC\times AD}{B'C'\times A'D'}$ que puede escribirse $\frac{BC}{B'C'}\times\frac{AD}{A'D'}$. Pero acabamos de ver que la relacion $\frac{AD}{A'D'}$ es igual á $\frac{AB}{A'B'}$; $\frac{BC}{B'C'}$ es tambien igual á $\frac{AB}{A'B'}$ á consecuencia de la semejanza de los triángulos; luego

la relacion de los triángulos es igual á

$$\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Puede tambien demostrarse este teorema mediante consideraciones por extremo fáciles. Cuando se duplican los lados de un triángulo, las alturas son dobles al mismo tiempo. Si se doblara solamente la base sin cambiar la altura, el área del triángulo doblaria. Si se dobla despues la altura, el área doblaria todavia; luego seria cuatro veces mayor. De igual modo es evidente que triplicando todos los lados de un triángulo, el área será nueve veces mayor y así en adelante; luego las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos.

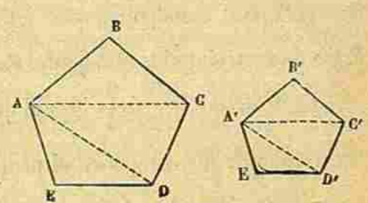

Fig. 167.

2.º Consideramos en segundo lugar, dos polígonos semejantes cualesquiera ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. **167**); los descomponemos en triángulos semejantes uno á uno, y tendrémos segun lo dicho anteriormente

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2};\qquad \frac{ACD}{A'D'E'}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2};\ \text{etc.}$$

De otro lado, siendo semejantes los polígonos, tenemos :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'};$$

y por consecuencia,

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

De todas estas igualdades de relaciones se desprende :

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{ACD}{A'C'D'}=\frac{ADE}{A'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

y finalmente

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{A'B'C'+A'C'D'+A'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

Puede darse á esta demostracion otra forma. Supongamos para fijar las ideas que la relacion de los lados homólogos de dos polígonos semejantes sea igual á $\frac{3}{2}$; la relacion de las áreas de dos triángulos semejantes tomados en los dos polígonos será el cuadrado de $\frac{3}{2}$ ó $\frac{9}{4}$, lo cual quiere decir que cada uno de los triángulos que componen el primer polígono es $\frac{4}{9}$ del triángulo correspondiente en el segundo polígono. El primer polígono vale por consiguiente los $\frac{9}{4}$ del segundo, ó en otros términos la relacion de las áreas de estos polígonos es igual á la relacion de los cuadrados de los lados homólogos. Q. E. L. D.

236. Corolario. I. Dos figuras semejantes cualesquiera pueden siempre asimilarse á dos polígonos semejantes reemplazando las líneas curvas por líneas quebradas que difieran poco de las primeras; luego *las áreas de dos figuras semejantes cualesquiera son proporcionales á los cuadrados de las líneas homólogas de estas figuras.*

En particular, *las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.* Puede, por lo demás, demostrarse esto directamente mediante la fórmula que da el área del círculo, cuando se conoce el rádio (**230**). Sean en efecto R y R′ los rádios de los dos círculos, S y S′ las superficies y tendrémos :

$$S=\pi R^2; \quad S'=\pi R'^2;$$

dividiendo estas dos igualdades miembro á miembro, tendrémos:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\pi R^2}{\pi R'^2};$$

y dividiendo por π los dos términos de la segunda relacion,

cosa que no altera el valor, resultará

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

237. Corolario. II. *Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes, el polígono construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los polígonos construidos sobre los dos lados del ángulo recto.*

Llamemos a á la hipotenusa, b y c los dos lados del ángulo recto del triángulo rectángulo, S, S′ y S″ las áreas de los polígonos semejantes construidos sobre estos tres lados, y tendrémos :

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'}{b^2}=\frac{S''}{c^2};$$

de donde se deduce

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'+S''}{b^2+c^2}.$$

Los denominadores de estas dos relaciones son iguales (**198**); luego lo son tambien los numeradores, y resulta :

$$S=S'+S''. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO V

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si se divide una circunferencia en partes iguales y por los puntos de division se trazan tangentes á dicha circunferencia, formarán un polígono regular.

2. Si se prolongan de dos en dos los lados de un exágono regular, se obtiene un triángulo equilátero cuyo lado es triple del del exágono. Hallar la relacion de las áreas de estos dos polígonos.

3. El lado del triángulo equilátero circunscrito á un círculo es doble del del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.

4. Si dos arcos de la misma longitud tienen los rádios diferentes, la relacion de los ángulos centrales correspondientes á estos arcos es inversa de la relacion de los rádios.

5. Se obtiene un valor aproximado de la semi-circunferencia tomando la suma de los lados del triángulo equilátero y del cuadrado inscrito en el círculo — Error cometido.

6. Si al triplo del diámetro de una circunferencia se agrega la quinta parte del lado del cuadrado inscrito, se obtiene un valor aproximado de la circunferencia. — Error que se ha cometido.

7. Los lados de los polígonos regulares de 4, 8, 16, 64, etc. lados, inscritos en un círculo cuyo rádio sea 1 tienen por expresion :

4 lados. . . $\sqrt{2}$

8 » . . . $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

16 » . . . $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

32 » . . . $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

64 » . . . $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

y así en adelante.

8. El dodecágono regular inscrito en un círculo es equivalente al cuadrado que tiene por lado el lado del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.

9. El área del exágono regular inscrito en un círculo es media proporcional entre las áreas de los triángulos inscritos y circunscritos al mismo círculo.

10. Llamando A y B las áreas de dos polígonos regulares semejantes, el uno inscrito y el otro circunscrito á un mismo círculo, y A′ el área de un polígono regular inscrito de un número doble de lados, A′ es media proporcional entre A y B.

11. Se trazan en un círculo dos cuerdas paralelas, la una igual al lado de un exágono regular, la otra al de un triángulo equilátero : el área de la porcion de círculo comprendida entre estas dos cuerdas es igual á la sesta parte del círculo entero.

12. El área de una corona circular comprendida entre dos circunferencias concentricas tiene por medida la longitud de la circunferencia trazada á igual distancia de las dos primeras multiplicada por la semi-diferencia de los radios.

13. Si se marca un punto C sobre un diámetro AB de una semi-circunferencia, y se describen dos semi-circunferencias sobre los segmentos AC y BC, el área comprendida entre estas tres semi-circunferencias es equivalente al círculo que tenga por diámetro la media proporcional entre AC y BC.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Inscribir un triángulo equilátero en un cuadrado dado, colocando uno de los vértices del triángulo ora en uno de los vértices del cuadrado, ora en medio de uno de sus lados.

2. Dado un cuadrado sacar de el cuatro triángulos rectángulos isosceles iguales, y de tal condicion que el octógono así obtenido sea regular.

3. Calcular los rádios de los círculos inscritos y circunscritos al triángulo equilátero, al cuadrado y al exágono regular, conociendo la longitud del lado de cada uno de estos polígonos.

4. Dado el rádio R de un círculo, hallar las áreas del triángulo equilátero, del cuadrado, del exágono regular, del octógono regular y del dodecágono regular inscritos en el círculo.

Aplicacion al caso en que R es igual á 1000 metros.

5. Dados tres círculos cuyos rádios son R, R′, R″; construir un círculo equivalente á la suma de estos tres círculos. Si los rádios se expresan en números y se nos da, por ejemplo :

$$R=4^{m}, \quad R'=7^{m}, \quad R''=12^{m},$$

calcular el rádio del círculo equivalente á la suma de los tres círculos dados.

6. Dada la apotema de un octógono regular igual á $7^{m},162$, calcular su superficie.

7. Se inscriben en un círculo dado dos cuerdas paralelas, de las cuales, la una AB es el lado del exágono regular inscrito, y la otra, CD, el del triángulo equilátero inscrito. Se prolongan los rádios OC y OD hasta encontrar á AB prolongada tambien hasta los puntos E y F. Hallar la superficie del círculo que tiene por rádio OE y demostrar que el triángulo OEF tiene una superficie equivalente á la mitad del exágono regular inscrito en el círculo dado. (Concurso académico de Dijon, clase de segunda, 1866.)

8. La superficie de una corona circular es igual á cuatro metros cuadrados, y el espesor de la dicha corona, es decir, la diferencia de los rádios de las dos circunferencias es igual á $3^{m},1416$. Calcular los rádios de las dos circunferencias.

9. Calcular las áreas de los segmentos de círculo cuyos arcos son de 90°, de 60°, de 120°; siendo el rádio del círculo igual á $4^{m},84$.

10. Sean A y B dos puntos cuya distancia es un metro. Desde cada uno de estos puntos como centro, con un rádio igual á un metro, se describe un círculo. Calcular con un centímetro cuadrado de diferencia el área de la parte comum á los dos círculos. (Concurso general de la clase de filosofía, 1864.)

11. Dado un rectángulo ABCD en el cual la altura AD es la mitad de la base AB (fig. 168), desde los puntos A y B como centros con AD por rádio, describimos dos arcos de círculo DE y CE, y sobre AB como diámetro describimos la semi-circunferencia AKB que corta los arcos precedentes en G y en H. Se pide 1.° calcular la superficie EGKH comprendida entre los dos círculos; 2.° calcular la del cuadrilátero DGHC resultado de unir DG, GH, y HC. Se da como antecedente que $AD = 15^{m},35$.

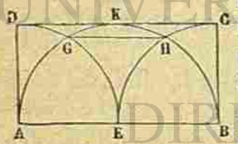

Fig. 168.

12. Dado un paralelógramo ABCD y un punto P en su plano,

trazar por este punto P una línea que forme con las rectas AB y AC, prolongadas suficientemente, un triángulo equivalente al paralelogramo.

13. Construir un polígono semejante á otro polígono dado y cuya área esté con respecto á la del polígono dado en la relacion de dos líneas dadas.

14. Dividir un triángulo en partes equivalentes ó proporcionales á líneas dadas por paralelas á la base.

15. Dividir un círculo mediante circunferencias concéntricas en partes equivalentes.

16. Sea un círculo O. Determinar con la regla y el compás un punto exterior S tal que si se traza una tangente SA á la circunferencia y si desde el punto de contacto se baja una perpendicular AP sobre OS, la relacion de los triángulos SAO, PAO sea igual á la de 3 á 2. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1865.)

17. Construir un polígono semejante á un polígono dado y equivalente á otro polígono dado tambien.

SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

LIBRO VI

EL PLANO Y LA LÍNEA RECTA

§. XXIV. Del plano y de la línea recta en el espacio. — Perpendiculares y oblícuas al plano.

238. Definiciones. Ya hemos dicho que se llama *plano* la superficie en que la línea recta que une dos puntos cualesquiera de dicha superficie, está toda ella en la misma superficie. Resulta de esta definicion que una línea recta no puede cortar un plano mas que en un solo punto, que se llama *pié* de la recta en el plano.

Una recta que encuentra á un plano se llama *perpendicular* con relacion al mismo, cuando es perpendicular á todas las rectas trazadas por su pié en el plano. Siempre que una recta es perpendicular al plano, reciprocamente este es perpendicular á la recta.

Una recta que encuentra un plano y no es perpendicular á este, es *oblícua* al mismo. Un plano es una superficie indefinida, pero para mayor claridad en las figuras le representarémos siempre limitado dándole la forma de un paralelógramo, forma aproximada de un rectángulo cuando se le mira oblícuamente desde un punto de vista muy lejano.

239. Teorema. *Por dos rectas* AB y AC, *que se cortan puede pasar un plano, pero no mas que uno* (fig. 169).

Representémonos un plano cualquiera trazado por AB y hagámosle girar al rededor de AB hasta que contenga un punto C de la segunda recta. Conteniendo dos puntos A y C de esta recta, contendrá la recta entera, y por tanto contendrá las dos rectas AB y AC.

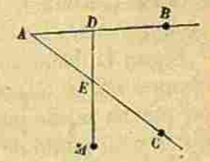

Fig. 169.

Decimos además que por AB y AC no puede pasar mas que un plano. En efecto : supongamos dos planos P y Q que pasan por estas dos líneas, y sea M un punto cualquiera del plano P. Por este punto trazamos en el plano P una recta que encuentre las otras dos AB y AC en los puntos D y E. Estos puntos estarán tambien situados en el plano Q; luego la línea DE y por tanto el punto M estaran contenidos en el plano Q. Todos los puntos del plano P pertenecen, pues, al plano Q, ó en otros términos, los planos P y Q coinciden. Q. E. L. D.

240. Corolario. I. *Por tres puntos* A, B, C, *que no están en línea recta puede pasar un plano, y no puede pasar mas de uno* (fig. 169).

Unamos AB y AC. El plano trazado por estas dos rectas contiene los tres puntos A, B, C, y todo plano trazado por los tres puntos contiene tambien las dos rectas. Por las dos rectas no puede hacerse pasar mas que un plano; luego tampoco puede hacerse pasar mas que uno por los tres puntos, A, B, C. Q. E. L. D.

241. Corolario. II. *Por una recta y un punto exterior á dicha recta puede pasar un plano, pero no mas que uno.*

Si unimos el punto dado á un punto cualquiera de la recta dada, tendrémos dos rectas que se cortan. El plano de estas contiene la recta y el punto dado, y recíprocamente, todo plano que pasa por la recta y el punto dado contiene las dos rectas que se cortan. Estas dos últimas no determinan, segun lo dicho, mas que un plano, y lo mismo debe decirse de la recta y el punto dados.

242. Corolario. IV. *Dos rectas paralelas determinan un plano, y nada mas que uno.*

Segun la definicion misma (**93**) dos rectas paralelas están siempre en un mismo plano y no determinan mas que uno, porque no puede pasar mas que uno solo por una de estas rectas y un punto de la otra (**241**).

243. Observacion. Pueden deducirse de los teoremas que preceden diversos modos de engendrar un plano.

Supongamos que una recta móvil indefinida gira al rededor de uno de sus puntos y se apoya constantemente sobre una recta fija que no pasa por el punto fijo : la recta móvil engendrará el plano determinado por la recta y el punto fijo.

De igual manera, una recta móvil que se mueve paralelamente á ella misma apoyándose constantemente en una recta fija describe un plano.

Lo mismo acontece con una recta que se mueve, apoyándose constantemente sobre dos rectas que se cortan.

244. Teorema. *La interseccion de dos planos es una línea recta* (fig. 170).

Fig. 170.

Tomemos dos puntos cualquiera A y B sobre la línea de interseccion. Siendo estos dos puntos comunes á los dos planos, la línea recta AB está contenida en cada uno de ellos, y es segun esto la línea de interseccion de los dos planos. Estos no pueden además tener ningun punto comun fuera de esta línea, porque si tuvieran uno solo, coincidirian (**241**), lo cual es contrario al supuesto.

245. Teorema. *Si una recta* AP *es perpendicular á dos rectas* PB, PC *que pasan por su pié en un plano* M, *es perpendicular á este plano* (fig. 171).

Por el punto P trazamos en el plano M una recta cualquiera PD, y decimos que AP es perpendicular á PD. En efecto : cortamos las rectas PB, PC, PD por una misma recta BC y prolongamos la línea AP mas abajo del plano una longitud PA′ = PA. Despues unimos AB, AC, AD, A′D, A′B, A′C. En el plano ABA′, PB es perpendicular en el punto medio de AA′, y por tanto (**48**) BA = BA′. De igual manera CA = CA′; luego los triángulos ABC, A′BC tienen los tres lados iguales y son iguales. Si hacemos girar el triángulo A′BC sobre BC como charnela para aplicarlo sobre su igual ABC, el punto A′ caerá en el punto A, y como el punto D permanece fijo, DA′ coincidirá con DA. Dichas dos líneas son iguales por consiguiente y el triángulo ADA′ es isósceles. La línea DP que junta el vértice de este triángulo con el medio de la base es perpendicular á AP (**39**). Segun esto la línea AP es perpendicular á toda recta que pase por su pié en plano M, y es por ello perpendicular á este plano. Q. E. L. D.

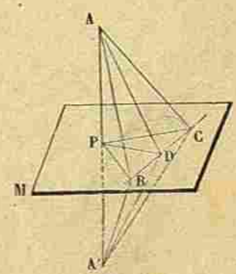

Fig. 171.

246. Teorema. *Por un punto* P *dado en un plano* M *puede siempre trazarse una perpendicular á este plano y no puede trazarse mas que una.*

1.° Trazamos una recta cualquiera BC en el plano M (fig. 172) y desde el punto P bajamos una perpendicular PB sobre esta recta. En un plano cualquiera trazado por BC trazo BA perpendicular á BC y en el plano de las dos rectas PB, BA elevo PA perpendicular á PB. Esta línea PA es perpendicular al plano M.

En efecto : sea PC una recta cualquiera trazada en este plano por el punto P. Prolongamos PA mas abajo del plano otro tanto PA′ = PA, y unimos luego AC, A′B, A′C. La recta CB perpendicular á la vez á las dos rectas PB, BA es perpendicular á su plano PBA (**245**) y por consecuencia á la recta BA′

que pasa por su pié en este plano. Los ángulos CBA, CBA′ son iguales como rectos. En el plano ABA′, BP es perpendicular en el punto medio de AA′; luego (**48**) BA = BA′. Segun esto los dos triángulos ABC, A′BC tienen el lado BC comun, BA = BA′ y el ángulo CBA = CBA′; son por consiguiente iguales y CA = CA′. El triángulo ACA′ es isósceles y por consecuencia la recta CP que junta el vértice con el medio de la base es perpendicular á AP. La recta AP, segun esto, perpendicular á las dos rectas PB y PC que pasan por su pié en el plano M, es perpendicular al mismo (**245**). Q. E. L. D.

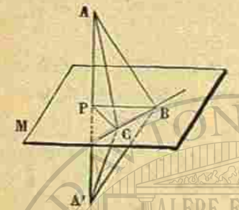

Fig. 172.

2.º Sea PA perpendicular al plano M (fig. 173) PD otra línea cualquiera, y decimos que esta es necesariamente oblícua al plano. Porque, en efecto, por las dos rectas AP, PD hacemos pasar un plano que corte al plano M segun PE. En este plano no puede trazarse á PE mas que una perpendicular (**17**) y esta perpendicular es PA. Luego PD es oblícua á PE y por consiguiente al plano M.

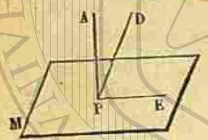

Fig. 173.

247. Teorema. *Por un punto* A *dado fuera de un plano* M *se le puede trazar una perpendicular, y no se puede trazar mas de una* (fig. 174).

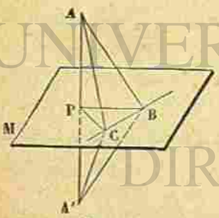

Fig. 174.

1.º En el plano M trazamos una recta cualquiera BC y desde el punto A bajamos sobre BC la perpendicular AB. Por el punto B en el plano M trazamos BP perpendicular á BC, y en el plano ABP bajamos la línea AP perpendicular á BP; AP es perpendicular al plano M (la misma demostracion que la del n.º **246**).

2.º Toda otra recta AB trazada por el punto A es oblícua al

plano M. Porque en el plano APB, AP es perpendicular á PB, luego AB es oblícua á esta línea (**42**) y por consiguiente al plano.

248. Teorema. *Por un punto* P *tomado sobre una recta puede siempre trazarse un plano perpendicular á esta recta, pero no puede trazarse mas que uno* (fig. 175).

1.º Por el punto P, en dos planos diferentes colocados siguiendo AB, trazamos á esta recta las perpendiculares PC y PD, y trazamos además el plano M determinado por estas dos líneas; AP, perpendicular á las dos rectas PD, PC, será perpendicular á este plano (**245**); luego este plano M es perpendicular á AB.

2.º Imaginemos otro plano R cualquiera pasando por el punto P y cortemos los planos M y R por otro plano cualquiera APC trazado por AB. Este plano cortará al plano R siguiendo una línea oblícua á AB, y por tanto AB es oblícua al plano R.

249. Corolario. *Si por un punto de una recta* AB *se le trazan cuantas perpendiculares se quiera, el lugar de todas estas perpendiculares es un plano perpendicular á la recta* (fig. 175).

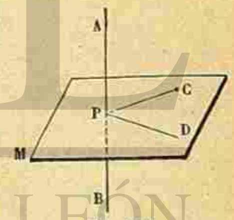

Fig. 175.

En efecto: no puede trazarse por el punto P mas que un plano perpendicular á la recta AB, y ese plano está determinado por dos cualesquiera de las perpendiculares trazadas á AB por el punto P, y por consiguiente las contiene todas. Q. E. L. D.

250. Teorema. *Por un punto* C *tomado fuera de una recta* AB *puede siempre trazarse un plano perpendicular á dicha recta, pero no mas de uno* (fig. 175).

1.º Desde el punto C bajamos sobre AB la perpendicular CP y en el punto P trazamos á AB otra perpendicular PD. El plano de estas dos rectas CP, PD es perpendicular á AB.

2.º Sea M un plano perpendicular á AB trazado por el punto

C. Le cortamos por el plano ABC y la recta de interseccion deberá ser perpendicular á AB y coincidirá con CP. Luego todo plano perpendicular á AB trazado por el punto C debe pasar por el punto P; por este no puede trazarse mas que un plano perpendicular á AB (**248**); luego tambien no puede trazarse por el punto C mas que un plano perpendicular á la línea AB. Q. E L. D.

251. Teorema. *Si desde un punto exterior á un plano se le traza una perpendicular* AP *y diversas oblícuas ;*

1.° *La perpendicular es mas corta que todas las oblícuas;*

2.° *Dos oblícuas igualmente distantes del pié de la perpendicular son iguales ;*

3.° *De dos oblícuas desigualmente distantes del pié de la perpendicular, la que mas se separa es la mayor* (fig. 176).

Fig. 176.

1.° Sea AP la perpendicular y AB una oblícua al plano M. En el plano APB, AP es perpendicular y AB oblícua á la recta PB; luego $AP < PB$ (**43**).

2.° Sean AC, AD dos oblícuas igualmente distantes del pié P de la perpendicular.

Los dos triángulos rectángulos APC, APD tienen el lado AP comun, $PC = PD$ por el supuesto, luego son iguales y $AC = AD$. Q. E. L. D.

3.° Sean AC, AE dos oblícuas tales que resulte $PE > PC$. Sobre PE tomamos una longitud $PB = PC$ y unimos AB. En el plano APE, AB y AE son oblícuas á PE, y además $PE > AB$; luego (**43**) $AE > AB$. Como $AB = AC$ (2°), resulta en definitiva que $AE > AC$. Q. E. L. D.

252. Corolario. *Si desde un punto exterior á un plano* M *se trazan oblicuas iguales,* AB, AC, AD, etc., *el lugar de los piés de todas estas oblícuas es una circunferencia que tiene por centro el pié de la perpendicular bajada desde el punto* A *sobre el plano.*

La razon es que los piés de todas estas oblícuas están igualmente distantes del pié P de la perpendicular, porque son iguales.

253. Observacion. La perpendicular bajada desde un punto sobre un plano, siendo la línea mas corta que puede trazarse desde el punto al plano, se toma como la medida de la *distancia* que hay desde el punto al plano.

254. Teorema. *Si desde el pié* P *de una perpendicular* AP *al plano* M *se traza una perpendicular* PD *á una recta cualquiera* BC, *trazada en el plano, la recta* DA *que une el punto* D *con un punto cualquiera* A *de la perpendicular al plano, es perpendicular á* BC (fig. 177).

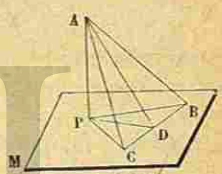

Fig. 177.

Partiendo del punto D tomamos sobre BC dos longitudes iguales DB, DC y unimos PB, PC, AB, AC. En el plano M las dos oblícuas PB, PC á la línea BC se apartan igualmente del pié de la perpendicular; luego son iguales y por tanto, $PB = PC$. Segun esto $AB = AC$ (**251**, 2.°) y por tanto el triángulo ABC es isósceles, y la línea AD que une el vértice con el medio de la base BC, es perpendicular á dicha base. Q. E. L. D.

255. Corolario. La recta BC, perpendicular á la vez á las rectas PD y AD, es perpendicular al plano PAD, que pasa por estas dos rectas.

Observacion. El teorema precedente se denomina *de las tres perpendiculares.*

§ XXV. Paralelismo de las rectas y de los planos.

256. Definiciones. Una recta y un plano son *paralelos* cuando no se encuentran por mucha que sea la distancia hasta donde se prolonguen.

Dos planos son *paralelos* cuando no se cortan aunque se prolonguen indefinidamente.

257. Teorema. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* M, *toda paralela* CD *á esta recta es tambien perpendicular al plano* (fig. 178).

El plano de las paralelas AB y CD corta el plano M siguiendo la línea BD. La recta AB perpendicular al plano M, lo es tambien á BD. En el plano ABDC, CD paralela á AB es tambien perpendicular á BD (**57**). En el plano M trazamos EF perpendicular á BD y unimos el punto D con un punto cualquiera A de la perpendicular AB; EF será perpendicular al plano ABD (**255**), y por consecuencia será perpendicular á DC que pasa por su pié en el plano este. La línea CD perpendicular á la vez á las dos rectas BD y EF que pasan par su pié en el plano M, es perpendicular á este plano. Q. E. L. D.

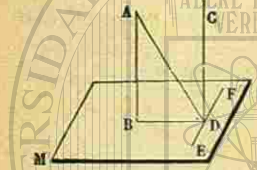

Fig. 178.

258. Corolario. *Desde un punto* D *no puede trazarse á una recta* AB *mas que una paralela* (fig. 179).

Desde el punto D trazo un plano M perpendicular á AB. Toda paralela á AB trazada por el punto D será perpendicular al plano M. Desde el punto D no puede trazarse mas que una perpendicular al plano M, luego, etc.

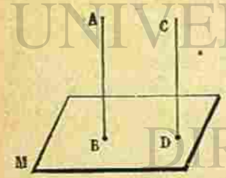

Fig. 179.

259. Teorema. Recíprocamente, *dos rectas* AB, CD *perpendiculares á un mismo plano son paralelas* (fig. 179).

Si, por el punto D, se traza una paralela á AB, será perpendicular al plano M; luego coincidirá con CD (**246**, 2.º); luego CD es paralela á AB. Q. E. L. D.

260. Corolario. *Dos rectas* AB, CD *paralelas á una tercera* EF *son paralelas entre sí* (fig. 180).

Trazamos un plano M perpendicular á EF. Las dos rectas AB, CD paralelas á EF son perpendiculares al plano M (**257**); luego son paralelas (**259**).

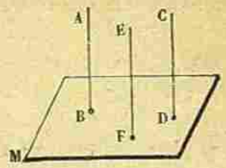

Fig. 180.

261. Teorema. *Si una recta* AB *no situada en un plano* M, *es paralela á una recta* CD, *contenida en este plano, es paralela á dicho plano* (fig. 181).

Se traza el plano de las dos pararelas AB, CD. Una recta contenida en este plano no puede encontrar al plano M mas que en un punto de CD; mas AB no puede encontrar á CD, y por consiguiente es paralela al plano M.

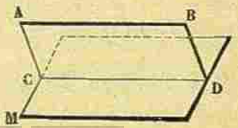

Fig. 181.

262. Teorema. *Si una recta es paralela á un plano* M, *todo plano trazado por la línea* AB *y un punto* C *del plano* M *corta este último segun la recta* CD *paralela á* AB (fig. 182).

En efecto : AB y CD están en un mismo plano; y no pueden encontrarse puesto que CD está enteramente contenida en el plano M, que es paralelo á AB; luego las dos rectas son paralelas.

263. Corolario. I. *Cuando una recta* AB *es paralela á un plano* M, *si por un punto* C *de este plano se traza una paralela á* AB, *está dicha paralela contenida en el plano* M (fig. 182).

En efecto: el plano trazado por al recta AB y el punto C corta al plano M segun la recta CD, parelela á AB. Por el punto C no puede trazarse mas que una paralela á AB (**258**); luego está contenida en el plano M.

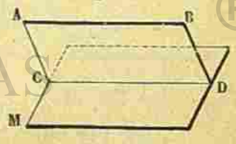

Fig. 182.

264. Corolario. II. *Si una recta es paralela á dos planos, es paralela á la interseccion de dichos planos.*

Porque si por un punto de esta interseccion se traza la paralela á la recta dada, está contenida á la vez en los dos planos (**263**).

265. Teorema. *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

Desde un mismo punto no puede trazarse mas que un plano perpendicular á una recta; luego dos planos perpendiculares á una misma recta no tiene ningun punto comun, y por tanto son paralelos.

266. Teorema. *Las intersecciones* AB, CD *de dos planos paralelos* M *y* P *con un tercer plano son paralelos* (fig. 183).

Fig. 183.

Las rectas AB y CD contenidas en los planos paralelos M y P no pueden encontrarse, y estando además en un mismo plano, son paralelas.

267. Teorema. *Si dos planos* M *y* P *son paralelos, toda recta perpendicular á uno es perpendicular al otro* (fig. 184).

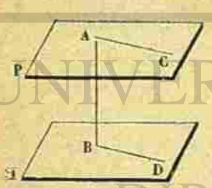

Fig. 184.

Suponemos AB perpendicular al plano M y decimos que es perpendicular al plano P. Por el punto A trazo en el plano P una recta cualquiera AC, y por la rectas AB y AC trazo un plano que corte al plano M segun la recta BD, paralela á AC (**266**). La recta AB perpendicular al plano M es perpendicular, á BD, y á la línea AC paralela á BD. La línea AB, siendo perpendicular á toda recta que pase por su pié en el plano P, es tambien perpendicular al plano P.

268. Corolario. I. *Por un punto* A *tomado fuera de un plano* M, *puede trazarse un plano paralelo al plano* M, *pero no más que uno* (fig. 184).

Desde el punto A bajamos la perpendicular AB al plano M, y trazamos un plano P perpendicular á AB en el punto A: este plano es paralelo al plano M (**269**). Recíprocamente: un plano paralelo al plano M, trazado por el punto A, debe ser perpendicular á AB; luego (**248**, 2.º) no puede existir paralelo al M por el punto A más que el plano P.

269. Corolario. II. *Dos planos paralelos á un tercero son paralelos.*

Porque dos planos paralelos á un plano dado no pueden tener ningun punto comun (**268**).

270. Teorema. *Las paralelas* AB, CD, *comprendidas entre dos planos paralelos* M *y* P, *son iguales* (fig. 185).

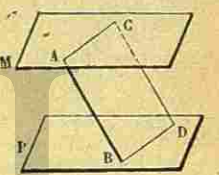

Fig. 185.

El plano de las dos paralelas corta á los planos M y P segun las paralelas AC y BD (**266**); luego la figura ACDB es un paralelógramo, y AB = CD.

271. Corolario. Si las rectas AB y CD son perpendiculares al plano M, son paralelas (**259**) y perpendiculares al plano P (**267**); luego son iguales. Segun esto: *dos planos paralelos están á igual distancia en toda su extension.*

272. Teorema. *Cuando dos ángulos* BAC, EDF *tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido,* 1.º *estos ángulos son iguales;* 2.º *sus planos son paralelos* (fig. 186).

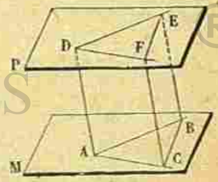

Fig. 186.

1.º Tomamos á partir de los vértices A y D sobre los lados paralelos de los ángulos las longitudes iguales AB = DE y AC = DF; unimos BC, EF, AD, BE, CF.

Siendo iguales y paralelas las línea AB, DE, la figura ABDE es un paralelógramo, y la línea BE es igual y paralela á AD. Del mismo modo CF es igual y paralela á AD, y por esta razon BE y CF son iguales y paralelas entre sí y la figura BCFE es tambien un paralelógramo. De lo dicho se deduce que $BC = EF$, en cuyo caso los dos triángulos ABC, DEF tienen los tres lados iguales, y los ángulos BAC, EDF son iguales. Q. E. L. D.

2.º Sea M el plano del ángulo BAC. Si por el punto D trazamos un plano P paralelo al plano M interceptará en las tres paralelas AD, BE, CF longitudes iguales (**270**); luego pasará por los puntos E y F y será el plano del ángulo EDF Q. E. L. D.

273. Teorema. *Tres planos paralelos* M, P, Q, *interceptan en dos rectas* AB *y* CD *segmentos proporcionales* (fig. 187).

Fig. 187.

Sean A, E, B y C, F, D los puntos en que las rectas AB y CD cortan los planos M, P y Q. Por el punto C trazamos una paralela á AB que corta los planos P y Q en los puntos H y G. Unimos HF y GD, cuyas rectas son paralelas como intersecciones del plano CGD con los planos paralelos P y Q : de donde resulta (**180**) :

$$\frac{CH}{HG} = \frac{CF}{FD};$$

pero $CH = AE$ y $HG = EB$, como paralelas comprendidas entre planos paralelos; luego :

$$\frac{EA}{EB} = \frac{CF}{FD}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

§ XXVI. Angulos diedros. — Planos perpendiculares.

274. Definiciones. Se llama *ángulo diedro* la figura formada por dos planos que se encuentran y terminan en su in-

terseccion comun. Los dos planos se llaman *caras* del ángulo diedro, y su interseccion *arista* del ángulo. El ángulo diedro suele nombrarse por las dos letras de su arista, ó bien con cuatro letras una en cada cara y dos sobre la arista, las cuales se leen en medio de las de las caras.

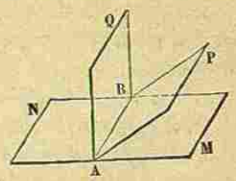

Fig. 188.

Dos ángulos diedros son adyacentes cuando tienen una misma arista, una cara comun, y están colocados uno á un lado y otro á otro de esta cara. Se suman dos ángulos justaponiéndolos de modo que sean adyacentes : el ángulo diedro formado por las caras exteriores constituye la suma de los dos que se han reunido ó sumado.

Podemos formarnos una idea clara de la magnitud de un ángulo diedro suponiendo que una de las caras P (fig. 188), aplicada primero sobre la cara M gira al rededor de la arista AB siempre en el mismo sentido, en cuya rotacion el plano móvil P forma con el plano fijo un ángulo diedro cada vez mayor.

275. Un plano Q se llama *perpendicular* con relacion á otro plano MN (fig. 189), cuando forma con este dos ángulos diedros adyacentes iguales MABQ, NABQ.

Se llama *ángulo diedro recto* aquel cuyas dos caras son perpendiculares.

Dos ángulos diedros son *opuestos por la arista* cuando las caras del uno son prolongacion de las del otro.

276. Teorema. *Por una recta* AB, *situada en un plano* MN *puede siempre trazarse un plano perpendicular al plano* MN; *pero no más de uno* (fig. 188).

277. Corolario. *Todos los ángulos diedros rectos son iguales.*

La demostracion de este teorema y su corolario son idénticas á las de los n.ºs **17** y **18**.

Observacion. Un diedro es *agudo ú obtuso* segun sea mayor ó menor que un diedro recto.

Dos diedros son *complementarios* cuando sumados valen un diedro recto; *suplementarios*, cuando dicha suma vale dos diedros rectos.

278. Teorema. *Todo plano que encuentra otro, forma con él dos diedros adyacentes suplementarios;* y recíprocamente, *si dos diedros adyacentes son suplementarios sus caras exteriores son prolongacion una de otra.*

(Demostraciones idénticas á las de los n.os **21** y **24**).

279. Definicion. Si por un punto A de la arista de un diedro (fig. 189) se trazan las perpendiculares AC y AB á esta arista en las dos caras del diedro, el ángulo BAC que forman se llama *ángulo plano ó rectilíneo* del diedro. — Si el punto A se mueve sobre la arista, las líneas AB y AC permanecen paralelas á ellas mismas y no cambia el valor de su ángulo (**272**).

Fig. 189.

El plano del ángulo rectilíneo BAC es perpendicular á la arista (**245**); luego para construir el ángulo plano de un diedro puede cortarse este diedro por un plano perpendicular á la arista.

280. Teorema. *Dos ángulos diedros iguales tienen los ángulos planos iguales,* y recíprocamente, *dos ángulos diedros que tienen los ángulos planos iguales son iguales.*

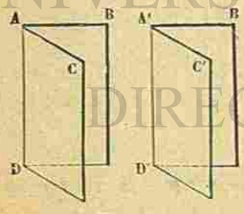

Fig. 190.

1.° Si los dos diedros AD y A'D' son iguales (fig. 190), pueden superponerse de manera que coincidan y entonces tienen el mismo ángulo rectilíneo (**279**).

2.° Supongamos que los ángulos rectilíneos BAC, B'A'C' (fig. 190) de los dos ángulos diedros AD y A'D' sean iguales, decimos que los diedros lo son tambien. En efecto: trasportemos el segundo diedro sobre el primero de modo que el ángulo plano B'A'C' coincida con su igual BAC: la arista A'D' perpendicular al plano B'A'C' tomará la direccion de la arista AD perpendicular al plano BAC (**246**, 2.°), y los dos diedros coincidirán. Q. E. L. D.

281. Corolario. *A un ángulo diedro recto corresponde un ángulo plano recto* (fig. 191). Suponemos el plano ABF perpendicular al MN. Por el punto C trazamos en el plano MN, DE perpendicular á AB, y en el plano ABF, CF perpendicular á AB. Los diedros MABF, NABF, al ser iguales (**275**) tienen los ángulos rectilíneos iguales; luego el ángulo DCF es igual á ECF. La línea CF es perpendicular á DE y por consiguiente el ángulo DCF es recto. Q. E. L. D.

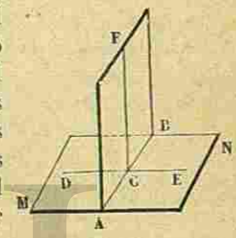

Fig. 191.

282. Teorema. — *La relacion de dos ángulos diedros es igual á la de sus ángulos planos.*

Sean AP y DQ (fig. 192) dos ángulos diedros cuyos ángulos planos son BAC y EDF. Suponemos que los ángulos planos tienen una medida comun que se contiene 5 veces en BAC y 3 en EDF. La relacion de los ángulos planos será, pues, igual á $\frac{5}{3}$. Por la arista AP y por las líneas de division AG, AH, AK, AI del ángulo BAC, trazamos planos y hacemos además la misma construccion en el otro diedro. Los dos diedros resultarán divididos en pequeños diedros todos iguales entre sí, puesto que sus ángulos planos son iguales (**208**, 2.°). El diedro

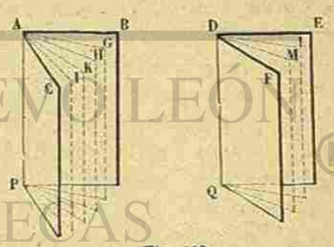

Fig. 192.

AP contiene 5, y el diedro DQ contiene 3. Luego la relacion de estos dos diedros es $\frac{5}{3}$, es decir igual á la relacion de los ángulos planos correspondientes. Q. E. L. D.

283. TEOREMA. *La medida de un ángulo diedro es la misma que la de su ángulo plano, siempre que se tome por unidad de ángulo diedro la que corresponda á la unidad de ángulo plano.*

Sea D el ángulo diedro que se va á medir, A su ángulo plano, d la unidad de ángulo diedro, a el ángulo plano correspondiente y tendrémos :

$$\frac{D}{d}=\frac{A}{a};$$

pero $\frac{D}{d}$ es la medida del ángulo diedro, y $\frac{A}{a}$ la del ángulo plano; luego, etc.

284. OBSERVACION. Si se toma el ángulo recto por unidad de ángulo rectilíneo, la unidad de ángulo diedro será el diedro recto (**281**). Podrán de este modo expresarse los ángulos diedros en grados, minutos y segundos, si llamamos ángulo diedro de 1°, 2°, 3°, etc., aquel cuyo ángulo plano vale 1°, 2°, 3°, etc.

285. OBSERVACION. El teorema precedente permite deducir muchas propiedades de los ángulos diedros de las propiedades análogas de los ángulos planos. Ejemplos : *Los ángulosdiedros opuestos por el vértice son iguales. Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, los cuatro ángulos diedros agudos son iguales entre sí, así como los cuatro diedros obtusos.*

286. TEOREMA. *Cuando una recta* AP *es perpendicular á un plano* M, *todo plano* ABC *trazado por esta recta es perpendicular al plano* M (fig. 193).

Trazamos en el plano M la recta PD perpendicular á BC; AP es tambien perpendicular á BC. El ángulo APD es, segun esto el ángulo plano correspondiente al diedro ABCN. Además AP siendo perpendicular al plano M es perpendicular á PD; el ángulo APD es recto; luego lo es el diedro y los planos son perpendiculares. Q. E. L. D.

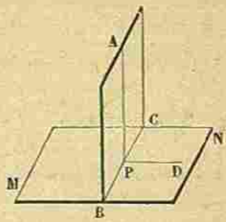

Fig. 193.

287. TEOREMA. *Cuando un plano* ABC *es perpendicular á otro* MN, *toda recta* AP *trazada en el primer plano perpendicularmente á la interseccion* BC, *es perpendicular al otro plano* (fig. 193).

Sea PD perpendicular á BC en el plano MN. Siendo recto el diedro ABCN, su ángulo rectilíneo APD es recto, y la línea AP es en este caso perpendicular á las dos rectas BC y PD que pasan por su pié en el plano MN, y por consiguiente es perpendicular al plano. Q. E. L. D.

288. COROLARIO. *Si dos planos* ABC *y* MN *son perpendiculares, y por un punto* A *del primero se traza una perpendicular al segundo, esta recta está enteramente contenida en el primero* (fig. 193).

Porque si se traza AP perpendicular á la interseccion BC de los dos planos, es perpendicular al plano MN, y como desde el punto A no puede trazarse más que una perpendicular al plano MN, esta es la línea AP contenida en el plano ABC.

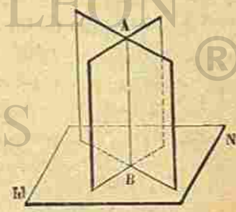

Fig. 194.

289. TEOREMA. *Si dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero* MN, *la interseccion de los dos primeros* AB *es perpendicular á dicho tercer plano* (fig. 194).

Porque si desde el punto A comun á los dos primeros planos se traza una perpendicular al plano MN, debe estar contenida en cada uno de los planos (**288**); luego habrá de ser su interseccion.

§ XXVII. Nociones sumarias sobre los ángulos triedros y poliedros.

290. Definiciones. Se llama *ángulo triedro* la figura formada por tres planos que se cortan en un mismo punto, llamado *vértice* del ángulo triedro y las intersecciones mútuas de los tres planos son las *aristas* de dicho ángulo. Los ángulos planos formados por estas aristas tomadas dos á dos se llaman las tres *caras* del ángulo triedro.

Se llama *ángulo poliedro* la figura formada por muchos planos que se cortan en un mismo punto. El ángulo poliedro se llama *convexo* cuando, prolongando indefinidamente el plano de cada una de sus caras, la figura se halla toda entera á un mismo lado de la cara prolongada.

291. Si se prolongan mas allá del vértice las aristas de un ángulo poliedro, se forma un nuevo ángulo poliedro, que se llama el *simétrico* del primero. Dos ángulos poliedros simétricos tienen sus caras respectivamente iguales, como opuestas por el vértice y sus diedros tambien iguales respectivamente como opuestos por la arista. Pero estos ángulos poliedros no son superponibles porque la disposicion de los elementos iguales es inversa en los dos, como es fácil notar, concibiendo dos observadores colocados de la misma manera en los dos ángulos poliedros.

Fig. 195.

Para mostrar que no pueden superponerse dos ángulos poliedros simétricos, tomenos por ejemplo los dos triedros simétricos OABC, OA'B'C', y hagamos coincidir la cara A'OB' con su igual AOB (fig. 195). Puede hacerse esto de dos maneras : 1.º haciendo girar la figura OA'B'C' de 180º al rededor de una perpendicular al plano

AOB trazada por el punto O. En este caso la arista OC' permaneceria detrás del plano AOB y no podria coincidir con la arista OC que está delante; 2.º haciendo girar la figura OA'B'C', de 180º al rededor de la bisectriz del ángulo BOA'. Mas en este caso la arista OA' vendrá á caer sobre OB, y á menos que el ángulo diedro OA' no sea igual al diedro OB no coincidirán los dos triedros.

Si el diedro OA es igual al diedro OB, el triedro OABC podrá coincidir con su simétrico y la cara A'OC' con la BOC; luego, *si en un triedro dos diedros son iguales, las caras opuestas á estos diedros son iguales, y el triedro es igual á su simétrico*. Recíprocamente; *si dos caras de un triedro son iguales, el triedro es igual á su simétrico, y los diedros opuestos á las caras iguales son iguales*.

292. Teorema. *En un triedro, cada cara es menor que la suma de las otras dos* (fig. 196).

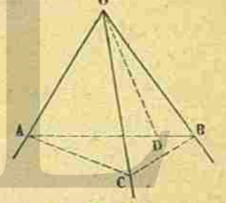

Fig. 196.

Sea OABC un triedro, AOB la cara mayor. En el plano de dicha cara trazamos la línea OD formando con OA un ángulo AOD igual á AOC. Trazamos además la línea AB que corta á OD en el punto D. Tomamos luego OC igual OD y unimos AC, BC. Los triángulos AOC, AOD tienen OA comun, $OC = OD$, y el ángulo $AOC = AOD$, y por tanto son iguales, y $AC = AD$. En el triángulo ABC tenemos :

$$AB < AC + BC;$$

restando de los dos miembros las longitudes iguales AD y AC, quedará

$$BD < BC.$$

Esto sentado, en los triángulos OBD, OBC tenemos : OB comun, $OD = OC$ y $BD < BC$. De aquí resulta (**54**) que el ángulo $BOD < BOC$, y si se agrega á los dos miembros los ángulos iguales AOD y AOC resulta en definitiva

$$AOB < AOC + BOC. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

293. Teorema. *La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos* (fig. 197).

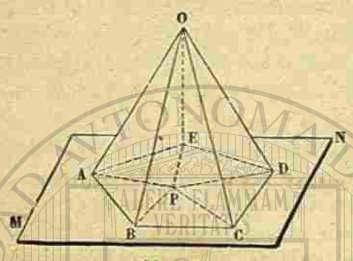

Fig. 197.

Sea O un ángulo poliedro convexo. Le cortamos por un plano MN, que encuentra todas las aristas de un mismo lado del vértice, y tenemos el polígono convexo ABCDE. Unimos todos los vértices de este polígono con el punto P tomado en su interior, resultando un número igual de triángulos de los cuales tienen por vértice comun, unos el punto O y los otros el punto P. En el ángulo triedro AOBE la cara BAE es menor que la suma de las otras dos

$$BAE < BAO + EAO.$$

De igual manera :

$$ABC < ABO + CBO$$
$$BCD < BCO + DCO, \text{ etc.};$$

si se suman todas estas desigualdades, resulta que la suma de los ángulos que están en la base de los triángulos formados al rededor del punto O es mayor que la suma de los ángulos en la base de los triángulos formados al rededor del punto P. Luego, por compensacion, la suma de los ángulos formados al rededor del punto O es menor que la de los ángulos formados al rededor del punto P, esto es, menor que cuatro rectos.

Q. E. L. D.

APÉNDICE AL LIBRO VI

LEVANTAMIENTO DE PLANOS Y NIVELACION

§ XXVIII. Nociones sobre el levantamiento de planos. — Levantamiento con el metro, la escuadra, el grafómetro y la plancheta.

294. Definiciones y nociones preliminares. Se llama *proyeccion* de un punto sobre un plano, el pié de la perpendicular bajada desde este punto sobre el plano. El plano sobre que se proyecta se denomina *plano de proyeccion;* y la perpendicular bajada desde el punto sobre el plano de proyeccion se llama *línea proyectante* ó simplemente la *proyectante* del punto.

Se llama proyeccion de una línea sobre un plano, el lugar de las proyecciones de todos los puntos de esta línea sobre el plano.

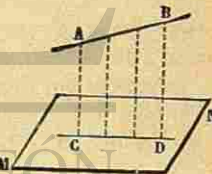

Fig. 198.

Es evidente que la proyeccion de una línea recta sobre un plano es una línea recta. En efecto : sea MN el plano de proyeccion (fig. 198), AB la recta que se proyecta. Las proyectantes de todos los puntos son paralelas (**259**), y están todas en el plano BAC determinado por una de ellas AC y la recta dada AB, y por consecuencia el lugar de sus piés es la recta CD interseccion de este plano con el de proyeccion MN.

El plano BAC es perpendicular al plano de proyeccion, puesto que contiene la proyectante AC perpendicular al plano MN (**286**), el cual se llama *plano proyectante* de la recta. Se llama proyeccion de una figura sobre un plano, la figura formada por las proyecciones de todos los puntos y de todas las líneas de la figura dada. Si el plano de proyeccion se mueve paralelamente á sí mismo, las líneas proyectantes no cambian y las proyecciones sobre los dos planos paralelos son iguales.

295. Es sabido que se llama *vertical* de un lugar la direccion de una plomada en dicho lugar. Las verticales de dos lugares diversos se juntan en el centro de la tierra; pero si estos lugares están poco separados, el ángulo de sus verticales es tan pequeño que pueden las verticales considerarse como paralelas, que es lo que hacemos en todo lo que sigue.

Se llama *plano horizontal* un plano perpendicular á la vertical. Todos los planos horizontales son paralelos (**269**). Toda recta trazada en un plano horizontal es una *horizontal*, y es perpendicular á la vertical.

Se llama *plano vertical* todo aquel que es perpendicular al horizontal : resulta de las propiedades de los planos perpendiculares :

1.° Que todo plano trazado segun una vertical es vertical (**286**).

2.° Que un plano vertical contiene todas las verticales que pueden trazarse por sus diferentes puntos (**288**).

3.° Que la interseccion de dos planos verticales es una vertical (**289**).

Cuando se quiere saber si una recta es vertical, se suspende á su lado una plomada y se observa si es paralela á la direccion del hilo.

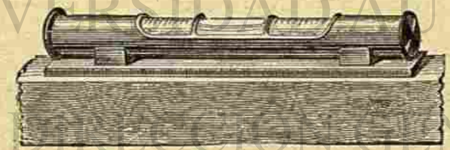

Fig. 199.

Para estar seguro de que un plano es horizontal se emplea un pequeño instrumento llamado *nivel de burbuja de aire* (fig. 199). Se compone de un tubo de cristal ligeramente convexo en la parte superior, encerrado en una armadura de cobre

que descansa sobre una platina de metal. El tubo está lleno de agua, menos en lo que ocupa una burbuja de aire que va por sí sola á colocarse en la parte superior del tubo, entre dos trazos señalados sobre el cristal, cuando la platina está horizontal. Para verificar la horizontalidad del plano se coloca el nivel de burbuja de aire sobre dicho plano en dos direcciones diversas y próximamente perpendiculares. Si la posicion de la burbuja indica que estas dos rectas del plano están horizontales, el plano contendrá dos rectas perpendiculares á la vertical, y será él mismo perpendicular á la vertical (**249**) esto es, será horizontal.

296. Cuando un terreno es plano y horizontal se llama *plano* de este terreno la figura formada por los puntos notables de este terreno y las líneas de toda especie que se trazan en él, tales como las líneas que saparan los trozos de terrenos, los bordes de los caminos y las corrientes de aguas, etc. Cuando el terreno es accidentado ó inclinado, que es lo mas frecuente, se imagina la proyeccion de la figura sobre un plano horizontal, y dicha proyeccion es lo que se llama plano del terreno.

Levantar el plano de un terreno, es tomar sobre el terreno todas las medidas necesarias para determinar completamente la figura formada por el plano.

Trasladar el plano sobre el papel, es construir sobre este una figura semejante á la figura del terreno : la relacion de las líneas trazadas sobre el papel con las líneas homólogas del terreno se llama *escala* del plano.

297. Sea cualquiera la figura cuyo plano se desea levantar, puede siempre descomponerse en polígonos, si no contiene mas que líneas rectas. Si hubiere curvas, se sustituyen por líneas quebradas que difieran poco de las curvas. La cuestion del levantamiento de planos queda, pues, reducida á levantar el de un cierto número de polígonos.

Por poco extenso que sea el terreno es mas conveniente dividir la operacion en dos partes. Debe primeramente determinarse un polígono que abrace la mayor parte de la extension del terreno y se levanta su plano; y luego se *fija* la posicion de los puntos notables y todos los detalles con respecto á los diversos lados de este polígono. Dicho polígono, que llamaremos *polígono topográfico*, ha de cumplir con ciertas condiciones: es menester en primer término que puedan medirse todos los lados y todos los ángulos, y además que los puntos notables del terreno puedan percibirse desde dos vértices al menos del polígono topográfico.

298. Levantamiento con el metro. Hemos explicado ya el uso de la cadena para medir las longitudes sobre un terreno plano y horizontal (**174**). Cuando está inclinado y desigual, no es la longitud misma de la línea AB (fig. 200) lo que hay ne-

Fig. 200.

cesidad de medir, sino la longitud de su proyeccion horizontal. Para ello, cuando el operador tiene la mano apoyada fuertemente sobre el suelo en el punto A, el auxiliar tiende la cadena bien horizontal segun la línea AC″; despues con una plomada, ó ficha cargada de plomo marca el pié C en la vertical trazada desde el punto C″. El agrimensor se traslada luego á C, y la operacion se continúa con las mismas precauciones, obteniéndose como resultado la suma de las longitudes AC″, CD″, DE″, ED″, suma que es igual á A′B′, es decir á la proyeccion horizontal de la recta AB.

Propongamonos ahora levantar el plano de un polígono ABCDEF (fig. 201). Se miden en primer termino todos los lados. Para determinar los ángulos, el A por ejemplo, se marcan dos puntos á voluntad A′ y A″ sobre los lados de este ángulo. Se miden despues los tres lados del triángulo AA′A″, lo cual determina el triángulo y por consiguiente el ángulo en

A, haciéndose otro tanto para la determinacion de los otros ángulos.

Si la naturaleza del terreno lo permite, podrán tambien medirse todos los lados del polígono y todas las diagonales trazadas desde un mismo vértice, quedando de este modo totalmente determinado el polígono.

Si se desea referir á este polígono un punto especial del terreno, bastará medir su distancia á dos vértices del polígono, pudiendo en este caso considerar especialmente el triángulo que tiene por vértice el punto dado

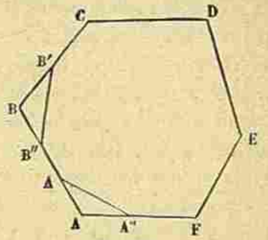

Fig. 201.

y por base un lado del polígono, y determinar los ángulos de la base de este triángulo por el procedimiento que acabamos de indicar.

Vease, pues, como con la cadena y los jalones puede levantarse el plano de un terreno, por muy complicado que sea; y cuando la operacion la hace una persona práctica es muy exacta, por mas que sea un poco detenida.

299. Levantamiento con la escuadra. Hemos descrito la escuadra y dado á conocer cómo se trazan con este instrumento perpendiculares á una recta, sobre el terreno (**175**).

Para levantar con la cadena y la escuadra el plano de un polígono ABCD..., (fig. 202) se elige sobre el terreno una línea MN, sobre la cual puedan bajarse perpendiculares desde todos los vértices A, B, C.... y medirse con la cadena todas estas perpendiculares, y la misma línea MN. Se determinan des-

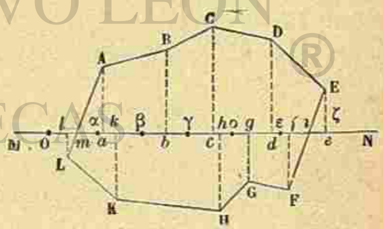

Fig. 202.

pues, mediante la escuadra los piés a, b, c.... de las perpendiculares bajadas, desde todos los vértices del polígono sobre MN. Se mide despues con la cadena la línea MN, á partir de un punto O tomado de manera que los piés de todas las perpendiculares estén á un mismo lado de este punto, notándose al llevar la cadena sobre MN la distancia á que están del punto O los l, m, a, k, etc.; una vez tendida la cadena desde O á α se mide Ol y Om; luego, llevada la cadena desde α á β, se determina Oa y Ok; sobre el tercer decámetro $\beta\gamma$ se determinara Ob y así de los demás. Se miden luego todas las perpendiculares Aa, Bb, Cc, Ll.... con lo cual se tienen evidentemente todos los elementos necesarios para determinar el área del polígono.

El levantamiento con la escuadra es muy expeditivo y bastante exacto, cuando el terreno es poco estenso, conviniendo sobre todo para levantamiento de detalles. Tiene además la ventaja de que puede desde luego determinarse el área sin trasladar el plano al papel.

300. Levantamiento con el grafómetro. El grafómetro es un instrumento que sirve para determinar sobre el terreno el ángulo de dos alineaciones. Se compone de un semi-círculo de cobre ALB, colocado sobre un pié de tres patas, y al que se articula mediante una rodilla colocada entre dos conchas *gh* (figs. 203 y 204). Esta disposicion permite dar al semi-círculo una inclinacion cualquiera. El borde ó limbo de la circunferencia está dividido en grados y medios grados. El semi-círculo lleva además dos reglas ó *alidadas* con pínulas (véase el n.º **175**), una de las cuales AB está fija, y el plano de los hilos de las dos pínulas pasa por el diámetro 0º-180º; la otra alidada CD es móvil al rededor del centro y sus extremos tienen la forma de arcos de círculo, terminados en bisel, que pueden moverse sobre la graduacion del limbo. Llevan una y otra un trazo ó señal que corresponde á la línea de visualidad ó *línea de fé* de la segunda alidada y además un *vernier* que permite valuar los ángulos con $\frac{1}{10}$ de grado ó 6 minutos de diferencia.

Veamos ahora como se mide el ángulo de dos alineaciones OA y OB (fig. 205). Se coloca el grafómetro en *estacion* en el vértice del ángulo de modo que su centro esté en la vertical de este punto; se desaprieta luego el tornillo r de la

Fig. 205.

rodilla y se hace girar el limbo hasta que esté casi horizontal y el plano de visualidad de la alidada fijo coincida con el jalon A. Se aprieta luego un poco el tornillo en términos que pueda todavía imprimirse algun movimiento al aparato. Luego con un nivel de aire se coloca el plano del semi círculo completamente horizontal, confirmándose en que la alidada fija está coincidiendo con el punto A. Entonces se acaba de apretar el

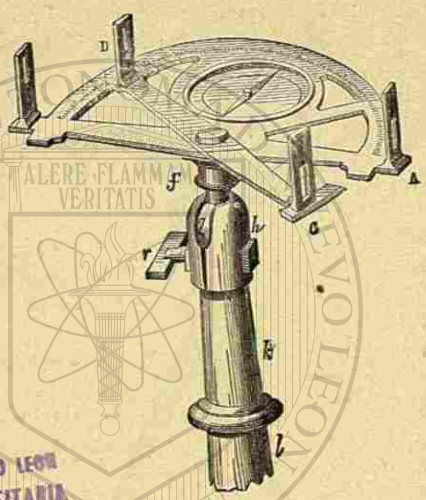

Fig. 204.

Fig. 205.

tornillo para fijar definitivamente el plano del limbo en esta

posicion, y se hace girar la alidada móvil hasta que la visual coincida con el jalon B, no faltando mas que leer ya sobre la graduacion del limbo la medida del ángulo AOB.

Si las rectas OA y OB están horizontales, se obtiene con efecto el ángulo AOB; pero si están inclinadas respecto al horizonte, se mide en realidad el ángulo de sus proyecciones horizontales, puesto que se ha tenido cuidado de colocar horizontal el limbo. El ángulo medido en esta forma se llama *ángulo reducido al horizonte*, que es cabalmente el que hay que tomar en cuenta en el levantamiento de planos.

Para levantar un plano con la cadena y el grafómetro, se emplean dos métodos principales, el método de *rodeo* y el de *interseccion;* mas largo pero mas exacto, el primero debe preferirse para levantar el plano de un polígono topográfico; mas rápido, el segundo debe emplearse con preferencia para el levantamiento de los detalles.

Método de rodeo. Se miden todos los lados del polígono con la cadena y todos los ángulos con el grafómetro, con lo cual evidentemente está determinado el polígono. Debe practicarse sobre el terreno un primer cotejo: es necesario que de este resulte que la suma de todos los ángulos medidos sea igual á tantas veces 180° como lados tiene el polígono menos dos. Si el error cometido no es, por término medio, mas que de 3 á 4 minutos por ángulo, ó sea 1° por un polígono de 12 á 15 lados se limita uno á repartirlos entre todos los ángulos medidos, puesto que el grafómetro no permite medir con mas aproximacion. Pero si el error es mayor hay que repetir la operacion. Otra verificacion puede realizarse cuando se traslada el plano al papel: porque cuando se conocen todos los ángulos de un polígono basta, para determinarlo, medir todos los lados menos dos; y como se han medido todos, si la operacion está bien hecha el polígono que se construya con los elementos medidos sobre el terreno deberá cerrar exactamente, cosa que no sucederá si se ha cometido cualquier error en la medida.

Método por interseccion. Se elije en el terreno una base MN que pueda medirse muy exactamente (fig. 206), y desde cuyos extremos puedan verse los puntos notables A, B, C, D.... que se desea determinar. Se mide luego la longitud MN y los ángulos AMN y ANM; BMN y BNM; CMN y CNM, etc. Cada uno de los triángulos AMN, BMN, CMN, etc., se determinará por su base MN y los ángulos adyacentes á la misma. La posicion de los puntos A, B, C, D.... quedará de este modo determinada.

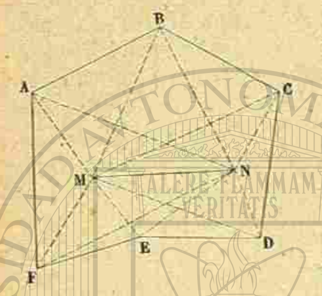

Fig. 206.

301. Traslacion del plano sobre el papel. Sabemos ya como se construye sobre el papel mediante el semicírculo un ángulo cuya medida en grados nos es conocida (**134**). Debemos ahora estudiar cómo se reduce una longitud cualquiera á una *escala* determinada. Ordinariamente la escala tiene un valor muy sencillo: las mas usuales son las de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{5000}$. Cuando la escala es de $\frac{1}{100}$ basta para hacer la reduccion, emplear el doble decímetro dividido en milímetros, porque en esta escala el milímetro representa una longitud de un decímetro sobre el terreno, y es raro que se pueda obtener una exactitud mayor en las medidas practicadas con la cadena.

Pero cuando la escala es mas pequeña, por ejemplo de $\frac{1}{5000}$, es menester recurrir á otro medio mas preciso y construir lo que se llama una *escala de reduccion ó escala de diezmos* (décimas partes) (fig. 207). En escala de $\frac{1}{5000}$, 100 metros se reducirán á $\frac{100^{m}}{5000} = 0^{m},02$. Segun esto, sobre una línea recta tomamos á la derecha de un punto marcado 0 las longitudes sucesivas de $0^{m},02$, y en los puntos de division escribimos 100, 200, 300, 400, etc.; á la izquierda del punto 0 tomamos diez longitudes 10 veces mas pequeñas, es decir de $0^{m},002$, escribiendo luego en los puntos de division 10, 20,

30.... 100. Tenemos con esto una escala que consiente valuar con exactitud las decenas del metro, ó los decámetros. Para valuar los metros tracemos debajo de la línea, así dividida diez paralelas equidistantes á esta línea y por los puntos de division primitivos perpendiculares á dichas líneas, repitiendo en la última paralela toda la numeracion que en la primera. Hecho esto, trazamos oblícuas que junten el punto 0 de la division superior con el punto 10 de la inferior, y de igual suerte los puntos 10, 20, 30.... 90 de la superior con los 20, 30, 40.... 100 de la inferior, con lo cual queda hecha la escala de décimos.

Observemos ahora que las porciones de paralelas comprendidas entre la perpendicular 0-0 y la oblícua 0-10, valen respectivamente $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., de la longitud 10 marcada en la línea inferior, cosa que resulta de las propiedades de los triángulos semejantes: así, la longitud ab valdrá $\frac{3}{10}$, de 10 metros, ó 3 metros. Si deseamos, pues, tomar una longitud de 473 metros con esta escala, colocarémos una de la puntas del compás sobre la perpendicular 400, en el punto A en que dicha perpendicular corta la 3.ª paralela, abriendo luego el compás hasta que la otra punta caiga en el punto B situado sobre la 3.ª paralela y sobre la oblícua 70-80. Decimos que en este caso AB representará 473 metros en escala de $\frac{1}{5000}$; porque en efecto $AB = Aa + Bb + ab$. Además $Aa = 400$ metros; $Bb = 70$ metros y $ab = 3$ metros. Luego $AB = 473$ metros.

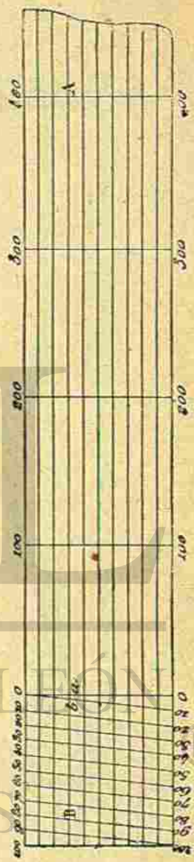

Fig. 207.

Puede trazarse la escala sobre el papel, pero es preferible usar escalas grabadas en placas de cobre, tanto porque son mas exactas, cuanto porque resisten mejor la impresion de la punta del compás.

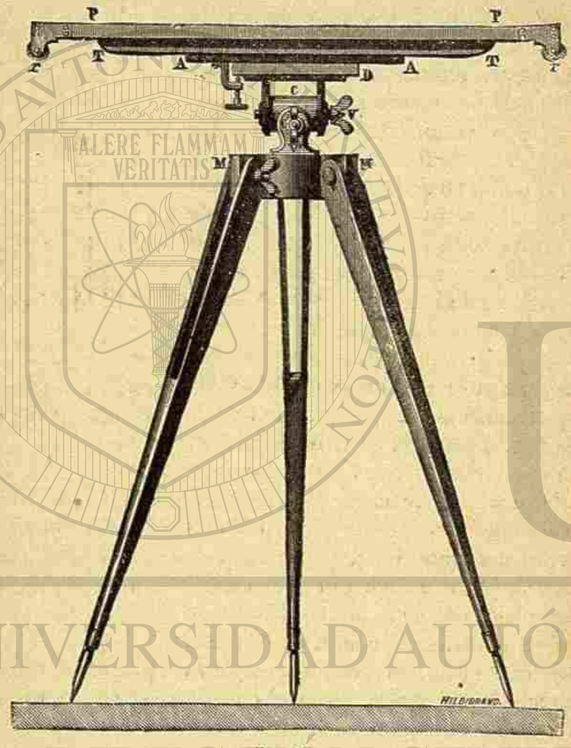

Fig. 208.

302. Levantamiento con la plancheta. La *plancheta* es un instrumento con el que puede levantarse un plano y trasladarlo al papel al mismo tiempo. La parte esencial de dicho instrumento es una plancha de dibujo PP′ bien derecha, sobre un pié de tres ramas MN (fig. 208). La plancheta se une á

este pié por un sistema de articulacion que permite darle todas las inclinaciones posibles, así como permite tambien que una vez fija la plancheta en una posicion cualquiera, pueda el instrumento girar al rededor de su centro hasta dar una direccion precisa á una línea trazada en la superficie de la plancha. Mediante los rodillos r, r' puede tenderse sobre la plancheta una hoja de papel. Va unida además á la plancheta

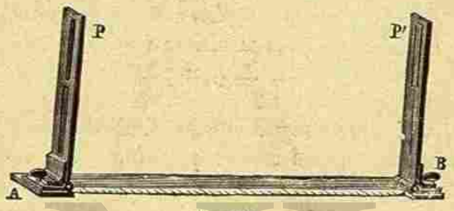

Fig. 209.

una alidada con pínula AB (fig. 209), que consiste en una regla metálica escotada en términos que su borde en bisel, se halle en el plano de visualidad de las pínulas, y cuyo borde se llama *línea de fé* de la alidada.

Puede con la plancheta tomarse el ángulo de dos alineaciones. Para ello se coloca el instrumento en el vértice del ángulo, cuidando de que la plancheta esté bien horizontal. Despues con la alidada que se pone á voluntad en la superficie de la plancheta, se dirige una visual en la direccion de uno de los lados del ángulo, y se traza con el lápiz una línea á lo largo de la de fé, y lo mismo se hace con el otro lado del ángulo. Las dos líneas trazadas sobre la hoja de papel forman un ángulo que no es mas que la proyeccion horizontal del formado por las dos alineaciones del terreno.

Despues de lo dicho puede comprenderse el uso de la plancheta en el levantamiento de un plano. Si se opera segun el procedimiento *de rodeo* se coloca el instrumento en estacion en el primer vértice A del polígono ABCD.... que se trata de determinar (fig. 210), y se traza sobre el papel una línea segun AB. Sobre dicha línea se toma una longitud *ab* que represente la longitud de AB reducida á la escala del plano. Se lleva luego el instrumento al punto B colocándole en estacion de manera que el punto *b* esté sobre la vertical del punto B y la línea *ba*, ya trazada en la plancheta esté dirigida segun BA. Hecho esto se traza por el punto *b* una segunda línea segun BC y se toma sobre ella una longitud *bc* que represente BC segun la escala del plano. Así se continúa hasta que se llega al último vértice F; y si la operacion se ha hecho con exactitud, el polígono *abc.... f* deberá cerrar sobre sí mismo.

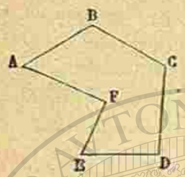

Fig. 210.

Si se quiere operar segun el procedimiento *de interseccion* se elige sobre el terreno una base AB (fig. 211) que se mide, y se coloca la plancheta en estacion en el punto A. Se traza primero sobre la hoja de papel una línea *ab*, segun AB, sobre la cual se toma la longitud que representa AB segun la escala del plano. Luego se clava una aguja en el punto *a*, y haciendo girar la alidada al rededor de ella, se dirigen sucesivamente visuales á los puntos C, D, E,... que se trata de determinar, y se trazan rectas á lo largo de la línea de fé en cada una de estas direcciones. Despues se coloca en estacion la plancheta en el punto B, de modo que el punto *b* esté sobre la vertical del punto B y la línea *ba* en la direccion BA. Se dirigen visuales sucesivamente á los puntos C, D, E,..., marcando sobre el papel la direccion de todas estas visuales, y estas líneas cortarán las anteriormente trazadas desde el punto *a* á los puntos *c*, *d*, *e*...., que representan en el papel á los C, D, E...., del terreno.

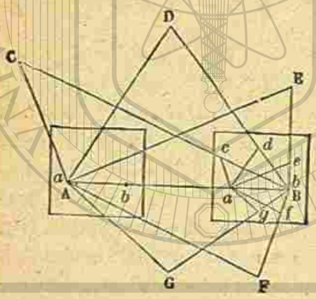

Fig. 211.

Por todo lo cual se ve que en definitiva el levantar un plano

con la plancheta no difiere del que se hace con el grafómetro sino en que, en vez de medir los ángulos, se limita el procedimiento este á tomarlos sobre el papel mismo donde el plano está dibujado. Manejada la plancheta por manos peritas, es un instrumento muy expedito y bastante exacto.

§ XXIX. Nociones sobre la nivelacion. — Nivel de agua, mira. — Cota de un punto. — Curvas de nivel. — Lectura de un mapa topográfico.

303. El plano de un terreno levantado y trasladado al papel por los procedimientos indicados no da sino una idea incompleta del terreno, porque no indica las alturas de los diferentes puntos sobre el plano de proyeccion, ni da á conocer por tanto las ondulaciones del terreno ni sus accidentes, lo que en definitiva se llama el *relieve*. La determinacion de estas alturas es cabalmente el objeto de la *nivelacion*.

El plano horizontal sobre el cual se proyectan todos los puntos se llama plano de *comparacion*, y la altura á que está un punto sobre dicho plano, *cota* de dicho punto. Cuando el plano de comparacion es un plano tangente á la superficie del mar y se considera prolongado bajo los continentes, la cota de un punto toma en este caso el nombre de *altura* ó *altitud* del mencionado punto.

No se miden directamente todas las cotas de un terreno, sino las diferencias entre la cota de uno de estos puntos y las de todos los restantes, en términos que conocida la cota del primero, pueda facilmente saberse las de los restantes. Esta primera cota puede elegirse arbitrariamente, porque equivale á tomar á voluntad el plano de comparacion, cosa que siempre puede hacerse, cuando no se tiene otro propósito que dar una representacion fiel del terreno.

Todo plano horizontal se llama *plano de nivel*, y la diferencia que existe entre dos cotas se llama igualmente *diferencia de nivel* de dichos puntos, que en definitiva no es mas que la distancia de los planos de nivel que pasan por ellos.

304. Nivel de agua y mira. El *nivel de agua* (figura 212) se compone de un tubo de laton blanco ó amarillo, de $1^m,40$ próximamente de longitud, encorvado en sus dos extremi-

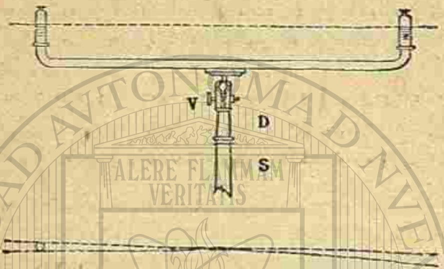

Fig. 212.

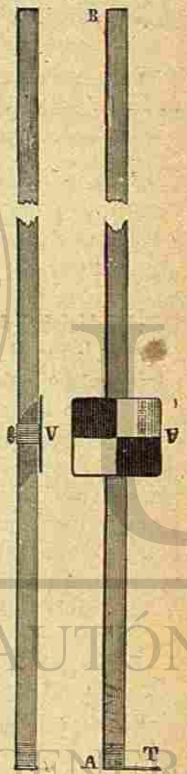

Fig. 213.

dades que llevan ampollas de vidrio de cinco centímetros de diámetro próximamente. Dicho tubo va montado sobre un pié de tres patas articuladas, en términos parecidos á los del grafómetro, para poderlo colocar horizontalmente y girar alrededor de su eje vertical.

Si se vierte en dicho tubo agua coloreada hasta que las ampollas se llenen hasta sus dos terceras partes, la superficie del agua en los dos vasos estará en el mismo plano de nivel, siguiendo la ley de los vasos communicantes; y por tanto una visual tangente al plano de los dos circulos que forman las superficies del liquido dará una visual horizontal, que llega á ser muy perceptible si el observador se coloca detrás de una de las ampollas á la distancia de un metro próximamente.

La *mira* es una regla AB dividida en centímetros que se coloca verticalmente sobre el terreno (fig. 213), por la cual corre una placa movil V pintada de dos colores llamada *tablilla*. La línea horizontal que divide la tablilla en dos partes iguales

se llama *línea de fé*, la cual se halla á la misma altura que la anilla que lleva la tablilla á lo largo de la regla, permitiendo que pueda leerse dicha altura señalada por la anilla sobre la regla que al efecto tiene una graduacion. Hay miras diferentes, pero todas se fundan en el mismo principio.

305. Nivelacion sencilla. *Dados dos puntos* A y B (fig. 214), *hallar la diferencia de nivel entre estos dos puntos.*

Se coloca el nivel entre los dos puntos dados, á una distan-

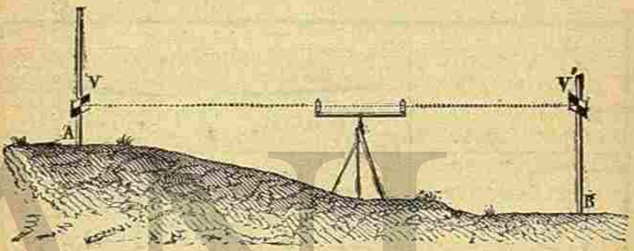

Fig. 214.

cia próximamente igual respecto de cada uno de ellos. El ayudante se coloca con una mira en el punto A y sube ó baja la mira segun lo indique el operador, hasta tanto que la visual horizontal determinada por el nivel pase por la línea de fé. El ayudante lee entonces la altura AV y la anota. Se traslada luego con la mira al punto B y mide BV′ despues de proceder de igual suerte que en A : la diferencia de nivel entre ambos puntos es evidentemente la diferencia de las alturas AV y BV′.

La operacion que acabamos de describir exige que se determinen dos visuales sucesivas que se llaman *niveladas;* una es la *nivelada de espalda* y la otra la *nivelada de frente*, segun el sentido en que se camina.

Si los dos puntos A y B estuvieran á mas de 100 ó 120 metros no podria obtenerse la diferencia de nivel en sola una operacion, seria necesaria una nivelacion compuesta.

306. Nivelacion compuesta. Se eligen cuando se está en este caso un cierto número de puntos intermedios M, N, P, Q.... entre los A y B, tales que pueda tomarse la diferencia de nivel que haya entre dos puntos consecutivos por una nivelacion sencilla. Hecho esto, se lleva sucesivamente el nivel entre los puntos A y M, entre M y N, entre N y P etc., y así sucesivamente, y se escriben en un cuadro preparado de antemano las alturas de mira de las niveladas de espalda y de frente relativas á cada nivelacion sencilla. Supongamos que se han obtenido los resultados siguientes :

PUNTOS NIVELADOS	NIVELADAS	
	DE ESPALDA	DE FRENTE
A.	$1^m,45$	»
M.	$1^m,74$	$1^m,31$
N.	$2^m,22$	$2^m,69$
P.	$2^m,35$	$0^m,75$
B.	»	$1^m,63$
	$7^m,76$	$6^m,38$
	$+1^m,38$	

Para ir desde el punto A al M, es necesario *subir* $1^m,45 - 1^m,31 = 0^m,14$; de M á N se *baja* $2^m,69 - 1^m,74 = 0^m,95$; de N á P se *sube* $2^m,22 - 0^m,75 = 1^m,47$; de P á B se *sube* $2^m,35 - 1^m,63 = 0^m,72$. De donde resulta que de A á B se *sube*

$$0^m,14 + 1^m,47 + 0^m,72 - 0^m,95 = 1^m,38$$

ó en esta otra forma

$$1^m,45 + 1^m,74 + 2^m,22 + 2^m,39$$
$$-(1^m,31 + 2^m,69 + 0^m,79 + 1^m,63).$$

De donde resulta la siguiente regla :

Hechas la suma de las niveladas de espalda y la de las de frente, si la primera suma es mayor que la segunda, el último punto esta mas alto que el primero; pero si la suma de las niveladas de espalda es menor que la de las de frente, el primer punto está mas alto que el último. En los dos casos, la diferencia de nivel de los puntos extremos es igual á la diferencia entre la suma de las niveladas de espalda y la de las de frente.

307. Nivelacion general de un terreno. Para darse cuenta del relieve de un terreno, importa determinar las cotas de muchos puntos, y á esto se llama nivelacion general del terreno, que puede ejecutarse de diversas maneras.

Si los puntos cuyas cotas se quieren determinar están en los vértices de un polígono se *rodea* siguiendo los lados de este polígono, determinando por nivelacion simple ó compuesta, la diferencia de nivel entre los vértices consecutivos.

Si desde un punto del terreno pueden dirigirse visuales á todos los puntos cuya altura se busca, se coloca el nivel en este punto central y se determina la altura de cada uno : esto constituye una nivelacion *radiada*.

Cuando hay finalmente interés en conocer el relieve del suelo á lo largo de una línea determinada, se marcan sobre esta línea puntos que disten entre sí de 50 á 100 metros, y se hacen nivelaciones entre todos estos puntos. Represéntase ordinariamente el resultado de esta nivelacion, imaginando que la proyeccion horizontal de la línea que pasa por todos los puntos está rectificada, y que se han elevado por estos diversos puntos verticales sobre las cuales se toman las cotas, á partir del plano de comparacion. Esto es lo que se llama un *perfil*. Si se hacen en un terreno un gran número de perfiles siguiendo alineaciones bien elegidas, se obtendrá una representacion bastante exacta del mismo.

308. Pendiente de una recta; pendiente de un plano. Se llama *inclinacion* de una recta el ángulo agudo que dicha recta forma con su proyeccion sobre un plano horizontal; dicha inclinacion se expresa en grados. Sea AB (fig. 215) una recta inclinada, ab su proyeccion horizontal, Aa y Bb las cotas de sus extremos. Por el punto A se traza AB′ paralela á ab, y el ángulo BAB′ es la inclinacion de esta recta. Dicho ángulo se determinará si se nos dá la relacion de los lados BB′ y AB′ del triángulo ABB′, porque se podrá entonces construir un triángulo semejante y por consiguiente equiángulo al triángulo ABB′. Dicha relacion

Fig. 215.

$$\frac{BB'}{AB'} \quad ó \quad \frac{BB'}{ab},$$

se denomina *la pendiente* de la recta AB.

La pendiente de una recta es la relacion de la diferencia de nivel de dos puntos de dicha recta con la distancia horizontal de estos dos puntos.

Si la distancia ab es igual á un metro, la pendiente se expresa por la longitud de BB′; y si suponemos por ejemplo que BB′ vale 1, 2, 3.... centímetros, entonces se dice que la pendiente de la recta es de 1, 2, 3,... centímetros por metro.

Consideremos ahora un plano inclinado al horizonte (fig. 216); si se le corta por un plano horizontal M, la interseccion DE de los dos planos es una recta horizontal. Otro plano horizontal cortaria al plano N siguiendo una recta horizontal GH paralela á DE (**266**); de donde se infiere que todas las rectas horizontales que pueden trazarse en un plano inclinado, son paralelas. Si se traza una perpendicular AB á una de dichas horizontales, la pendiente de esta línea será mayor que la de cualquiera otra AC que sea oblícua á la horizontal. Con efecto : sea AP la

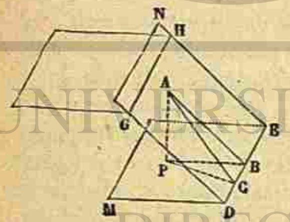

Fig. 216.

vertical del punto A, y unamos PB y PC. La línea AC, oblícua á DE, es mayor que AB, perpendicular á la misma línea. Dichas líneas son oblícuas con relacion al plano horizontal M, y por tanto la mas corta es la que está mas cerca del pié de la perpendicular AP, ó en otros términos PB $<$ PC. La pendiente de la recta AB es $\frac{AP}{PB}$ y la de la recta AC es $\frac{AP}{PC}$. La pendiente de la recta AB es por tanto mayor que la de la recta AC. Por esta razon, las líneas perpendiculares á las horizontales de un plano inclinado se llaman las *líneas de máxima pendiente* de dicho plano, y se llama *pendiente* de un plano, la de las líneas de máxima pendiente del mismo.

309. Curvas de nivel. Se llama *curva de nivel* la interseccion de la superficie de un terreno con un plano horizontal, ó en otros términos, el lugar de los puntos que tienen la misma cota. La determinacion de una curva de nivel sobre el terreno se efectua fácilmente con el nivel de agua y la mira. Supongamos, para fijar las ideas que se conoce un primer punto m de la curva (fig. 217). Se estaciona el nivel á cierta distancia en o, y el ayudante se coloca en m con la mira y fija la tablilla á la altura marcada por el plano de nivel del instrumento. Avanza luego sobre el terreno evitando subir ó bajar y después de haber andado una decena de metros coloca la mira sin tocar la tablilla. El operador le hace señales para que vaya subiendo ó bajando hasta que la línea de fé de la tablilla esté de nuevo en el plano horizontal de la visual. Sea r el punto determinado en esta forma; se pone una señal, y se procuran determinar por el mismo procedimiento otros puntos s, t, u, v, etc. Determinados así, se levanta el plano de la línea m, r, s, t, u, v, que es una porcion de la curva de nivel que pasa por el punto m. Puede continuársela en esta forma tanto como se quiera, tomando como punto de partida

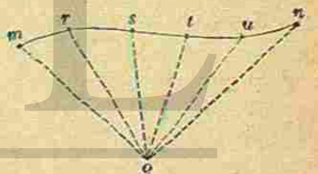

Fig. 217.

el primeramente obtenido, cambiando de sitio el nivel, si fuese necesario.

Se llaman planos ó mapas *topográficos* los planos ó mapas en los cuales se traza un número mayor ó menor de curvas de nivel equidistantes. Las cotas de estas diversas curvas son siempre *cotas redondas*, es decir que se expresan por números simples, como 10^m, 20^m, 50^m, etc., ó 100^m, 200^m, 500^m, etc. La diferencia constante de dos curvas de nivel consecutivas se llama la *equidistancia* de las curvas. En los mapas formados por el estado mayor francés en escala de $\frac{1}{40000}$ la equidistancia es de 20 metros; en la carta á $\frac{1}{80000}$, es de 40^m; y en el mapa de nivelacion general de Francia á $\frac{1}{80000}$, la equidistancia es de 100^m.

Claro es que un plano topográfico es la representacion exacta del terreno, en la que podrán conocerse todos los accidentes de la superficie del suelo, como si se poseyera un *plano en relieve*. Para convencerse de ello no hay mas que tener en cuenta que puede construirse el relieve de un terreno mediante el plano topográfico. Supongamos, para mayor exactitud, que la escala del plano sea de $\frac{1}{10000}$, y que la equidistancia de las curvas de nivel sea de 5 metros. En escala de $\frac{1}{10000}$, cinco metros corresponden á medio milímetro. Se toman hojas de carton de medio milímetro de espesor, sobre las cuales dibujaremos las curvas de nivel sucesivas. Sobre una tabla colocamos el carton en que está la curva mas baja cortada, sobre este colocamos el en que esté la segunda, y así sucesivamente la tercera, la cuarta, la quinta, etc., guardando ciertos puntos de referencia para la colocacion, segun estén en el mapa. De esta manera resultará una especie de escalera que se llama un relieve *en graderia*. Rellenando con cera la desigualdad que hay entre las curvas hasta obtener una superficie plana y continua, obtendríamos una imagen fiel del terreno con sus montañas, sus valles, ondulaciones de toda especie, imagen que se ha obtenido mediante las indicaciones del plano topográfico.

Con el propósito de dar á la configuracion del relieve mediante las curvas de nivel, no mas precision, pero sí mas expresion, los autores del mapa del estado mayor y muchos otros

topográfos han sustituido las curvas de nivel consecutivas por *líneas de sombra* comprendidas entre ellas y á ellas perpendiculares (fig. 218). En el mapa del estado mayor á $\frac{1}{80000}$, las líneas de sombra se separan la cuarta parte de su longitud, y son tanto mas gruesas, cuanto son mas cortas. Con este sistema el dibujo del relieve hiere mas á la vista, pero aumenta la dificultad de la lectura del mapa.

Fig. 218.

310. LECTURA DE LOS MAPAS TOPOGRÁFICOS. No nos ocuparemos de los signos convencionales adoptados para representar las diversas clases de tierras, bosques, praderas, viñedos, etc., vias de comunicacion, de curso de aguas, villas, aldeas, caseríos, casas aisladas, porque basta, para reconocer todos estos elementos sobre un mapa, tener á la vista la indicacion de los signos convencionales, que se halla en todos los tratados de topografía. Mas difícil es sin duda interpretar exactamente la carta en lo que se refiere al relieve del suelo.

Consideremos dos curvas de nivel consecutivas mn, $m'n'$, y sea aa' una pequeña línea perpendicular á la vez á las dos curvas (fig. 219). Una faja de terreno estrecha á lo largo de la anchura de aa' podrá asimilarse á un plano inclinado, y las horizontales de este plano se cunfundirán con las curvas de nivel cerca de los puntos a y a'. Por consiguiente la línea aa' será la línea de máxima pendiente de este plano (**308**); la pendiente del terreno á lo largo de aa', será la relacion de la diferencia de las cotas de los puntas a y a' á su distancia horizontal aa'. Llamando p esta pendiente y e la equidistancia de las curvas de nivel, tendremos

Fig. 219.

$$p = \frac{e}{aa'}.$$

De aquí resulta que siendo e constante, la pendiente será tanto mayor cuanto aa' sea mas pequeña, de donde se deduce que: *en un mapa topográfico la pendiente del suelo es tanto mas considerable cuanto las curvas de nivel están mas próximas.* En el sistema de líneas de sombras, las pendientes son tanto mas fuertes cuanto que dichas líneas son mas cortas, mas juntas y mas gruesas.

Si por el punto a' se traza una perpendicular comun á la curva $m'n'$ y á la siguiente, se obtendrá la línea de máxima pendiente de la porcion de terreno próximo aa' y comprendido entre estas dos curvas de nivel, y continuando así, se tendrá una línea sinuosa que será la de *máxima pendiente* del terreno; de todo lo cual concluiremos que *las líneas de máxima pendiente cortan las curvas de nivel en ángulo recto.*

Veamos ahora como pueden reconocerse sobre una carta los diversos accidentes del suelo, como colinas, mesetas, valles, etc.

La figura 220 representa un cerrete ó altura. Si la equidistancia es de veinte metros y la curva mas baja tiene la cota de 140 metros, dicho cerrete tendrá una cota comprendida entre 240 metros y 260 metros. Ordinariamente se marca el vértice por un punto al lado del que se escribe el nº que indica la cota. Sobre la misma figura se indica que la pendiente á lo largo de ab, es mas rápida que siguiendo la direccion cd y pueden calcularse las pendientes si se conoce la escala del plano. Una meseta difiere de una colina en que la parte superior no termina en un punto mas elevado que los que le rodean, sino en un espacio mas ó menos estenso que es horizontal. En este caso la curva de nivel mas alta en vez de encerrar un punto con su cota, contiene una línea de puntos que representa la *curva de la cresta* ó el borde de la meseta: la cota de esta curva debe indicarse.

Fig. 220.

Para discernir facilmente los demás accidentes del suelo es

necesario saber trazar dos líneas llamadas *características*, y que son las líneas de *divisoria* y de *talwegs*. Las divisorias son líneas tales que no se puede uno separar á derecha ni izquierda sin descender, y lo contrario ocurre en los talwegs, esto es que no puede uno separarse sin remontar. En un

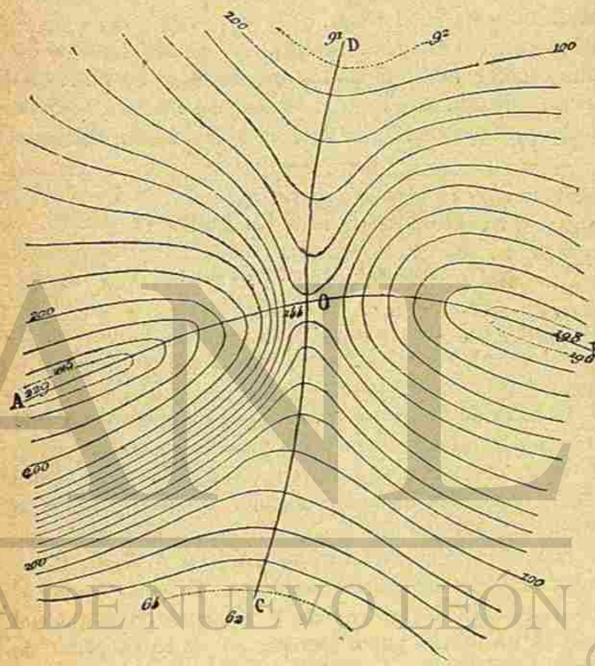

Fig. 221.

mapa, la línea divisoria es de tal naturaleza, que si se la sigue bajando, corta todas las curvas de nivel por su *concavidad*, como la línea AOB (fig. 221 y 222). El talweg por el contrario corta todas las curvas de nivel en su parte convexa cuando se baja á lo largo de ella, como la COD. Un talweg señala el fondo de un valle ó de una garganta, casi siempre ocupado por una corriente de agua que recoge las de derecha é izquierda; las divisorias son las que dividen las aguas, y el terreno en *vertientes*.

El punto O en el que se cortan el talweg COD y la divisoria AOB es una *hoz*, y por tanto la hoz está siempre colocada en la interseccion del talweg y la divisoria, y la cota de esta está siempre marcada en el mapa.

Remitimos á las obras especiales de esta materia á los que deseen conocer mas á fondo los mapas topográficos : lo dicho basta sin embargo para conocer los mapas á que nos hemos referido y que tan importantes son para los militares é ingenieros.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO VI

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Cuando una recta que corta un plano forma dos ángulos iguales con tres rectas que pasan por su pié en el plano, es perpendicular á dicho plano.

2. El lugar de las rectas trazadas por un punto dado paralelamente á un plano es otro plano paralelo al primero.

3. Dadas dos rectas situadas en un mismo plano, puede siempre trazárseles una perpendicular comun, y no se les puede trazar mas que una.

4. Dados un punto O, las rectas paralelas A, B, C, D.... y un plano P, todos los planos trazados por el punto O y por las rectas A, B, C...., cortan el plano P, siguiendo rectas que concurren en un mismo punto (perspectiva de rectas paralelas).

5. Si dos rectas son iguales y paralelas, sus proyecciones sobre un mismo plano son tambien iguales y paralelas.

6. Si desde un punto del espacio se bajan perpendiculares sobre planos paralelos á una misma recta, el lugar de estas perpendiculares es un plano perpendicular á dicha recta.

7. Por una recta oblícua á un plano puede siempre trazarse un plano perpendicular á aquel, y no puede trázarsele mas de uno.

8. El ángulo agudo que una recta forma con su proyeccion sobre un plano es mas pequeño que el ángulo que dicha recta forma con cualquiera otra trazada por su pié en dicho plano.

9. Si desde un punto cualquiera se tiran perpendiculares á

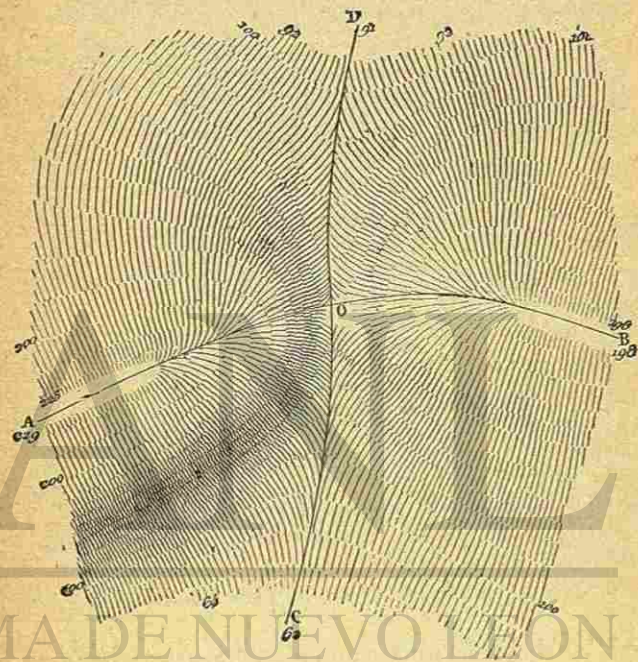

Fig. 222.

las dos caras de un diedro, el ángulo de estas perpendiculares es igual al ángulo plano del diedro ó es su suplemento.

10. En todo ángulo triedro los planos que dividen los tres diedros en dos partes iguales se cortan segun una misma recta.

11. Si por la bisectriz de las caras de un triedro se trazan planos perpendiculares á estas caras, estos planos se cortan siguiendo una misma recta.

12. En todo ángulo triedro, los planos trazados por las aristas perpendicularmente á las caras opuestas se cortan segun una misma recta.

13. Si por el vértice de un ángulo triedro y en cada cara, se traza una perpendicular á la arista opuesta, dichas tres rectas están en un mismo plano.

14. Si se corta un ángulo triedro trirectángulo OABC por un plano que encuentre las aristas en los puntos A, B, C, el cuadrado del área del triángulo ABC es igual á la suma de los cuadrados de las áreas de los triángulos OAB, OBC, OCA.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Trazar por un punto una recta que encuentre dos rectas no situadas en el mismo plano.

2. Hallar la condicion que deben cumplir dos rectas en el espacio para que por una de ellas pueda trazarse un plano perpendicular á la otra.

3. Hallar en el espacio el lugar geométrico de los puntos igualmente distantes de dos puntos dados.

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de tres puntos dados y no situados en línea recta.

5. Hallar el lugar de los puntos del espacio equidistantes de dos rectas que se cortan.

6. Trazar por una recta dada un plano paralelo á otra recta dada.

7. Trazar por un punto un plano paralelo á dos rectas dadas.

8. Una recta se mueve siempre paralelamente á un plano P dado, y encuentra dos rectas dadas D y D′ situadas de un modo cualquiera en el espacio. ¿Qué direccion seguirá á medida que se aleje indefinidamente del plano P? (Concurso general de Filosofía, 1869.)

9. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos dados.

10. Cortar un ángulo poliedro de cuatro caras de modo que la seccion sea un paralelógramo.

11. Hallar sobre el terreno la distancia desde un punto dado á otro inaccessible pero que se ve. Resolver el problema con la cadena y el grafómetro, con la cadena y la escuadra, con la cadena y la plancheta.

12. Determinar sobre el terreno la distancia á que se hallan dos puntos inaccesibles pero que pueden verse. Solucion con los varios instrumentos.

13. Prolongar una recta mas allá de un obstáculo que impide la vista. Solucion con varios instrumentos.

14. Determinar la anchura de un río que no puede atravesarse.

15. Determinar el diámetro de una torre redonda. Solucion con varios instrumentos.

16. Determinar con la cadena y el grafómetro la altura de una montaña sobre la llanura.

17. Sobre un mapa topográfico se traza una línea recta cualquiera y se desea el perfil del terreno siguiendo la alineacion determinada por esta recta.

18. Trazado un camino en un mapa topográfico determinar la pendiente de las diversas secciones de dicho camino comprendidas entre dos curvas de nivel consecutivas.

19. Trazar sobre una carta topográfica un camino con una pendiente uniforme dada, á partir de un punto dado, y que termine cerca de otro punto determinado.

LIBRO VII

LOS POLIEDROS

§ XXX. De los poliedros : propiedades principales de los prismas y de los paralelepípedos.

311. Definiciones. Se llama *poliedro* un cuerpo limitado por *caras* planas. Estas caras son polígonos planos; sus lados son las *aristas* del poliedro y sus vértices son los *vértices* del poliedro.

Los *ángulos diedros* de un poliedro son los diedros formados por las caras consecutivas, y los *ángulos poliedros* del poliedro son los que forman en cada uno de los vértices las caras que en él se cortan.

312. El *prisma* es un sólido comprendido entre dos polígonos iguales y paralelos, que se llaman las *bases* del prisma, y las *caras laterales* que son paralelógramos.

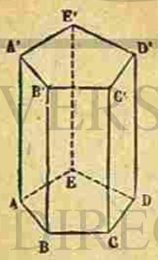

Fig. 223.

Para construir un prisma se toma como base un polígono ABCDE (fig. 223), y por los vértices A, B, C..., se trazan las líneas AA', BB', etc., paralelas, iguales y en el mismo sentido, situadas fuera del plano ABCDE;.... despues se unen sus extremos y el poliedro formado en estos términos es un prisma, porque las caras son paralelógramos (**78**) y los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' tienen sus lados iguales y sus planos paralelos (**272**).

El prisma se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., cuando su base es un triángulo, un cuadrilatero, un pentágono, etc.

Un prisma es *recto* cuando sus aristas laterales AA', BB', etc., son perpendiculares á los planos de las bases, y *oblícuo* en el caso contrario. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.

Altura de un prisma es la distancia que media entre los planos de las dos bases, y en el prisma recto la altura es igual á la arista lateral.

313. Se llama *paralelipípedo* un prisma que tiene por base un paralelógramo : las seis caras de un paralelipípedo son paralelógramos.

Consideremos un paralelipípedo ABCDA'B'C'D' (fig. 224), cuyas bases son los paralelógramos iguales y paralelos ABCD y A'B'C'D'. Las rectas AD y BC son iguales y paralelas como lados opuestos de un paralelógramo ABCD. Las rectas AA' y BB' son iguales y paralelas por la misma razon. Luego los ángulos DAA', CBB' son iguales y sus planos son paralelos (**272**). Lo mismo se demostraría que los dos paralelógramos ABB'A', DCC'D' tienen todos sus ángulos y todos sus lados iguales uno á uno, y por tanto que son iguales. De esto resulta que *las caras opuestas de un paralelipípedo son iguales y paralelas*, y por consecuencia que pueden tomarse como bases de un paralelipípedo dos caras opuestas cualesquiera.

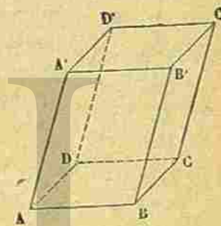

Fig. 224.


Fig. 225.

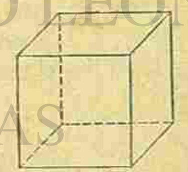
Fig. 226.

Cuando un paralelipípedo es recto y tiene por base un rectángulo se llama *paralelipípedo rectángulo* (fig. 225). Las seis caras de un paralelipípedo rectángulo son rectángulos. Las longitudes de las aristas que parten de un vértice mismo se llaman las *dimensiones* del paralelipípedo rectangular.

El *cubo* es un paralelipípedo rectángulo que tiene por base un cuadrado y cuya altura en igual al lado del cuadrado. Las seis caras de un cubo son cuadrados iguales (fig. 226).

314. La *pirámide* es un sólido una de cuyas caras es un polígono plano, y las otras triángulos que tienen por bases los lados del primer polígono y por vértice comun un punto tomado fuera del plano del primer polígono : tal es, por ejemplo, el poliedro SABCDE (fig. 227). El polígono ABCDE se llama la *base* de la pirámide; el punto S es el *vértice* y las caras triangulares SAB, SBC, etc., son las *caras laterales*.

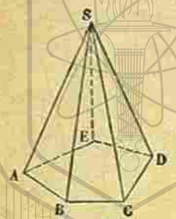

Fig. 227.

La pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero un pentágono, etc. La piramide triángular se llama tambien *tetraedro* porque tiene cuatro caras que todas son triángulos.

La *altura* de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

La pirámide es *regular* cuando la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de la base.

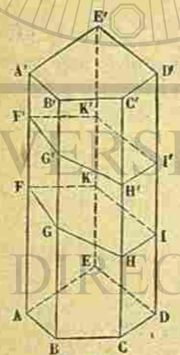

Fig. 228.

315. Teorema. *Las secciones hechas en un prisma por dos planos paralelos son polígonos iguales* (fig. 228).

Sean FGHIK, F'G'H'I'K' las secciones hechas por dos planos paralelos en el prisma AD'. Los lados FG, F'G' son parelelos como intersecciones de

dos planos secantes paralelos con el plano ABB'A' (**266**). Igualmente GH es paralelo á G'H', HI á H'I', etc. Los dos polígonos que tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido son equiángulos (**272**). Además de esto FG = F'G' como paralelas comprendidas entre paralelas, y lo mismo GH = G'H', HI = H'I', etc. Los polígonos, pues, tienen los lados y los ángulos iguales y dispuestos en el mismo sentido. Luego son iguales.

316. Se llama *seccion recta* de un prisma oblícuo la que resulta cortándole por un plano perpendicular á las aristas. La seccion recta es la misma sea el que quiera el plano que la determine.

317. Teorema. *Si se corta una pirámide por un plano paralelo á la base :*

1.º *Las aristas laterales y la altura de la pirámide quedan divididas en partes proporcionales.*

2.º *La seccion es un polígono semejante á la base.*

3.º *La relacion de las áreas de la seccion obtenida y de la base es igual á la relacion de los cuadrados de sus distancias al vértice* (fig. 229).

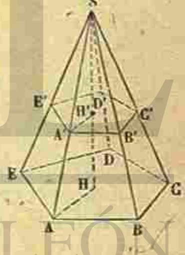

Fig. 229.

1.º Sea SABCDE la pirámide, A'B'C'D'E' una seccion obtenida por un plano paralelo á la base, SH la altura de la pirámide, cuya altura resulta cortada en H', por el plano de la seccion. Si por el punto S se imagina un plano paralelo á la base se tendrá en virtud del teorema del n.º **273**

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\ldots\ldots=\frac{SH'}{SH}. \qquad [1]$$

2.º Las líneas AB, A'B' son paralelas como interseccion de dos planos paralelos ABCDE, A'B'C'D'E' por el plano SAB (**266**). Lo mismo sucede con BC y B'C', CD y C'D', etc. Luego los polígonos son equiángulos (**272**). Además los triángulos semejantes SAB y SA'B', SBC y SB'C', etc., dan

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{SA'}{SA}, \qquad \frac{B'C'}{BC}=\frac{SB'}{SB}, \text{ etc.};$$

ó, teniendo cuenta de las igualdades [1] :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\ldots\ldots=\frac{SH'}{SH}; \qquad [2]$$

Luego los polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y por tanto son semejantes.

3.° Las áreas de los polígonos semejantes ABCDE, A'B'C'D'E' son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (**239**) y tendrémos :

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2};$$

y en virtud de las igualdades [2] :

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{SH'}^2}{\overline{SH}^2} \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

318. Corolario. *Si dos pirámides tienen una misma altura* H *y se cortan las dos por planos paralelos á las bases, á la misma distancia* h *de los vértices, las secciones obtenidas son entre sí como las bases.*

Sean B y B' las dos bases, b y b' las secciones obtenidas. Se tienen en virtud del teorema precedente

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2}, \qquad \frac{b'}{B'}=\frac{h^2}{H^2};$$

de donde resulta, en virtud de la relacion comun,

$$\frac{b}{B}=\frac{b'}{B'}.$$

Supongamos como caso particular que las dos pirámides tengan bases equivalentes, esto es, que B sea equivalente á B',

en cuyo caso b será tambien equivalente b'. Luego *si dos pirámides tienen alturas iguales y bases equivalentes, las secciones hechas en dichas pirámides por dos planos paralelos á las bases á la misma distancia de los vértices, son equivalentes.*

319. *Se llama tronco de pirámide de bases paralelas* ó simplemente tronco de pirámide, el poliedro obtenido cortando una pirámide por un plano paralelo á la base, y tomando lo que queda despues de desprendar la parte superior de la pirámide : tal es el poliedro ABCDEA'B'C'D'E' (fig. 229). Los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' se llaman las *bases* del tronco de pirámide, y su *altura* es la distancia HH' á que están los planos de las dos bases.

§ XXXI. Medida de los volúmenes : paralelepípedo, prisma, pirámide

320. Definiciones. Se toma por *unidad de volúmen el de un cubo que tiene por lado la unidad de longitud*. En Francia, en donde la unidad de medida son el metro, sus múltiplos y submúltiplos, las unidades de volúmen seran los cubos que tengan por lado el metro, el decímetro, centímetro, ó el decámetro, hectómetro, kilómetro y miriámetro. Se llama *metro cúbico* al cubo que tiene un metro de lado, y *decímetro y centímetro cúbico* los cubos que tienen por lado el decímetro ó centímetro, etc.

321. El metro cúbico vale 1000 decímetros cúbicos. Con efecto, si consideramos una caja cúbica de un metro de lado (fig. 230) ABCDA'B'C'D', y dividimos el fondo, que es un metro cuadrado, en 100 decímetros cuadrados (**194**), sobre cado uno de ellos podemos colocar un decímetro cúbico, lo cual dará una primera capa de un decímetro de altura que contendrá 100 decímetros cúbicos. Para llenar toda la caja se necesitarán evidentemente sobreponer diez capas paralelas.

Luego el metro cúbico contiene 10 veces 100 ó sean 1000 decímetros cúbicos. Del mismo modo se puede probar que el decímetro cúbico tiene 1000 centímetros cúbicos, etc., y en general que *cada una de las unidades de volúmen vale* 1000 *veces la que le sigue inmediatamente en órden inferior de magnitud*. De donde resulta que para pasar de una de estas unidades á otra, bastará multiplicar ó dividir el número que exprese el volúmen por 1000, por 1 000 000 ó por 1 000 000 000, etc. Si por ejemplo un volúmen se expresa en centímetros cúbicos y deseamos referirlo al metro cúbico ó al decímetro cúbico bastará dividir el número que representa dicho volúmen por 1 000 000 ó por 1000.

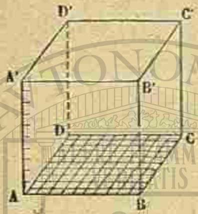

Fig. 230.

Se emplean además con el nombre de *medidas de capacidad*, unidades de volúmen que derivan de las precedentes; tales son el *litro* que equivale á un decímetro cúbico, el *decalitro* que vale 10 litros, el *hectólitro* que vale 100 litros, el *decilitro* que es la décima parte del litro, y el *centílitro* que es la centésima del mismo litro.

322. Dos cuerpos son *equivalentes* cuando tienen volúmenes iguales, por mas que no puedan superponerse. Así un prisma puede ser equivalente á una pirámide ó á un poliedro cualquiera.

323. Teorema. *Dos prismas rectos de la misma base y altura son iguales.*

Coloquemos uno de los prismas sobre el otro de manera que las bases inferiores coincidan. Las aristas laterales del segundo prisma, que son perpendiculares al plano de su base, tomarán la misma direccion que las correspondientes del primero (**246**), y como los prismas tienen la misma altura y son rectos, las aristas laterales son iguales, y por tanto las bases superiores de los dos prismas coincidirán y los dos primas resultarán iguales. Q. E. L. D.

324. Teorema. *Todo prisma oblícuo equivale á un prisma recto que tenga por base su seccion recta y por altura su arista lateral* (fig. 231).

Sea ABCDEA'B'C'D'E' un prisma oblícuo. Por los vértices A y A' de las dos bases trazamos las secciones rectas AFGHI, A'F'G'H'I', que forman con las aristas del prisma prolongadas un prisma recto que tiene por altura la arista lateral AA' del prisma dado. Y notamos en primer lugar que las aristas BB' y FF' de los dos prismas son iguales por ser ambas iguales á AA'. Resulta de aquí inmediatamente que FB=F'B', y que GC=G'C', HD=H'D', etc. Esto sentado llevemos el poliedro A'F'G'H'I'B'C'D'E' sobre AFGHIBCDE, de modo que el polígono A'F'G'H'I' coincida con su igual AFGAI (**319**). Las aristas F'B', G'C'.... perpendiculares al plano A'F'G' se confundirán con FB, GC.... perpendiculares al plano AFG. Además, teniendo las aristas igual longitud dos á dos, los poliedros coincidirán. Ahora bien, quitando del sólido total el poliedro A'F'G'.... E' resulta el prisma oblícuo, y quitando del mismo poliedro total el poliedro AFG....E' resulta el prisma recto. Luego el prisma oblícuo y el recto son equivalentes. Q. E. L. D.

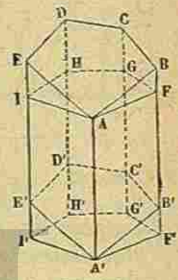

Fig. 231.

325. Teorema. *El plano trazado por dos aristas opuestas de un paralelipípedo le descompone en dos prismas triangulares equivalentes.*

Sea ABCDA'B'C'D' (fig. 232) un paralelepípedo cualquiera. Por las aristas opuestas AA' y CC' hacemos pasar un plano que descomponga el paralelipípedo en dos prismas triangulares ABCA'B'C', ADCA'D'C' que decimos que son equivalentes. En efecto: construyamos la seccion recta AEFG del paralelipípedo. Dicha seccion es un paralelógramo porque los lados opuestos son la interseccion del plano de la seccion recta por los planos de las caras opuestas del paralelipípedo, que son paralelos (**313**). Luego los triángulos AEF y AGF son iguales, y dichos triángulos son precisamente las secciones rectas de los prismas triángulares ABCA'B'C' y ADCA'D'C'. El prisma oblícuo ABCA'B'C' es equivalente al recto que tiene por base AEF y por altura AA'. De igual manera el prisma oblícuo ADCA'D'C' equivalente al recto que tiene por base AGF y por altura AA'. Estos dos prismas rectos son iguales, porque tienen bases y altura iguales (**323**); luego los dos prismas oblícuos que son iguales á ellos respectivamente, son equivalentes entre sí. Q. E. L. D.

Fig. 232.

326. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo rectangular tiene por medida el producto de sus tres dimensiones.*

Suponemos desde luego que las dimensiones del paralelipípedo rectangular han de ser múltiplos de la unidad de longitud. Sea ABCDA' (fig. 233) un paralelipípedo rectángular cuyas aristas AB, AD y AA' son respectivamente iguales á 4 metros, 3 metros y 5 metros. La base ABCD del paralelipípedo contiene 4×3 ó 12 metros cuadrados (**156**). Sobre cada uno de estos metros cuadrados podrá colocarse un metro cúbico y de este modo se tendrá una capa de 12 metros cúbicos, capa que no tendrá mas que un metro de altura. Para llenar todo el paralelipípedo serán necesarias cinco capas iguales. El paralelipipedo tendrá, pues, en total $4\times3\times5$ ó sean 60 metros cúbicos: su volúmen está pues expresado por el producto de sus tres dimensiones. Q. E. L. D.

Fig. 233.

Tomenos ahora un paralelipípedo rectangular cuyas dimensiones sean arbitrarias, por ejemplos iguales á $2^m,5$, $4^m,92$ y $0^m,69$. Todas estas longitudes se expresaran en unidades muy pequeñas para que estén representadas por números enteros, v. g. en centímetros. Serán por tanto iguales á 250 centímetros, 492 id, y 69 id. La demostracion precedente prueba que el volúmen del paralelipípedo rectángular es igual á $450\times492\times69$ ó sean 8 487 000 centímetros cúbicos. Y como el centímetro cúbico es la millonésima parte del metro cúbico, dicho volúmen referido al metro cúbico como unidad será expresado por el número $8^{me},487\,000$. Segun las reglas para la multiplicacion de los números decimales este número pudiera haberse obtenido multiplicando directamente los tres números decimales 2,50, 4,92, y 0,69. Por consecuencia el volúmen del paralelipípedo rectángular está tambien determinado por el producto de sus tres dimensiones. Q. E. L. D.

327. Corolario. I. La base del paralelipípedo es un rectángulo, cuya area tiene por medida el producto de sus dos dimensiones, luego el *paralelipípedo rectangular tiene por medida el producto de su base por su altura.*

328. Corolario. II. El cubo es un paralelipípedo rectangular cuyas dimensiones son todas iguales, de donde resulta que el *volúmen del cubo tiene por medida el cubo de su lado.* Por esta propiedad se ha dado á la tercera potencia de un número el nombre de cubo de dicho número.

Aplicaciones. I. Las dimensiones de una placa de marmol que tiene la forma da un paralelipípedo rectangular son las siguientes:

Largo	$1^m,28$
Ancho	$0^m,32$
Alto	18 milímetros.

¿Cuál será su volúmen?

Es necesario primeramente referir las tres dimensiones á una misma unidad, al metro por ejemplo, y hecho esto, el volúmen expresado en metros cúbicos será:

$$1,28\times0,32\times0,018=0^{mc},0073728;$$

pudiendo decirse tambien que es igual á 7 decímetros cúbicos, 372 centímetros cúbicos y 800 milímetros cúbicos.

II. Una pila de piedra rectangular tiene las dimensiones interiores siguientes :

Largo.	$0^{m},94$
Ancho.	$0^{m},45$
Profundidad.	$0^{m},52$

¿Cuál será su capacidad en litros?

El volúmen interior de la pila expresado en metros cúbicos, será :

$$0^{m},94\times0,45\times0,52=0^{mc},21996\,;$$

su valor en litros será $219^{l},96$ ó sean 2 hectólitros, 19 litros y 96 centílitros.

III. Una piedra de talla de forma cúbica tiene 87 centímetros de lado, y se desea saber cuál será su volúmen.

El volúmen pedido, expresado en centímetros cúbicos, es :

$$87^{3}=658503^{c\cdot c}\,;$$

cuya cantidad, expresada en metros cúbicos, para lo cual basta dividirla por 1 000 000, será $0^{m\cdot c}$, 658 503.

IV. Se desea fabricar una árca rectángular que pueda contener 25 hectólitros de trigo. La superficie del fondo es de 60 decímetros cuadrados: ¿cuál será la altura que habrá que darle?

25 hectólitros equivalen á $2^{m\cdot c}$, 5 y 60 decímetros cuadrados á $0^{m\cdot c}$, 6; si se conociera la profundidad multiplicándola por 0,6, se tendria el volúmen 2,5; luego la profundidad es igual á

$$\frac{2,5}{0,6}=4^{m},167,$$

con menos de un milímetro de error.

V. La capacidad de un vaso cúbico es de 216 centímetros cúbicos : ¿cuál será la longitud del lado?

Evidentemente será la raíz cúbica de 216, ó sean 6 centímetros.

329. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo recto es igual al producto de su base por su altura* (fig. 234).

Sea ABCD A′B′C′D′ el paralelipípedo recto cuya base es ABCD y la altura AA′. Tomemos ADD′A′ por base (**313**) y por el punto A tracemos un plano perpendicular á AB. Este plano contendrá á AA′ que es perpendicular al plano ABCD y por consiguiente á AB. La seccion AA′E′E determinada por este plano es un rectángulo, por que AA′ es perpendicular al plano ABCD, y por consiguiente á AE. Dicho esto, el prisma oblícuo AA′D′DB B′C′C es equivalente al prisma que tiene por base su seccion recta AA′E′E y por altura su arista lateral AB (**324**), y como este prisma recto tiene por base un rectángulo, su medida es (**326**) : AE$\times$AA′$\times$AB. Si ahora se tiene en cuenta que AB$\times$AE es la medida del área del paralelógramo ABCD, resultará que el volúmen del paralelipípedo dado tiene por medida :

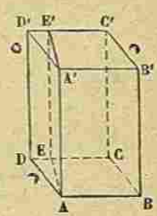

Fig. 234.

$$ABCD\times AA'.$$

330. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo oblícuo es igual al producto de su base por su altura* (fig. 235).

Sea ABCDA′ el paralelipípedo oblícuo que tiene por base ABCD. Tomemos por base ADD′A′ y construyamos la seccion recta EFGH perpendicular á la arista AB, en cuyo caso puede reemplazarse el paralelipípedo oblícuo por el recto que tiene por base EFGH y por altura AB (**324**). Su medida será, pues (**329**), EFGH$\times$AB. Pero el área del paralelógramo EFGH es igual á su base por su altura, esto es EF$\times$HL. Luego el volúmen del paralelipípedo es :

$$AB\times EF\times HL$$

Esto sentado, observemos que EF, que es una línea del plano EFGH perpendicular á AB, es ella misma perpendicular á AB, y por consiguiente, que el producto AB$\times$EF representa el área del paralelógramo ABCD. De otro lado, los planos ABCD y

EFGH son perpendiculares, puesto que el primero contiene la línea AB perpendicular al segundo (**286**); y la línea HL trazada en el plano EFGH perpendicularmente á la interseccion EF de los dos planos, es perpendicular al plano ABCD (**287**), y

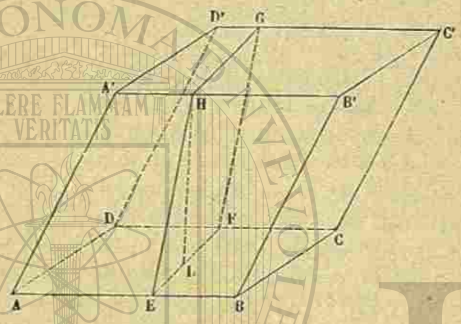

Fig. 235.

por tanto, esta línea es la altura del paralelipípedo oblícuo ABCDA'. Resulta de todo que el volúmen de este paralelipípedo tiene por expresion ABCD$\times$AL, es decir, el producto de su base por su altura. Q. E. L. D.

331. Teorema. *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

1.° Suponemos en primer lugar que el prisma dado sea un prisma triangular. Si por dos de las aristas laterales de este prisma se trazan planos paralelos á las caras opuestas, se forma un paralelipípedo que tiene la misma altura que el prisma y una base doble, y se sabe que (**325**) dicho paralelipípedo tiene un volúmen doble que el del prisma. El volúmen del paralelipípedo tiene por medida el producto de su base por su altura (**330**), luego el del prisma vale la mitad de este producto, ó lo que es lo mismo, es igual al producto de su base por su altura, puesto que su base es la mitad de la del paralelipípedo.

2.° Sea en segundo lugar un prisma poligonal ABCDE A'B'C'D'E' (fig. 236). Por la arista EE' y por cada una de las

otras aristas hacemos pasar planos que descompongan el prisma dado en prismas triangulares. Cada uno de ellos tiene por medida el producto del triángulo que le sirve de base por la altura comun. El prisma poligonal tendrá, pues, por medida la suma de los triángulos multiplicada por la altura, ó su base multiplicada por su altura. Q. E. L. D.

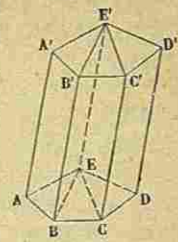

Fig. 236.

Observacion. Los teoremas de los números **326**, **329**, **330** y **331** pueden comprenderse en un solo enunciado : *Todo prisma tiene por medida el producto de su base por su altura.*

332. Corolarios. 1.° *Dos prismas que tienen las bases equivalentes y las alturas iguales, son equivalentes.*

2.° *Dos prismas de la misma altura son entre sí como sus bases.*

3.° *Dos prismas que tienen las bases equivalentes, son proporcionales á sus alturas.*

Estas son consecuencias evidentes del enunciado que precede.

Aplicaciones. I. Una columna prismática tiene por base un exágono regular cuya área es igual á 18 decímetros cuadrados; su altura es de $7^{m},20$. ¿Cuál será su volúmen?

Refiero al metro cuadrado el área de la base, que me dará $0^{m.c},18$; y el volúmen pedido será, pues :

$$0,18\times7,20=1^{mc},299.$$

II. La seccion recta de una zanja es un trapecio cuyas bases son $0^{m},33$ y $1^{m},98$ y la altura es $1^{m},31$. Se pregunta cuál es la longitud de la dicha zanja, sabiendo que la tierra que se ha extraido para hacerla tiene un volúmen de 942 metros cúbicos.

El área de la seccion es igual á

$$\frac{0,33+1,98}{2}\times1,31=1^{mc},51305.$$

Multiplicando esta área por la longitud de la zanja, se obtendrá el volúmen $542^{m.c}$. La longitud se obtendrá dividiendo 552 por 1,51 305, que da $558^{m},2$ con un decímetro de diferencia.

335. Teorema. *Dos pirámides triangulares de bases equivalentes y de la misma altura, son equivalentes* (fig. 237).

Sean SABC, S'A'B'C' las dos pirámides. Supongamos que las bases ABC, A'B'C', están sobre un mismo plano. Dividamos la altura en partes iguales, y por los puntos de division tracemos planos paralelos á las bases. Estos planos forman en las

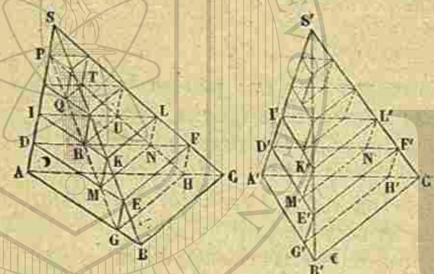

Fig. 237.

pirámides las secciones DEF, D'E'F', IKL, I'K'L',..... equivalentes dos á dos en virtud del n.º **318**. Sobre cada una de estas secciones como base, construimos un prisma que tenga sus aristas paralelas á SA en la primera pirámide, y á S'A' en la segunda. Estos prismas serán dos á dos equivalentes, por tener bases equivalentes y la misma altura. Por consiguiente, la suma de los prismas inscritos en la primera pirámide es equivalente á la suma de los prismas inscritos en la segunda.

Esto dicho, la diferencia entre el volúmen de la pirámide SABC y la suma de los prismas inscritos es menor que el volúmen del tronco de pirámide SBCPGH. Este último volúmen disminuye hasta cero á medida que aumenta indefinidamente el número de los prismas inscritos, puesto que su altura, que es á lo mas igual á PS, disminuye indefinidamente; en otrso

tura es en este caso la del tronco, y bastará probar que su base GAC es media proporcional entre las dos bases del tronco. Para ello, por el punto G se traza GH, paralela á BC. Los dos triángulos DEF, AGH son iguales, por tener DE = AG y los ángulos iguales. Además, los triángulos ABC, AGC, tienen el mismo vértice C y sus bases AB, AG en línea recta; luego tienen la misma altura y son proporcionales á sus bases, y tenemos :

$$\frac{ABC}{AGC}=\frac{AB}{AG};$$

tenemos igualmente :

$$\frac{AGC}{AGH}=\frac{AC}{AH}$$

y en virtud de las paralelas :

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH};$$

y por último

$$\frac{ABC}{AGC}=\frac{AGC}{AGH};$$

ó bien

$$\frac{ABC}{AGC}=\frac{AGC}{DEF}.$$ Q. E. L. D.

2.º Consideremos ahora un tronco de pirámide poligonal ABCDEA'B'C'D'E' (fig. 241); formemos una pirámide triangular TFGH que tenga la misma altura que la pirámide SABCDE y una base equivalente (**334**). Cortemos la pirámide TFGH por un plano paralelo á la base y á la misma distancia del vértice T que el plano A'B'C'D'E está del vértice S. Las dos secciones A'B'C'D'E', F'G'H' serán equivalentes (**318**). Por tanto, las dos pirámides SA'B'C'D'E', TF'G'H' son equivalentes, y los dos troncos de pirámide lo son igualmente. Además tienen la misma altura y las bases equivalentes; y puesto que la medida del tronco de pirámide triangular no depende sino de su altura y de su base, la medida del tronco de pirámide de base poligonal será la misma.

Observacion. Llamamos B y b las dos bases del tronco de pirámide, H su altura y V su volúmen. La media proporcional

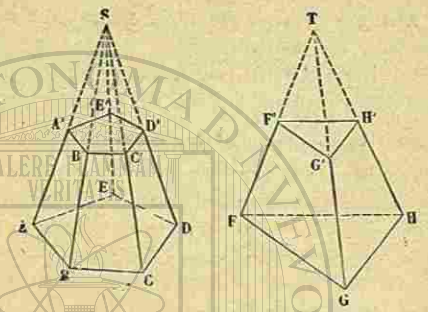

Fig. 241.

entre las bases será $\sqrt{Bb}$ y las tres pirámides del enunciado tendrán por valor respectivo

$$\frac{1}{3}B\times H,\qquad \frac{1}{3}b\times H,\qquad \frac{1}{3}\sqrt{Bb}\times H;$$

el volúmen del tronco se determinará segun la fórmula

$$V=\frac{1}{3}B\times H+\frac{1}{3}b\times H+\frac{1}{3}\sqrt{Bb}\times H,$$

ó colocando $\frac{1}{3}$ H como factor comun

$$V=\frac{1}{3}H\times(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Aplicaciones. I. La mayor de las pirámides de Egipto tiene por base un cuadrado de $232^{m},75$, de lado, su altura es de 146 metros, y se desea saber el volúmen.

El área de la base es igual á $232,75^2$ y el volúmen de la pirámide es :

$$\frac{1}{3}\cdot 232,75^2\times 146=2636399^{m\cdot c},032,$$

con un error por exceso de $0^{m\cdot c},001$. Como se ve, dicha pirá-

mide tiene un volúmen considerable, del cual podemos formarnos una idea clara suponiendo que con los materiales que la componen se formaria un muro de dos metros de altura y 40 centímetros de espesor, y cuya longitud seria :

$$\frac{2636398,032}{2\times 0,40}=3\,270\,497 \text{ metros.}$$

es decir 3270 kilómetros próximamente, muro con el que casi podria rodearse toda Francia.

II. El obelisco de Luxor es un tronco de pirámide muy alargado, de bases cuadradas, y tiene encima de su base menor una pirámide regular. El lado de la base inferior tiene $2^{m},42$ de longitud; el de la base superior, $1^{m},54$; la distancia de las dos bases es igual á $21^{m},60$, y la altura de la pirámide, $1^{m},20$. Se desea saber cuánto pesará el obelisco, sabiendo que el metro cúbico de granito de que está hecho pesa 2750 kilógramos.

Averigüemos en primer lugar su volúmen. El área de la base mayor es de $2,42^2=5^{mc},8564$. La de la base menor es $1,54^2=2^{mc},3716$. La media proporcional entre las dos bases es $\sqrt{2,42^2\times 1,54^2}$ ó bien $2,42\times 1,54=3^{mc},7268$. Sumamos estos tres números que nos dan 11,9547. El volúmen del tronco de pirámide es pues :

$$11,9548\times\frac{21,60}{2}=86^{mc},074560$$

El volúmen de la pirámide será á este tenor

$$2,3716\times\frac{1,20}{3}=0^{mc},948640$$

y el volúmen total del obelisco será finalmente

$$86^{mc},07457+0^{mc},94864=87^{mc},0232.$$

Segun esto su peso será :

$$2750^{kg}\times 87,0232=239\,313^{kg},8,$$

ó sean próximamente 2393 quintales métricos.

§ XXXII. Nociones sumarias sobre los poliedros semejantes. — Relacion de las superficies y de los volúmenes.

337. Definiciones. Se llaman *poliedros semejantes* dos poliedros que tienen los ángulos poliedros iguales, y que se hallan comprendidos entre un mismo número de caras semejantes una á una. Se llaman *homólogos* los elementos correspondientes de dos poliedros semejantes. Resulta de la definicion misma que los diedros homólogos de dos poliedros semejantes son iguales y semejantemente dispuestos. Además, las aristas homólogas de dos poliedros son proporcionales, porque las caras de ellos son semejantes dos á dos, y como dos caras adyacentes tienen una arista comun, la relacion de dos aristas homólogas es la misma para todas las caras.

338. Teorema. *Si se corta una pirámide* SABCD *por un plano paralelo á su base, se forma una nueva pirámide* SA′B′C′D′, *semejante á la primera* (fig. 242).

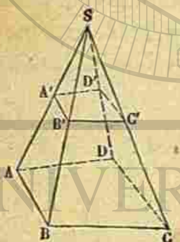

Fig. 242.

En efecto, las dos pirámides tienen las caras semejantes (**317**), tienen además el ángulo poliedro en S comun; los ángulos triedros ASBD, A′S′B′D′ tienen respectivamente iguales las caras y lo mismo los ángulos diedros (**285**). Además, las caras de los diedros de estos dos ángulos triedros están semejantemente dispuestas, y por tanto, pueden superponerse y por consiguiente son iguales. Lo mismo sucede con lostriedros B y B′, C y C′, etc., y por tanto, las dos pirámides son semejantes.

339. Teorema. *Dos tetraedros que tienen un ángulo diedro igual comprendido entre caras semejantes y semejantemente dispuestas, son semejantes.*

Sean ABCD, A′B′C′D′ dos tetraedros (fig. 243) que tienen el

diedro AB igual al A′B′, la cara ABC semejante á la A′B′C′, y la cara ABD semejante á la A′B′D′. Llevemos A′B′C′D′ de manera que el diedro A′B′ coincida con su igual AB, cayendo el punto A′ en el punto A, y B′ en B″. A causa de la semejanza de los triángulos ABC, A′B′C′, el ángulo BAC es igual al B′A′C′; A′C′ tomará la direccion AC y C′ vendrá á parar á C″. De la misma suerte el punto D′ caerá en D″ sobre AD. Dicho esto, el ángulo AB″C″ siendo igual

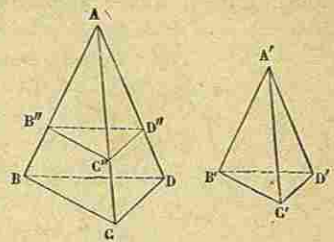

Fig. 243.

á ABC, la línea B″C″ será paralela á BC. Por la misma razon B″D″ será paralela á BD. Segun esto, el plano B″C″D″ es paralelo á BCD (**272**). En virtud, pues, del teorema precedente, la pirámide AB″C″D″ ó su igual A′B′C′D′ será semejante á la pirámide ABCD. Q. E. L. D.

340. Teorema. *Dos poliedros compuestos de un mismo número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

En efecto, los ángulos poliedros homólogos serán iguales como compuestos de un mismo número de ángulos triedros iguales y dispuestos de la misma manera. Si, en uno de los poliedros muchos triángulos están en un mismo plano y forman un polígono plano, los triángulos homólogos en el otro estarán tambien en un mismo plano, á causa de la igualdad de los diedros de los tetraedros homólogos : las caras homólogas serán además semejantes, como compuestas de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Luego de todo resulta que los poliedros serán semejantes.

341. Teorema. Recíprocamente : *dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos* (fig. 244).

Tomamos una de las aristas AB de uno de los poliedros, y en las dos caras que se cortan segun esta línea ó arista, tomamos las aristas AC y AD. Consideremos el tetraedro ABCD cuyo diedro AB es uno de los diedros del poliedro. El tetraedro homólogo A'B'C'D' será semejante á él, porque tienen el diedro

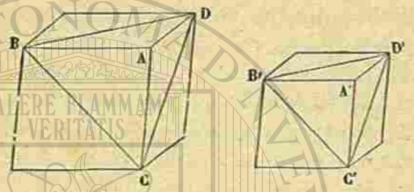

Fig. 244.

AB = A'B', como diedros homólogos de los dos poliedros y las caras ABC, ABD serán respectivamente semejantes á las caras A'B'C', A'B'D' como triángulos homólogos que forman parte de dos caras homólogas de los dos poliedros (**339**).

Sentado esto, quitemos á los dos poliedros estos dos tetraedros semejantes, y los dos poliedros restantes serán semejantes, y operando de la misma manera, se quitarán otros dos tetraedros semejantes y así en adelante. Luego, etc.

342. Teorema. *La relacion de las superficies de dos poliedros semejantes es igual á la relacion de los cuadrados de las aristas homólogas.*

Sean A y *a* dos aristas homólogas de dos poliedros semejantes, S, S', S''..... las áreas de diversas caras del primer poliedro, *s*, *s'*, *s''* las áreas de las caras homólogas del segundo poliedro; y tendremos (235):

$$\frac{S}{s}=\frac{A^2}{a^2};\quad \frac{S'}{s'}=\frac{A^2}{a^2}\ \text{etc.}$$

de donde

$$\frac{S}{s}=\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''}=\ldots=\frac{A^2}{a^2},$$

y por consiguiente en virtud de un teorema conocido

$$\frac{S+S'+S''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots}=\frac{A^2}{a^2}.$$

Q. E. L. D.

343. Teorema. *La relacion de los volúmenes de dos poliedros semejantes es igual á la relacion de los cubos de sus aristas homólogas.*

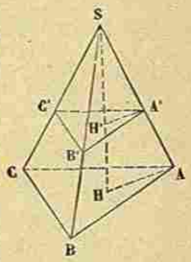

Fig. 245.

Consideramos en primer término dos tetraedros semejantes y los disponemos de manera que tengan un triedro comun (fig. 245); cuyos tetraedros serán SABC, SA'B'C'. Los planos ABC, A'B'C' son paralelos, y las alturas de las dos pirámides son SH y SH'. Tendremos, pues (**334**) :

$$SABC=\frac{1}{3}ABC\times SH,$$

$$SA'B'C'=\frac{1}{3}A'B'C'\times SH';$$

dividiendo miembro á miembro las anteriores igualdades, resulta :

$$\frac{SABC}{SA'B'C'}=\frac{ABC}{A'B'C'}\times\frac{SH}{SH'};$$

pero

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

y tambien (**317**)

$$\frac{SH}{SH'}=\frac{AB}{A'B'};$$

de donde resulta finalmente

$$\frac{SABC}{SA'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

Considerando ahora dos poliedros semejantes P y *p*, que descomponemos en tetraedros semejantes T, T′, T″..... pertenecientes al primero, y t, t', t''... al segundo, y que A y a son dos aristas homólogas de dichos dos poliedros, tendremos, segun lo dicho antes, que :

$$\frac{T}{t}=\frac{A^3}{a^3};\quad \frac{T'}{t'}=\frac{A^3}{a^3}, \text{ etc.},$$

de donde

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\dots=\frac{A^3}{a^3},$$

y por consiguiente, segun un teorema sabido

$$\frac{T+T'+T''+\dots}{t+t'+t''+\dots}=\frac{A^3}{a^3}$$

$$\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO VII

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Las cuatro diagonales de un paralelipípedo cualquiera se cortan mútuamente en dos partes iguales.

2. Las diagonales de un paralelipípedo rectángulo son iguales, y el cuadrado de una de ellas es igual á la suma de los cuadrados de las tres dimensiones del paralelipípedo.

3. Las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro se cortan mútuamente en dos partes iguales.

4. Si, en un tetraedro, dos aristas son respectivamente perpendiculares á las aristas opuestas, las otras dos aristas lo son tambien.

5. En un tetraedro en el que cada arista es perpendicular á su opuesta, las cuatro alturas se cortan en un mismo punto, en el que se cortan tambien las perpendiculares comunes á las aristas opuestas.

6. Los planos trazados perpendicularmente sobre las aristas de un tetraedro por sus puntos medios, se cortan en un mismo punto.

7. Los planos bisectores de los diedros de un tetraedro se encuentran en un mismo punto.

8. Dado un tetraedro cuyas aristas son todas iguales, se baja desde uno de los vértices una perpendicular sobre la cara opuesta, y se une el punto medio de esta perpendicular con los otros tres vértices. Demuéstrese, esto hecho, que las tres líneas de union, así trazadas, son perpendiculares dos á dos. (Concurso general de la clase de segunda, 1870.)

9. El volúmen de un prisma triangular tiene por medida la mitad del producto del área de una cara lateral por la distancia de esta cara á la arista opuesta.

10. Si sobre tres rectas paralelas y no situadas en un mismo plano, se toman las longitudes AA′, BB′, CC′ iguales á una recta dada, el volúmen del prisma triangular ABCA′B′C′ es constante, cualquiera que sea la posicion de los puntos A, B, C, sobre las tres rectas.

11. Dadas tres rectas paralelas, no situadas en el mismo plano, se toma en una de ellas una distancia AB, igual á una longitud dada. Se toma además arbitrariamente un punto C sobre la segunda, y otro punto D en la tercera. Los cuatro puntos A, B, C, D, son los cuatro vértices de una pirámide, y hay que demostrar :

1.° Que el volúmen de esta pirámide es independiente de la posicion de los puntos C y D sobre las rectas en que se hallan;

2.° Que este volúmen es proporcional á la longitud AB;

3.° Que permanece el mismo cualquiera que sea la de las tres paralelas sobre las que se tome la longitud AB.

12. Dos tetraedros que tienen un ángulo triedro igual, son entre sí como los productos de las aristas que comprenden el ángulo triedro igual.

13. Dado un tetraedro cualquiera ABCD, se juntan dos á dos los puntos medios en las cuatro aristas AB, BC, CD, DA.

Demuéstrese que todos los puntos medios están en un mismo plano, y que este plano divide al tetraedro en dos partes equivalentes. (Concurso general de la clase de segunda, 1869.)

14. Imaginemos en un tetraedro ABCD cuatro aristas consecutivas AB, BC, CD, DA, y que se deforma el dicho tetraedro de todos los modos posibles, conservando las aristas mencionadas sus longitudes respectivas. Demostrar en estos supuestos, que entre todos los tetraedros así obtenidos es el mayor aquel en que los ángulos diedros que tienen por aristas AC y BD, son rectos.

15. Por cada uno de los vértices de un tetraedro se traza un plano paralelo á la cara opuesta. Estos cuatro planos forman un nuevo tetraedro cuyas caras son semejantes á las del primero. Hállese la relacion de las superficies y del volúmen de los dos tetraedros dichos.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Dadas tres rectas tales, que dos cualesquiera de ellas no estén situadas en un mismo plano, y se pide que construyamos un paralelipípedo que tenga tres aristas situadas sobre estas tres rectas.

2. Dadas las áreas de las dos bases de un tronco de pirámide, hallar el área de la seccion paralela á las bases y trazada á igual distancia de una y otra.

3. Cortar un cubo por un plano, de manera que la seccion sea un exágono regular.

4. Se dan dos pirámides iguales, de base cuadrada, y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. Se unen de manera que coincidan las bases, y se corta el poliedro que resulta de la union por un plano que pase por el punto medio de una arista, paralelamente á una de las caras que terminan en uno ú otro extremo de la arista dicha. Se desea saber la forma que tendrá la seccion plana que ha resultado. (Concurso general de la clase de segunda, 1866.)

5. Hallar el volúmen de un tetraedro regular del cual se

conoce la arista. (Se llama tetraedro regular aquel cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros.)

6. Se construyen dos pirámides regulares iguales, de base cuadrada, y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y se las reune por su base. Se obtiene de esta manera un poliedro de ocho caras triangulares, cuyas aristas son iguales y que se llama un octaedro regular. Se desea saber cuál será el volúmen, conociendo la arista.

7. Dado un ángulo triedro y una recta en una de sus caras, se pide trazar por esta recta un plano que cierre el ángulo triedro y determine un tetraedro de volúmen dado.

8. Dada una pirámide triangular, trazar por una de sus aristas de la base un plano que divida la pirámide en dos partes equivalentes.

9. Dada una pirámide triangular truncada, trazar por una de las aristas de la base superior un plano que divida el volúmen del tronco en dos partes equivalentes. (Concurso general de la clase de segunda, 1873.)

10. Dado un prisma triangular, se hace en él una seccion *abc* paralela á las bases. Se unen los vértices *a*, *b*, *c* de esta seccion á un punto cualquiera O, tomado en el plano de la base superior. Se prolongan las líneas de union hasta que se encuentren en A, B, C con el plano de la base inferior. Se pregunta á qué distancia de la base superior debe estar hecha la seccion *abc* para que el tetraedro que tiene por vértices O, A, B, C sea equivalente al prisma. (Concurso general de la clase de filosofía, 1873.)

11. Una vasija que tiene la forma de un prisma exagonal regular, tiene de capacidad 2000 hectólitros. Su profundidad es de $0^m,50$, y se pide la longitud de los lados de la base.

12. Un bloque de basalto tiene la forma de un prisma cuya base es un exágono regular que tiene de lado $0^m,03$, de altura $3^m,45$, y el metro cúbico de basalto pesa 2850 kilógramos. Se desea saber cuál será el peso de este bloque.

13. Un estanque tiene la forma de un prisma cuya base es un octógono regular de 10 metros de lado. El fondo del estanque es horizontal, y la altura del agua en él contenida es de

$0^{m},75$. Hay que calcular en hectólitros el volúmen del agua.

14. El volúmen de un paralelipípedo rectangular es igual á $4762^{m\cdot c},7$ y sus aristas son entre sí como los números 3, 5, 7. Cuál será la longitud de sus aristas.

15. Se trata de un círculo cuyo rádio es 10 metros, y se le inscribe un triángulo equilátero. Hallar el volúmen de la pirámide que tenga dicho triángulo por base y una altura igual á 12 metros.

16. Hallar la altura de una pirámide regular de base cuadrada, sabiendo que la superficie de la base es igual á $6^{m\cdot c},7483$, y que la longitud de las aristas laterales es igual á $6^{m},89$.

17. Calcular en hectólitros la capacidad de un estanque de forma cuadrada, cuyas paredes están en talud, siendo el fondo tambien un cuadrado. Dichos dos cuadrados tienen respectivamente 12 y 10 metros de lado, y la profundidad del estanque es de $2^{m},10$.

LIBRO VIII

CUERPOS REDONDOS

§ XXXIII. Cilindro recto de base circular. — Medida de la superficie lateral y del volúmen.

344. Definiciones. Se llama *cilindro recto de base circular*, ó mas breve, *cilindro circular recto*, el sólido engendrado por la revolucion de un rectángulo OO′A′A (fig. 246), que gira alrededor de uno de sus lados OO′. En este movimiento, los lados OA, O′A describen dos círculos iguales y paralelos que son las *bases* del cilindro; el lado AA′ engendra la *superficie lateral* del cilindro; el lado fijo OO′ se llama *eje* ó *altura* del cilindro.

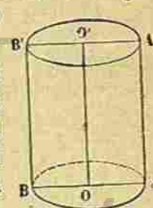

Fig. 246.

Es evidente que todo punto de AA′ girando alrededor de OO′, describe una circunferencia igual y paralela á las bases; y por tanto, si se corta un cilindro por un plano prependicular al eje, la seccion es un círculo igual á la base.

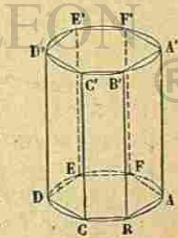

Fig. 247.

345. Teorema. *La superficie lateral de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura* (fig. 247).

En la base del cilindro inscribimos un polígono regular ABCDEF, y por los vértices trazamos las generatrices AA′, BB′, CC, etc., y unimos los extremos de estas líneas. Resultará de este modo un prisma *inscrito* en el cilindro. Sien-

$0^m,75$. Hay que calcular en hectólitros el volúmen del agua.

14. El volúmen de un paralelipípedo rectangular es igual á $4762^{m \cdot c},7$ y sus aristas son entre sí como los números 3, 5, 7. Cuál será la longitud de sus aristas.

15. Se trata de un círculo cuyo rádio es 10 metros, y se le inscribe un triángulo equilátero. Hallar el volúmen de la pirámide que tenga dicho triángulo por base y una altura igual á 12 metros.

16. Hallar la altura de una pirámide regular de base cuadrada, sabiendo que la superficie de la base es igual á $6^{m \cdot c},7483$, y que la longitud de las aristas laterales es igual á $6^m,89$.

17. Calcular en hectólitros la capacidad de un estanque de forma cuadrada, cuyas paredes están en talud, siendo el fondo tambien un cuadrado. Dichos dos cuadrados tienen respectivamente 12 y 10 metros de lado, y la profundidad del estanque es de $2^m,10$.

LIBRO VIII

CUERPOS REDONDOS

§ XXXIII. Cilindro recto de base circular. — Medida de la superficie lateral y del volúmen.

344. Definiciones. Se llama *cilindro recto de base circular*, ó mas breve, *cilindro circular recto*, el sólido engendrado por la revolucion de un rectángulo OO′A′A (fig. 246), que gira alrededor de uno de sus lados OO′. En este movimiento, los lados OA, O′A describen dos círculos iguales y paralelos que son las *bases* del cilindro; el lado AA′ engendra la *superficie lateral* del cilindro; el lado fijo OO′ se llama *eje* ó *altura* del cilindro.

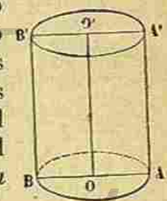

Fig. 246.

Es evidente que todo punto de AA′ girando alrededor de OO′, describe una circunferencia igual y paralela á las bases; y por tanto, si se corta un cilindro por un plano prependicular al eje, la seccion es un círculo igual á la base.

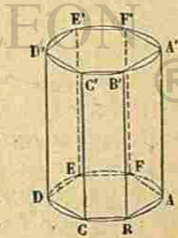

Fig. 247.

345. Teorema. *La superficie lateral de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura* (fig. 247).

En la base del cilindro inscribimos un polígono regular ABCDEF, y por los vértices trazamos las generatrices AA′, BB′, CC, etc., y unimos los extremos de estas líneas. Resultará de este modo un prisma *inscrito* en el cilindro. Siendo recto este prisma, sus caras laterales son rectángulos de la misma altura, y la suma de las áreas de dichos rectángulos, es decir, la superficie lateral del prisma tendrá por medida el perímetro de la base multiplicada por la altura. Ahora bien, si se aumenta indefinidamente el número de los lados del polígono ABCDEF, su perímetro tendrá por límite la longitud de la circunferencia base del cilindro, y la superficie lateral del prisma tendrá por límite la del cilindro. De aquí resulta que la superficie lateral del cilindro es igual á la circunferencia de su base, multiplicada por su altura.

346. Corolario. Si la base del cilindro es un círculo de rádio R, y llamamos á la altura H la superficie lateral será

$$2\pi RH;$$

y la superficie *total* del cilindro, que se compone de la superficie lateral mas la superficie de las dos bases, tendrá por medida la expresion

$$2\pi RH+2\pi R^2,$$

ó, considerando $2\pi R$ como factor comun

$$2\pi R\times(H+R).$$

347. Observacion. Si se cortara la superficie del prisma inscrito en el cilindro segun una arista AA', podria evidentemente desarrollarse esta superficie sobre un plano, y se obtendria de esta manera un rectángulo que tendria por base el perímetro de la base del prisma, y por altura la misma del prisma. De aquí se deduce que *la superficie lateral de un cilindro es desarrollable sobre un plano, y que el desarrollo tiene la forma de un rectángulo que tiene por altura la del cilindro y por base la circunferencia de la base del cilindro.*

348. Teorema. *El volúmen de un cilindro es igual al*

producto de su base por su altura. Este teorema es evidente sin mas que cosinderar al cilindro como el límite de un prisma inscrito, cuando aumenta indefinidamente el número de caras de dicho prisma.

349. Corolario. La fórmula siguiente expresa el volúmen del cilindro :

$$V=\pi R^2H.$$

Aplicaciones. I. El diámetro de un conducto hueco cilíndrico es igual á 18 centímetros, y su altura á 65 centímetros. ¿Cuál será la superficie de la plancha con que se ha hecho? La circunferencia de la base de este cilindro es igual á $18^c\times\pi$ y la superficie lateral, expresada en centímetros cuadrados será :

$$18\times\pi\times65=\pi\times1170=3676^{c\cdot c},$$

con un centímetro de error.

II. Se desea fabricar un conducto cilíndrico con una placa de palastro rectangular cuya superficie es igual á 50 decímetros cuadrados. La base y altura de este rectángulo están en la relacion de 3 á 2, y se pide el diámetro y la altura del conducto que se va á hacer.

Hay que buscar en primer término las dimensiones del rectángulo de palastro : la base es $\frac{3}{2}$ de la altura y por tanto el área equivale á $\frac{3}{2}$ del cuadrado de la altura, y el cuadrado de la altura es los $\frac{2}{3}$ del área ó sea $\frac{50\times2}{3}=\frac{100}{3}$. La altura será la raiz cuadrada de este número es decir $\frac{10^d}{\sqrt{3}}=5^d,773$, cantidad que será la altura del conducto.

La base de dicho rectángulo es $\frac{3}{2}$ de sste número, ó sean $8^d,660$. Al formar el conducto, esta base se convierte en circunferencia del cilindro, y el diámetro se obtendrá dividiendo la circunferencia por π, y resultará

$$8^d{,}660 \times \frac{1}{\pi} = 2^d{,}76;$$

y por tanto el diámetro del conducto será igual á $2^d{,}76$ ó sean 276 milímetros y su altura 577 milímetros.

III. Una columna cilíndrica de fundicion tiene 12 centímetros de diámetro y $3^m{,}75$ de altura: ¿cuál será el volúmen?

El rádio de la base es igual á $0^m{,}06$, y por consiguiente, el volúmen será:

$$\pi \times 0{,}06^2 \times 3{,}75 = \pi \times 0{,}0135 = 0^{m\cdot c}{,}042412,$$

ó sean 42 decímetros cúbicos 412 centímetros cúbicos.

IV. Un hilo cilíndrico de cobre tiene 400 metros de longitud y pesa 2765 gramos. Sabiendo que un centímetro cúbico de cobre pesa $8^{gr}{,}8$ se desea saber cuál es el diámetro de dicho hilo.

El volúmen del hilo será evidentemente $\frac{2765^{c\cdot c}}{8{,}8} = \frac{27650^{c\cdot c}}{88}$.

Su longitud es de 40 000 centímetros, y llamando R al rádio, tendrémos segun la fórmula del volúmen del cilindro

$$\pi R^2 \times 40\,000 = \frac{27\,650}{88};$$

de donde se saca

$$R^2 = \frac{27\,650}{88 \times 40\,000 \times \pi} = \frac{2\,765}{352\,000} \times \frac{1}{\pi} = 0{,}0025275,$$

y por consiguiente

$$R = \sqrt{0{,}0025275} = 0^c{,}05027.$$

El diámetro del hilo será el doble de este número, ó sea $0^c{,}10054$, es decir un milímetro próximamente.

V. Las medidas de capacidad para los líquidos tienen la forma de un cilindro cuya altura es doble del diámetro. Hallar el diámetro del litro.

Tomamos por unidad de longitud el decímetro, y por consiguiente, por unidad de volúmen el decímetro cúbico ó el litro. En este caso, si llamamos R al rádio del cilindro, su diámetro será 2R, su altura 4R, y tendremos segun la fórmula precedente

$$1 = \pi R^2 \times 4R = 4\pi R^3;$$

de donde se deduce

$$R^3 = \frac{1}{4\pi} = 0{,}079577471\ldots$$

y por consiguiente

$$R = \sqrt[3]{0{,}079577471} = 0^d{,}430$$

con menos de una milésima de decímetro. El diámetro del litro será, pues, $0^d{,}86$ ó 86 milímetros, y su altura igual á 172 milímetros.

VI. Hallar el volúmen de la obra de fábrica empleada en la construccion de un pozo cilíndrico de $4^m{,}75$ de profundidad y de $1^m{,}24$ de diámetro interior, sabiendo que el espesor uniforme de la obra de fábrica es de $0^m{,}35$.

El volúmen de la obra de fábrica es la diferencia de los volúmenes de dos cilindros de la misma altura y cuyos rádios son respectivamente $0^m{,}62$ y $0^m{,}62 + 0^m{,}35 = 0^m{,}97$, cuyo volúmen será igual á

$$\pi \times 0{,}97^2 \times 4{,}75 - \pi \times 0{,}62^2 \times 4{,}75,$$

ó bien:

$$(0{,}97^2 - 0{,}62^2) \times 4{,}75 \times \pi = 8^{m\cdot c}{,}304,$$

con un decímetro cúbico de diferencia.

§ XXXIV. Cono recto de base circular. — Superficie lateral del cono y del tronco de cono de bases paralelas. — Volúmen del cono.

350. Definiciones. Se llama *cono recto de base circular* el sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo SOA, girando alrededor de uno de los lados del ángulo recto SO (fig. 248). En este movimiento, el lado OA perpendicular á SO describe un círculo que tiene por centro el punto O, y cuyo plano es perpendicular á SO, y al que se llama *base* del cono. La línea SO se llama *eje* del cono, y su longitud es la *altura* del cono. La hipotenusa SA, girando alrededor de SO, engendra una superficie que se llama la *superficie lateral* del cono : esta hipotenusa se llama *lado ó apotema* del cono.

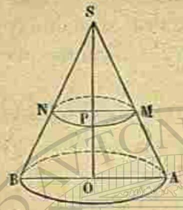

Fig. 248.

351. Consideremos un punto M de la hipotenusa SA, y bajemos desde este punto la perpendicular MP al eje. Cuando el triángulo SOA gira alrededor de SO, la línea PM perpendicular al eje describe un círculo que tiene por centro el punto P, y cuyo plano es perpendicular al eje. *Las secciones dadas en el cono por planos perpendiculares al eje, son pues círculos que tienen su centro en el eje.*

352. Se llama *tronco de cono de bases paralelas* el sólido que se obtiene cortando un cono por un plano paralelo á la base, como el cuerpo ABMN. El círculo de base del cono AOB y el círculo paralelo MPN son las *bases* del tronco; PO es en él la *altura*, AM el *lado;* la *superficie lateral* del tronco de cono es la porcion de la superficie lateral del cono comprendida entre los planos de las dos bases.

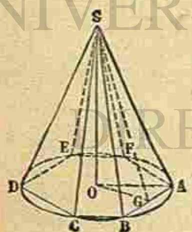

Fig. 249.

353. Teorema. *La superficie lateral del cono es igual á la circunferencia de su base, multiplicada por la mitad del lado* (fig. 249).

En la base del cono inscribimos un polígono regular ABCDEF, y unimos el vértice S del cono con todos los vértices de este polígono. Tenemos así una pirámide regular *inscrita* en el cono. La superficie lateral de esta pirámide se compone de triángulos isosceles,

todos iguales entre sí. Trazando la altura SG de uno de ellos, la suma de todos estos triángulos tendrá por medida el perímetro de la base de la pirámide, multiplicada por $\frac{1}{2}$ SG. Si se aumenta indefinidamente el número de estos lados de la base ABCDEF, el perímetro de dicha base tendrá por límite la circunferencia de la base del cono y la línea SG se aproximará á ser el lado SA del cono. Por fin la superficie lateral del cono será igual al producto de la circunferencia OA por $\frac{1}{2}$ SA.

Q. E. L. D.

354. Corolario. Si R es el radio de la base del cono y A su lado, la superficie lateral del cono será :

$$2\pi R \times \frac{A}{2} = \pi RA,$$

y la superficie total será :

$$\pi RA + \pi R^2 = \pi R(R + A).$$

355. Teorema. *La superficie lateral de un tronco de cono es igual á la semi-suma de las circunferencias de las bases multiplicada por el lado* (fig. 250).

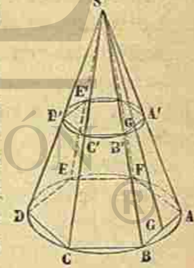

Fig. 250.

En el cono SAD inscribimos una pirámide regular. El plano de la base superior del tronco de cono determina un tronco de pirámide ABCD..... A'B'C'D'..... cuya superficie lateral se compone de trapecios isosceles todos iguales entre sí. Esta superficie es, pues, igual á la semi-suma de los perímetros de las bases del tronco, multiplicadas por GG', altura de uno de los trapecios, de donde resulta inmediatamente que la del tronco de cono es igual á

$$\frac{\text{cir. AB} + \text{cir. A'B'}}{2} \times AA'.$$

356. Corolario. I. Llamando R y r los rádios de las dos bases y A el lado del tronco de cono, su superficie lateral será la contenida en la fórmula

$$S=\pi(R+r)A.$$

357. Corolario. II. Por el punto medio D del lado AA′ (fig. 251) trazamos un plano paralelo á las bases. Dicho plano corta el tronco de cono segun un círculo cuyo rádio CD es igual á la semi-suma de los rádios OA y O′A′ (**186**); luego puede muy bien reemplazarse la semi-suma de las circunferencias de las bases por cir. CD. *La superficie lateral del tronco del cono es, pues, igual á la circunferencia media multiplicada por el lado.*

Fig. 251.

Esta medida se aplica tambien á la superficie lateral del cilindro y á la del cono: en el cilindro, la circunferencia media es igual á la circunferencia de base, y el lado es igual á la altura; en el cono, la circunferencia media es igual á la mitad de la de la base.

358. Teorema. *El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Basta, para convencerse de ello, considerar el volúmen del cono como el límite del volúmen de la pirámide regular inscrita, cuando aumenta indefinidamente el número de caras de esta pirámide.

Llamando R el rádio de la base y H la altura del cono, su volúmen se expresará por

$$\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

359. Teorema. *El volúmen de un tronco de cono de bases paralelas es igual á la suma de tres conos que tengan por altura comun la del tronco y por bases, el primero, la base inferior, el segundo la base superior y el tercero una media proporcional entre las dos bases*

Demostracion análoga á las precedentes, considerando el tronco de cono como el límite de un tronco de pirámide.

Llamando R y r los rádios de las dos bases del tronco y H á su altura, las bases de los tres conos serán iguales, la primera á πR^2, la segunda á πr^2 y la tercera á

$$\sqrt{\pi R^2\times\pi r^2}=\sqrt{\pi^2R^2r^2}=\pi Rr;$$

el volúmen del tronco de cono tendrá, pues, por expresion

$$\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi r^2H+\frac{1}{3}\pi RrH,$$

ó, considerando como factor comun $\frac{1}{3}\pi H$,

$$\frac{1}{3}\pi H\times(R^2+r^2+Rr).$$

Aplicaciones. I. Hallar la superficie lateral de un cono, de cuya base el rádio es igual á $2^m,5$ y el lado á $6^m,4$.

Dicha superficie es igual á

$$2,5\times6,4\times\pi=50^{m.c},2655.$$

con un centímetro cuadrado de diferencia.

II. Los rádios de las dos bases de un tronco de cono son $0^m,16$ y $0^m,3$, y el lado es igual $0^m,15$ y se desea saber cuál es la superficie lateral del tronco de cono.

La superficie pedida es igual á:

$$(0,16+0,03)\times0,15\times\pi=0,0285\times\pi=0^{m.c},0895.$$

con un centímetro cuadrado de diferencia.

III. El diámetro de la base de un cono es igual á su lado. Sabiendo ahora que la superficie total de este cono es igual á 1 metro cuadrado, calcular su diámetro.

La superficie total de un cono tiene por expresion $\pi R(R+A)$ y como A es igual á 2R, esta expresion se convierte en

$$\pi R\times3R=3\pi R^2;$$

y tendremos segun esto

$$3\pi R^2=1;$$

de donde se deduce

$$R^2=\frac{1}{3\pi}=0{,}106103,$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt{0{,}106103}=0^m{,}326,$$

con un milímetro de diferencia; el diámetro del cono es doble de este número ó $0^m{,}652$.

IV. El rádio de la base de un cono es igual á $0^m{,}62$ y su altura á $1^m{,}50$; ¿cuál será su volúmen?

Será igual á

$$\frac{1}{3}0{,}62^2\times1{,}50\times\pi=0{,}1922\times\pi=0^{m\cdot c}{,}603814,$$

con un centímetro cúbico de diferencia.

V. El diámetro de un cono es igual á 1 metro, su lado tiene la misma longitud. Calcular su volúmen.

La altura se calcula teniendo presente que el lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son la altura y el rádio. Resulta de esto que la altura es igual á $\sqrt{1^2-0{,}5^2}=\sqrt{0{,}75}$, y por consiguiente el volúmen será igual á

$$\frac{1}{3}0{,}5^2\times\sqrt{0{,}75}\times\pi=0^{m\cdot c}{,}2267,$$

con un 0,0001 de diferencia.

VI. Un cono cuya altura es igual á $0^m{,}42$ tiene un volúmen de 25 decímetros cúbicos; calcular el rádio de la base.

El volúmem es igual á $0^{m\cdot c}{,}025$ y por tanto, llamando R al rádio, tendremos

$$\frac{1}{3}\pi R^2\times0{,}42=0{,}025;$$

de donde se deduce

$$R^2=\frac{0{,}025\times3}{0{,}42\times\pi}=\frac{25}{140}\times\frac{1}{\pi}=0{,}056841:$$

luego R será igual $\sqrt{0{,}056841}=0^m{,}238$, con un milímetro de aproximacion.

VII. Un cubo de zinc tiene la forma de un tronco de cono y las dimensiones siguientes:

Rádio de la base mayor	$12^c{,}5$,
Rádio de la menor	10^c,
Altura.	25^c,

y se desea saber su capacidad en litros.

Como se pide su capacidad en litros ó en decímetros cúbicos, hay que referir todas estas longitudes al decímetro, y hay que aplicar además la fórmula del n.º **359**, que da:

$$V=\frac{2{,}5\times\pi}{3}(1{,}25^2+1^2+1{,}25\times1)=9^{lit}{,}981$$

con menos error de un centímetro cúbico.

§ XXXV. Esfera. — Secciones planas. — Círculos máximos, círculos mínimos. — Polo de un círculo. — Dada una esfera hallar su rádio mediante una construccion plana.

360. Definiciones. Se llama *esfera* un cuerpo limitado por una superficie cuyos puntos están todos distantes igualmente de otro interior llamado *centro*. La esfera puede considerarse como engendrada por la revolucion de un semi-círculo alrededor de su diámetro.

Se llama *rádio* toda línea que une el centro con cualquier punto de la superficie; todos los rádios son iguales, segun lo dicho. Por último se llama *diámetro* de la esfera toda línea que pasando por el centro termina en dos lados opuestos de la esfera. Todos los diámetros son iguales, porque cada uno de ellos es doble del rádio.

361. Teorema. *Toda seccion plana de la esfera es un círculo* (fig. 252).

Todo plano que pase por el centro O de la esfera la corta segun una curva cuyos puntos están todos á igual distancia del punto O, es decir, segun un círculo de rádio igual al de la esfera.

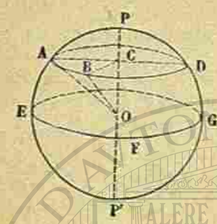

Fig. 252.

Consideremos ahora un plano que la corte no pasando por el centro y sea ABD la seccion. Tracemos los rádios OA, OB, OD, etc. Todas estas líneas son iguales; luego los piés A, B, D, de estas oblícuas al plano secante están en la circunferencia de un círculo que tiene por centro el pié C de la perpendicular OC, bajada desde el centro sobre el plano secante (**252**).

362. Corolario I. El rádio CA del círculo ABD es mas pequeño que el de la esfera, y disminuye á medida que el plano secante se aleja del centro.

Se llama *círculo mínimo* todo círculo de la esfera cuyo plano no pasa por el centro y *círculo máximo* á todo aquel cuyo plano pasa por el centro de la esfera.

363. Corolario II. Dos círculos máximos se cortan siempre segun un diámetro. Por dos puntos tomados en la superficie de una esfera puede siempre hacerse pasar un círculo máximo, pero uno solo, á menos que los dos puntos dados no sean los extremos de un mismo diámetro, porque los dos puntos dados y el centro determinan la posicion de un plano.

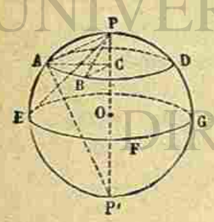

Fig. 253.

364. Definiciones. Se llaman polos de un círculo de la esfera los extremos del diámetro de la esfera perpendicular á dicho círculo. Los puntos P y P' son los polos del círculo ABD (fig. 253). Todos los círculos de la esfera cuyos planos son paralelos tienen los mismos polos.

365. Teorema. *El polo de un círculo de la esfera está igualmente distante de todos los*

puntos de la circunferencia de dicho círculo (fig. 253).

Sea P el polo del círculo ABD. El centro C de este círculo está en la línea OP (**361**) y por tanto PA y PB etc. son oblícuas al plano ABD igualmente distantes del pié C de la perpendicular y por consiguiente son iguales. Q. E. L. D.

366. Observacion. Resulta de este teorema que si se coloca en P una de las puntas del compás y se le da una abertura igual á PA, la otra punta trazará sobre la esfera el círculo ABD. Pueden pues trazarse sobre la esfera círculos, como sobre un plano, con la sola diferencia de emplear un compás de brazos curvos, que es lo que se llama *compás esférico*.

La distancia del polo P á todos los puntos del círculo se llama la *distancia polar* de este círculo. En el caso de que se trate de un círculo máximo EFG la distancia polar es el lado de un cuadrado inscrito en el círculo máximo PEP' y se denomina la *cuerda de un cuadrante*. Cuanto se ha dicho del polo P puede decirse relativamente al P'.

367. Problema. *Hallar el rádio de una esfera sólida dada* (fig. 254).

Desde un punto P cualquiera de la superficie de la esfera se

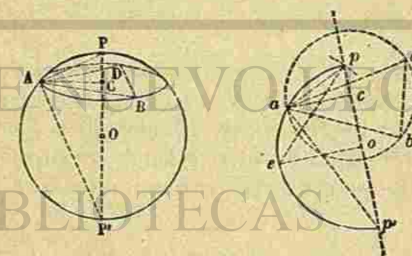

Fig. 254.

traza con una distancia polar PA tomada arbitrariamente un círculo ABD. Sea C el centro de este círculo, P' su segundo polo y A uno de los puntos de su circunferencia, y unamos PA y PA'.

Sabemos que PP′ es un diámetro de la esfera y que este diámetro pasa por el punto C. En el círculo máximo PAP′ el ángulo PAP′ inscrito en una semi-circunferençia es recto, y el triángulo PAP′ que vamos á construir es rectángulo, y su hipotenusa es igual al diámetro de la esfera. Conocemos ya un lado que es la distancia polar PA del círculo que se ha trazado, y vamos á determinar la longitud de la perpendicular AC bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa, longitud que es igual al rádio del círculo mínimo. Al efecto señalamos sobre la circunferencia de dicho círculo mínimo tres puntos A, B, D, tomados á voluntad. Tomamos con el compás las distancias AB, AD, BD y formamos sobre un papel un triángulo *abd* que tenga por lados dichas tres líneas. Determinamos luego el centro *c* del círculo circunscrito á este triángulo y unimos *c* con *a*. Esta línea será evidentemente igual á CA. Hay que construir ahora el triángulo PAP′ conociendo AP y AC, cosa que no ofrece en verdad dificultad alguna. En el punto *c* elevamos á *ac* una perpendicular indefinida y desde el punto *a* como centro con un rádio igual á PA describimos un arco de círculo que corte esta perpendicular en *p*. El triángulo *pac* es igual al triángulo PAC. Por último, en el punto *a* elevamos una perpendicular á *ap* hasta que encuentre á *pc* prolongada en *p′* y el triángulo *pap′* será igual á PAP′ y por consiguiente *pp′* será el diámetro de la esfera.

368. Corolario. Si sobre *pp′* como diámetro se describe un círculo, será igual á un círculo máximo de la esfera, y el lado *pe* del cuadrado inscrito en este círculo será la cuerda de un cuadrante, es decir, la distancia polar de un círculo máximo (**366**); podrán trazarse luego círculos máximos en la esfera.

§ XXXVI. Planos tangentes á la esfera.

369. Definiciones. Se llama *plano tangente* á una esfera el plano que no tiene con ella mas que un punto comun, que se llama punto de contacto ó de *tangencia*.

370. Teorema. *Todo plano* P *perpendicular al extremo de un rádio* OA *de la esfera es tangente á esta*, y recíprocamente, *todo plano tangente á la esfera es perpendicular en el extremo del rádio que pasa por el punto de contacto* (fig. 255).

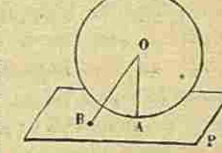

Fig. 255.

1.° Puesto que el plano P es perpendicular á OA, toda línea como OB que una el centro con un punto cualquiera del plano P, es oblícua á este plano, y por tanto, mayor que OA. El punto B es por consiguiente exterior á la esfera y el plano P no tiene mas que el punto A comun con la esfera y es tangente á ella en el punto A.

2.° Recíprocamente, supongamos el plano P tangente á la esfera en el punto A, en cuyo caso todos los demás puntos del plano P son exteriores á ella y estarán del punto O á mayor distancia que el rádio. La línea OA es, pues, la mas corta que puede trazarse desde el centro al plano P, y por tanto es perpendicular á dicho plano (**355**).

371. Corolario. Por un punto tomado en una esfera se le puede trazar un plano tangente, pero no mas que uno (**248**).

372. Observacion. Toda recta tangente á un círculo trazado en una esfera se llama tambien tangente á la esfera, porque es fácil demostrar que toda recta tangente á la esfera es perpendicular al rádio que pasa por el punto de contacto y por tanto está contenida en el plano tangente á dicho punto.

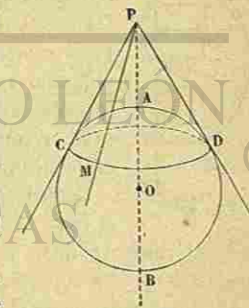

Fig. 256.

Consideremos una esfera O (figura 256) y un punto P exterior. Por el diámetro PB llevemos un plano cualquiera que corte la esfera siguiendo un círculo máximo ACB, y desde el punto P tracemos una tangente PC á este círculo. Despues hagamos girar la figura alrededor del diámetro PB. El círculo ACB engendrará la esfera y la recta PC describirá la superficie lateral de un cono, permaneciendo constantemente tangente á la esfera, y su longitud no variará de modo alguno. De aquí que *todas las tangentes que pueden trazarse á una esfera por un punto exterior son iguales y forman un cono circular recto.* Dicho cono se dice que está *circunscrito* á la esfera. Trazando á la esfera tangentes paralelas al diámetro AB se formaria del mismo modo un cilindro circunscrito á la esfera.

§ XXXVII. Medida de la superficie engendrada por una línea quebrada regular que gira alrededor de un eje trazado en su plano y por su centro. — Area de la zona. — Area de la esfera.

373. Teorema. *La superficie engendrada por una línea quebrada regular que gira alrededor de un eje trazado en su plano y por su centro, es igual al producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la línea quebrada sobre el eje* (fig. 257).

Fig. 257.

Se llama *línea quebrada regular* una línea quebrada que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales tambien. Se demostrará como se hizo en el n.° **214** respecto del polígono regular que puede circunscribirse é inscribirse á un círculo. Sea ABCD la línea quebrada regular, O el centro, MN el eje alrededor del cual gira.

Consideremos la superficie engendrada por el lado AB. Sea OE la perpendicular bajada desde el centro á dicho lado; AA′, BB′, EE′ perpendiculares bajadas al eje. La superficie descrita por AB es la de un tronco de cono que tiene por medida (**257**)

$$2\pi EE' \times AB.$$

Desde el punto A bajamos AH perpendicular sobre BB′. Los

triángulos ABH, EOE′ son semejantes por tener los lados perpendiculares, de lo cual resulta

$$\frac{AB}{OE}=\frac{AH}{EE'};$$

de donde resulta, igualando el producto de los extremos con los medios, y reemplazando AH por su igual A′B′

$$EE' \times AB = OE \times A'B'.$$

Multiplicando ahora los dos miembros de esta igualdad por 2π, tendremos

$$2\pi EE' \times AB = 2\pi OE \times A'B'.$$

Pero $2\pi EE' \times AB$ es la expresion de la superficie engendrada por la línea AB, superficie que denominaremos superf. AB, y tendremos

$$\text{superf. } AB = 2\pi OE \times A'B'.$$

De igual manera tendremos

$$\text{superf. } BC = 2\pi OF \times B'C'$$
$$\text{superf. } CD = 2\pi OG \times C'D'.$$

Sumando y notando que $OE = OF = OG$, tendremos

$$\text{superf. } ABCD = 2\pi OE \times (A'B' + B'C' + C'D') = 2\pi OE \times A'D'.$$

Q. E. L. D.

374. Definiciones. Se llama *zona* la porcion de la superficie de la esfera comprendida entre dos círculos cuyos planos son paralelos. Estos círculos son las *bases* de la zona y la distancia de sus centros es la *altura* de la zona.

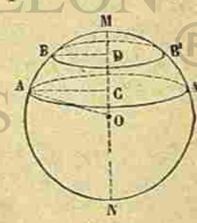

Fig. 258.

Cuando la zona no tiene mas que una base se llama *casquete esférico*, y su altura es la distancia desde el centro del círculo que le sirve de base al polo de dicho círculo. Sea ABB′A′ una zona, MN el diámetro per pendicular á las dos bases (fig. 258); MBAN un círculo máximo que pasa por los puntos M y N. Si se hace girar la semi-circunferencia alrededor de MN, engendrará la esfera y el arco AB, la zona: la altura CD es la proyeccion del arco AB sobre el diámetro MN.

375. Teorema. *El área de una zona es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por la altura.*

Imaginemos que se inscribe en el arco AB (fig. 258) que engendra la zona una línea quebrada regular de gran número de lados. La superficie engendrada por esta línea quebrada tendrá por límite la engendrada por el arco AB, es decir, la zona. La superficie engendrada por la línea quebrada regular inscrita es igual á la circunferencia inscrita multiplicada por la proyeccion CD de dicha línea sobre el eje. Cuando aumenta indefinidamente el número de lados de la línea quebrada, el rádio de la circunferencia inscrita se acerca mas y mas al rádio OA de la esfera. Luego la zona tiene por medida la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por su altura. Q. E. L. D.

376. Corolario. *Sobre una misma esfera, dos zonas son proporcionales á sus alturas.* Resulta de aquí que si se quiere dividir una zona en partes equivalentes, bastará dividir su altura en partes iguales y trazar por los puntos de division planos paralelos á las bases de la zona.

377. Observacion. Sea R el rádio de la esfera, H la altura de la zona. La longitud de la circunferencia de un círculo máximo es $2\pi R$ y por consecuencia el área de la zona es igual á

$$2\pi R \times H.$$

378. Teorema. *La superficie de una esfera es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo por su diámetro.*

En efecto la esfera entera puede considerarse como una zona engendrada por la revolucion de una semi-circunferencia alrededor de su diámetro, y esta zona tiene por altura el diámetro mismo de la esfera; luego su superficie es igual al producto de su diámetro por la circunferencia de un círculo máximo (**375**).

379. Corolario I. *La superficie de una esfera es equivalente á cuatro veces la superficie de un círculo máximo.*

En efecto, si llamamos R al rádio de la esfera, su superficie se podrá expresar por el producto $2R \times 2\pi R$ ó $4\pi R^2$; pero la superficie de un círculo máximo es igual á πR^2, y por tanto la de la esfera es cuatro veces mayor.

380. Observacion. Puede expresarse la superficie de una esfera como la de un círculo en funcion de su rádio, del diámetro ó de la circunferencia de un círculo máximo. Designaremos con las letras R, D, C, S, el rádio, el diámetro, la circunferencia de un círculo máximo y la superficie de la esfera. Tendremos, segun esto:

$$S = 4\pi R^2; \qquad [1]$$

si en esta fórmula reemplazamos R por $\frac{D}{2}$ resultará

$$S = 4\pi \frac{D^2}{4} = \pi D^2; \qquad [2]$$

hemos visto enfin (**250**) que el área de un círculo cuya circunferencia es C es igual á $\frac{C^2}{4\pi}$, y por consiguiente el área de la esfera que vale 4 círculos máximos será

$$S = \frac{C^2}{4\pi} \times 4 = \frac{C^2}{\pi} \qquad [3]$$

381. Corolario II. *La relacion de la superficie de dos esferas es igual á la de los cuadrados de sus rádios.*

En efecto, sean R y R′ los rádios, S y S′ las superficies de dos esferas, y tendremos:

$$S = 4\pi R^2, \quad S' = 4\pi R'^2.$$

Dividamos estas dos igualdades miembro á miembro y suprimamos el factor comun 4π y tendremos :

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Aplicaciones. I. La superficie de la tierra está dividida en cinco zonas, la *tórrida* comprendida entre los dos trópicos, dos zonas *templadas* comprendidas entre los trópicos y los círculos polares, y dos zonas *glaciales* comprendidas entre los círculos polares y los polos. Cada una de las templadas tiene de altura 3306 kilómetros próximamente.

¿Cuál será la superficie de una de estas zonas?

La circunferencia de un círculo máximo de la tierra equivale, segun la definicion del metro á 40 000 000 metros ó 40 000 kilómetros, y por tanto la superficie de una zona templada será

$$40\,000\times 3306=132\,240\,000 \text{ kilómetros cuadrados próximamente.}$$

II. Hallar la superficie de la tierra en miriámetros cuadrados.

Puesto que la circunferencia de un círculo máximo es conocida, emplearemos la fórmula [3]. Dicha circunferencia es igual á 4000 miriámetros, y por tanto, la superficie del globo terrestre será

$$\frac{4000^2}{\pi}=16\,000\,000\times\frac{1}{\pi}=5\,092\,958 \text{ miriámetros próximamente.}$$

III. El diámetro de un globo es de 22 centímetros, ¿cuál será su superficie?

Será igual á

$$22^2\times\pi=1520^{\text{m.c}},53$$

con un milímetro cuadrado de diferencia.

IV. La tela de un globo esférico tiene una superficie de 250 metros cuadrados : ¿cuál será su diámetro?

Tenemos :

$$\pi D^2=250;$$

de donde resulta

$$D=\sqrt{\frac{250}{\pi}}=\sqrt{79,5775}=8^{\text{m}},92,$$

con un centímetro de aproximacion.

§ XXXVIII. Medida del volúmen de la esfera considerada como suma de una infinidad de pirámides, que tienen por bases polígonos planos, infinitamente pequeños, y por altura el rádio.

382. Teorema. *El volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio del rádio.*

En efecto, imaginemos un poliedro, cuyas caras sean todas tangentes á la esfera, y unamos el centro de esta con todos los vértices de este poliedro. Quedará dicho poliedro descompuesto en pirámides que tendrán por base las diferentes caras del poliedro y por altura comun el rádio de la esfera, porque la distancia del centro de una esfera á un plano tangente es igual al rádio (**370**).

Resulta de aquí que el volúmen de este poliedro tendrá por medida el producto de la suma de sus caras por el tercio del rádio, ó lo que es lo mismo, el producto de su superficie por el tercio del rádio.

Supongamos ahora que aumenta indefinidamente el número de caras de este poliedro : su volúmen se aproximará mas y mas al de la esfera y su superficie tendrá por límite la superficie de la esfera. Luego el volúmen de la esfera tendrá por medida el producto de su superficie por el tercio de su rádio. Q. E. L. D.

383. Corolario. Sea V el volúmen de una esfera, S su superficie, R su rádio, D su diámetro, y tendremos, segun el teorema precedente

$$V=S\times\frac{R}{3};$$

reemplazando S por su valor $4\pi R^2$ (**380**), tendremos :

$$V=4\pi R^2\times\frac{R}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3. \qquad [1]$$

Si reemplazamos S por πD^2 y R por $\frac{D}{2}$ resultará

$$V=\pi D^2\times\frac{D}{6}=\frac{1}{6}\pi D^3. \qquad [2]$$

Dedúcese inmediatamente de la fórmula [1] *que los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Aplicaciones. I. Hallar el volúmen de una esfera que tiene un metro de rádio.

Tenemos

$$V=\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi=4^{m.c},189790,$$

con un centímetro cúbico de diferencia.

II. Calcular el volúmen de una esfera cuya superficie es igual á cuatro metros cuadrados.

Tenemos $S=4\pi R^2$ y como $S=4$ resultará :

$$4=4\pi R^2;$$

de donde

$$R=\sqrt{\frac{1}{\pi}};$$

de otro lado

$$V=S\times\frac{R}{3};$$

luego

$$V=4\times\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{\pi}}=0^{m.c},75225,$$

ó sean 752 decímetros cúbicos y 250 centímetros cúbicos.

III. Calcular el volúmen del globo terrestre.

La circunferencia de un círculo máximo es igual á 4000 miriámetros : el rádio es igual á

$$\frac{C}{2\pi}=\frac{2000^{miriamet.}}{\pi};$$

y por consiguiente

$$V=\frac{4}{3}\pi\frac{2000^3}{\pi^3}=\frac{4\times8000000000}{3\pi^2}$$
$$=\frac{32000000000}{3}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)^2=1080731740^{mir.\ cub.}$$

IV. Calcular el rádio de una esfera cuyo volúmen es igual á un metro cúbico.

Tenemos en primer término,

$$1=\frac{4}{3}\pi R^3;$$

de donde se deduce

$$R^3=\frac{3}{4\pi}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi}=0,238732414;$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt[3]{0,238732414}=0^m,620,$$

con un milímetro de diferencia.

V. Una esfera tiene un volúmen de $3^{m.c},5$ y se pregunta cual será su superficie.

Tenemos

$$V=S\times\frac{R}{3}$$

y tambien

$$S=4\pi R^2$$

y sacando el valor de R de la primera ecuacion y trasladándole á la segunda resultará

$$S=4\pi\times\frac{9V^2}{S^2},$$

ó bien

$$S^3=36\pi V^2.$$

En el caso propuesto $V=3,5$; y por tanto

$$S^3=36\times 3,5^2\times\pi=1385,442360234,$$

y como consecuencia

$$S=\sqrt[3]{1385,442360234}=11^{\text{m·c}},15$$

con un decímetro cuadrado de diferencia.

VI. La relacion del diámetro del sol con el de la tierra es de 108 556. ¿Cuál será la relacion de los volúmenes de estos dos astros?

Dicha relacion es igual al cubo de la relacion de los rádios, es decir, al cubo de 108,556, lo cual da 1 279 268. El sol es, pues, cerca de 1 279 000 veces mayor que la tierra.

384. Teorema[1]. *El volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje trazado en su plano por uno de sus vértices tiene por medida la superficie descrita por el lado opuesto á dicho vértice, multiplicada por el tercio de la altura correspondiente.*

Fib. 259.

Distinguiremos 3 casos:

1.° El triángulo gira alrededor de uno de sus lados. Sea ABC el triángulo que gira alrededor de AC (fig. 259), BD, AE las alturas bajadas desde los vértices B y A. El volúmen engendrado por ABC es la suma de dos conos engendrados por los triángulos rectángulos ABD, CBD. Tendremos, pues (**358**).

$$\text{vol. ABC}=\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times AD+\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times DC=\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2\times AC$$
$$=\frac{1}{3}\pi BD\times BD\times AC;$$

1. Los teoremas que siguen hasta el fin del párrafo XXXVIII no existen en el programa oficial: hemos creido, sin embargo, que debíamos incluirlos en el texto por lo útiles que son para resolver un gran número de cuestiones interesantes.

pero $BD\times AC=BC\times AE$, porque estos dos productos representan cada uno el doble del área del triángulo ABC; luego

$$\text{vol. ABC}=\pi BD\times BC\times\frac{1}{3}AE;$$

además $\pi BD\times BC$ es la superficie lateral del cono CBD (**354**) y por tanto podemos decir

$$\text{vol. ABC}=\text{superf. BC}\times\frac{1}{3}AE. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

2.° El triángulo ABC gira alrededor del eje MN que pasa por el vértice A y encuentra al lado BC prolongado, en el punto

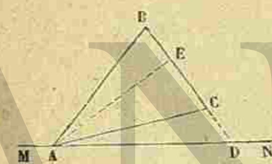

Fig. 260.

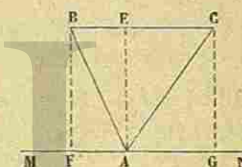

Fig. 261.

D (fig. 260). El volúmen engendrado por el triángulo ABC es la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos ABD y ACD, y por tanto tenemos (1.°)

$$\text{vol. ABD}=\text{superf. BD}\times\frac{1}{3}AE,$$
$$\text{vol. ACD}=\text{superf. CD}\times\frac{1}{3}AE;$$

luego

$$\text{vol. ABC}=(\text{sup. BD}-\text{sup. CD})\times\frac{1}{3}AE=\text{sup. BC}\times\frac{1}{3}AE.$$

3.° El eje MN es paralelo al lado BC (fig, 261). Tendremos, pues,

$$\text{vol. ABC}=\text{vol. FBCG}-\text{vol. ABF}-\text{vol. ACG};$$

ahora bien :

$$FBCG=\pi\overline{AE}^2\times BC;\quad vol.\,ABF=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2\times AF,$$

$$vol.\,ACG=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2\times AG;$$

de donde resulta que

$$vol.\,ABC=\frac{1}{3}\pi\overline{AE}^2(3BC-AF-AG)$$

$$=\frac{2}{3}\pi\overline{AE}^2\times BC=2\pi AE\times BC\times\frac{1}{3}AE,$$

y por último que

$$vol.\,ABC=superf.\,BC\times\frac{1}{3}AE.$$ Q. E. L. D.

385. Teorema. *El volúmen engendrado por el sector poligonal regular* OABCD *girando alrededor de un eje* MN *trazado en su plano por su centro, tiene por medida la superficie descrita por la línea quebrada regular* ABCD *multiplicada por el tercio del rádio del círculo inscrito* OE (fig. 262).

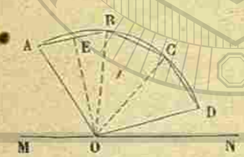

Fig. 262.

Sea ABCD una línea quebrada regular. El polígono OABCD es lo que se llama un *sector poligonal regular*. Trazamos los rádios OB, OC y valuamos los volúmenes engendrados por los triángulos OAB, OBC, OCD que tienen todos por altura OE. Tendremos en este caso (**384**):

$$vol.\,OAB=sup.\,AB\times\frac{1}{3}OE,$$

$$vol.\,OBC=sup.\,BC\times\frac{1}{3}OE,$$

$$vol.\,OCD=sup.\,CD\times\frac{1}{3}OE.$$

Reuniendo, tendrémos

$$vol.\,OABCD=(sup.\,AB+sup.\,BC+sup.\,CD)\times\frac{1}{3}OE$$

$$=superf.\,ABCD\times\frac{1}{3}OE.$$ Q. E. L. D.

386. Definicion. Se llama *sector esférico* el volúmen engendrado por un sector circular girando alrededor de un diámetro : el arco del sector engendra una zona que se llama la base del sector esférico.

387. Teorema. *El volúmen de un sector esférico es igual á la zona que le sirve de base multiplicada por el tercio de su rádio.*

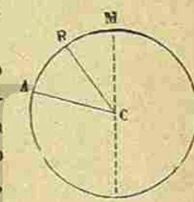

Fig. 263.

Sea OAB (fig. 263) el sector que girando alrededor de MN engendra el sector esférico. En el arco AB inscribimos una línea quebrada regular, y llamamos r el rádio del círculo inscrito en esta línea quebrada, y s la superficie que describe girando alrededor de MN. El sector poligonal regular engendra al mismo tiempo un volúmen cuya medida es (**385**).

$$s\times\frac{1}{3}r;$$

de donde se deduce fácilmente que el volúmen del sector esférico tiene por medida

$$zona\ AB\times\frac{1}{3}OA.$$

388. Corolario. Sea H la altura de la zona, R el rádio de la esfera, el volúmen del sector esférico será en este caso

$$2\pi RH\times\frac{1}{3}R=\frac{2}{3}\pi R^2H.$$

389. Observacion. La esfera entera puede considerarse como un sector esférico, bastando imaginarse para ello que el sector AOB que engendra el sector esférico aumenta hasta llegar á ser un semi-círculo. La zona que servia de base á dicho sector será ahora la superficie engendrada por la semi-circunferencia MAN, es decir, la superficie de toda la esfera. De aquí concluimos que el volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio de su rádio, que es lo mismo que queda demostrado por otro procedimiento (**382**).

APÉNDICE

ELIPSE Y PARÁBOLA

§ XXXIX. Definicion de la elipse, trazado de la curva por puntos y de un movimiento contínuo. — Definición de la parábola, trazado de una porcion de la curva por puntos y de un movimiento contínuo.

390. Definiciones. La *elipse* es una curva de tal naturaleza que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos son los *focos* de la elipse y las dos líneas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos se llaman *rádios vectores* de este punto.

391. Problema. *Trazar una elipse mediante puntos conociendo los dos focos y la suma constante de los rádios vectores de cada punto.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 264). A partir del punto F to-

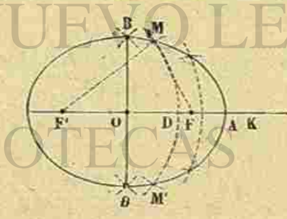

Fig. 264.

mamos sobre la recta F′F una longitud F′K igual á la suma de los rádios vectores. Desde el foco F′ como centro, con diferencomo un sector esférico, bastando imaginarse para ello que el sector AOB que engendra el sector esférico aumenta hasta llegar á ser un semi-círculo. La zona que servia de base á dicho sector será ahora la superficie engendrada por la semi-circunferencia MAN, es decir, la superficie de toda la esfera. De aquí concluimos que el volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por el tercio de su rádio, que es lo mismo que queda demostrado por otro procedimiento (**382**).

APÉNDICE

ELIPSE Y PARÁBOLA

§ XXXIX. Definicion de la elipse, trazado de la curva por puntos y de un movimiento contínuo. — Definición de la parábola, trazado de una porcion de la curva por puntos y de un movimiento contínuo.

390. Definiciones. La *elipse* es una curva de tal naturaleza que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos son los *focos* de la elipse y las dos líneas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos se llaman *rádios vectores* de este punto.

391. Problema. *Trazar una elipse mediante puntos conociendo los dos focos y la suma constante de los rádios vectores de cada punto.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 264). A partir del punto F to-

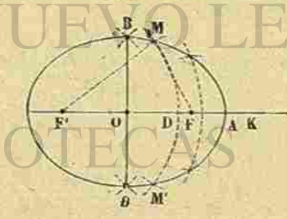

Fig. 264.

mamos sobre la recta F′F una longitud F′K igual á la suma de los rádios vectores. Desde el foco F′ como centro, con diferentes rádios describimos una série de arcos de círculo. Sea D el punto en que uno de ellos corta á la recta F'F. Desde el foco F como centro, tomando á DK como rádio, describimos otro arco de círculo que corte al primero en dos puntos M y M', que pertenecen á la elipse, porque la suma de las distancias MF y MF' del punto M á los dos focos es igual á $F'D + DK$, es decir, á la longitud dada F'K, y lo mismo sucede con el punto M'.

Así podrán determinarse cuantos puntos se quieran de la curva y uniéndolos por un trazo continuo, tendremos la elipse.

392. Observacion. I. La longitud F'K es necesariamente mayor que FF', puesto que esta longitud representa la suma de las distancias de un punto de la elipse á los dos puntos F y F'. Ahora bien, para que las dos circunferencias descritas desde los puntos F y F' como centros se lleguen á cortar, es necesario y basta que la distancia FF' sea mayor que la diferencia de los rádios, es decir, que resulte :

$$FF' > F'D - DK,$$

ó

$$F'D < FF' + DK;$$

y reemplazando en las desigualdades precedentes DK por $F'K - F'D$, tenemos

$$F'D < FF' + F'K - F'D$$

y tambien

$$2F'D < FF' + F'K;$$

y en fin, si A es el punto medio de la distancia FK, $FF' + F'K$ es igual al doble de F'A, y resultará

$$2F'D < 2F'A, \quad \text{ó} \quad F'D < F'A.$$

Luego para que los círculos se corten, es necesario y basta que el punto D esté comprendido entre el punto F y el punto A.

393. Observacion. II. El punto A es un punto de la elipse porque $AF + AF' = AK + AF' = F'K$. Tomemos á la izquierda

del punto F' sobre FF' una longitud F'A' igual á FA. El punto A' será igualmente un punto de la elipse, porque $A'F + A'F'$ será igual á $AF + AF'$ ó á F'K. Tambien podrán obtenerse otros dos puntos importantes B y B' de la elipse describiendo desde los focos F y F' dos arcos de círculo, teniendo ambos por rádio $\frac{1}{2}$ FK. La línea BB' será perpendicular á FF' en su punto medio.

394. Problema. *Trazar la elipse mediante un movimiento continuo.*

Se fijan en los dos focos F y F' (fig. 265) dos puntas á las que se unen los extremos de un hilo que tenga una longitud igual á la suma de los rádios vectores que nos dan. Se tiende luego el hilo mediante un lápiz ó una punta que se mueve en el plano, cuidando que el hilo esté constantemente extendido, en cuyo caso la punta describe la elipse, porque en cada una de sus posiciones el hilo contiene la suma de los rádios vectores $MF + MF'$ y es igual á la longitud constante de sí mismo.

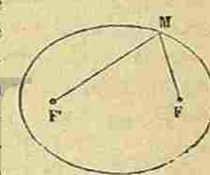

Fig. 265.

Se descubre por lo dicho que la elipse es una curva cerrada.

Observacion. De este medio se valen los jardineros para trazar elipses sobre el terreno, lo cual ha valido á dicha curva el nombre de *óvalo de jardineros*.

395. Definiciones. Se llama *eje* de una curva una recta que la divide en dos partes simétricas, es decir, en dos partes, que se aplican exactamente la una sobre la otra, cuando se hace girar la primera alrededor del eje para rebatirla sobre la segunda : un diámetro cualquiera de una circunferencia es un eje de esta curva.

Cuando una curva está cortada por su eje, cada uno de los puntos de interseccion de la curva y del eje es un vértice de la curva.

Se llama *centro* de una curva un punto que divide en dos partes iguales todas las cuerdas de la curva que pasan por este punto.

396. Teorema. *La elipse tiene por ejes la recta que une los dos focos, y la perpendicular elevada por el punto medio de esta recta : además tiene por centro el medio de la distancia focal.*

Sean F y F′ los dos focos (fig. 266), O el medio de su distancia, BB′ la perpendicular elevada por el punto medio de FF′, y M un punto cualquiera de la curva.


Fig. 266.

Si la parte superior de la figura gira alrededor de FF′ para rebatirse sobre la parte inferior, el punto M viene á parar á M′ y tenemos evidentemente

$$M'F + M'F' = MF + MF';$$

luego el punto M′ es un punto de la curva, y por tanto á todo punto M de la elipse corresponde un punto M′ simétrico con relacion á FF′, ó en otros términos, FF′ es un eje de la elipse.

Hagamos girar igualmente la porcion de la derecha de la figura alrededor de BB′ para rebatirla sobre la porcion de la izquierda. El punto F caerá en F′ y el punto M en un punto como M″, respecto del cual decimos que pertenece á la elipse. En efecto, segun la construccion, M″F′ = MF y el ángulo M″F′F es igual á MFF′. Por consiguiente, los dos triángulos MFF′ y M″F′F son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales, de donde resulta que M″F = MF′. Tendrémos, pues,

$$M''F + M''F' = MF' + MF;$$

lo que prueba que el punto M″, simétrico del punto M pertenece á la elipse. A todo punto M de la elipse corresponde otro punto M″ de dicha curva, simétrico del primero con relacion á BB′, ó en otros términos, BB′ es un eje de la curva.

Decimos en fin que el punto O es el centro de esta curva. En

efecto, el cuadrilátero M′FM″F′ es un paralelógramo que tiene los lados opuestos iguales, y por tanto la diagonal M′M″ pasa por el punto medio O de la otra diagonal FF′ y está dividida por este punto en dos partes iguales. Siendo el punto M′ un punto cualquiera de la elipse, se ve por ello que el punto O divide en dos partes iguales todas las cuerdas que pasan por él, y es por tanto el centro de la elipse.

397. Corolario. La elipse tiene cuatro vértices que son precisamente los puntos A, A′, B, B′ sobre los cuales hemos llamado la atencion al construir la elipse, mediante puntos.

398. Observaciones. El eje AA′ (fig. 267) es igual á la suma de los rádios vectores de un punto cualquiera de la curva. En efecto, tenemos

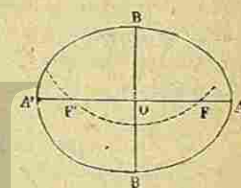
Fig. 267.

$$AA' = AF' + A'F' = AF' + AF,$$

lo cual prueba que dicho eje es igual á la suma de los rádios vectores del punto A. Llamaremos a la mitad de la longitud de este eje, es decir, la distancia del centro O al vértice A, y c la mitad de la distancia focal, es decir OF. Estas dos cantidades bastan para determinar la elipse.

Busquemos ahora la longitud del otro eje, ó mejor de su mitad OB, que llamarémos b. El punto B está equidistante de los focos F y F′, y como la suma de sus rádios vectores es igual á $2a$, la distancia BF es igual á a. Ahora bien : en el triángulo rectángulo BOF tendrémos

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{ó} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Esta igualdad muestra que b es menor que a, por cuya razon AA′ se llama el *eje mayor* de la elipse y BB′ el *eje menor*. Los focos están situados en el eje mayor.

Una elipse está determinada cuando se dan estos dos ejes AA′ y BB′, porque en este caso se obtendrán los focos describiendo desde el vértice B como centro, con un rádio igual á a un arco de círculo que encontrará á AA′ en dos puntos F y F′ que serán los focos.

Se llama *excentricidad* de una elipse la relacion de la distancia focal FF′ con el eje mayor AA′, esto es, la relacion $\frac{c}{a}$. La elipse es un óvalo mas ó menos alargado, y su forma depende de la excentricidad. Si la excentricidad es nula, los dos focos se confunden con el centro y la elipse viene á ser un círculo; si la excentricidad es muy pequeña, los dos focos están muy próximos, los dos ejes son casi iguales; la curva es redondeada y difiere poco de una circunferencia, lo cual tiene lugar en las órbitas de los planetas. A medida que la excentricidad aumenta, la diferencia de los ejes aumenta tambien, la curva se aplasta cada vez mas y tiende á confundirse con su eje mayor, cosa que ocurre cuando la excentricidad es igual á la unidad.

399. Definiciones. La *parábola* es una curva de tal naturaleza, que cada uno de sus puntos está igualmente distante de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

La distancia del foco á la directriz se llama *parámetro* de la parábola.

La línea que une un punto de la parábola con el foco se llama *rádio vector* de este punto.

Fig. 268.

400. *Construir la parábola mediante puntos conociendo el foco y la directriz.*

Sea F el foco, DD′ la directriz (fig. 268), FD una perpendicular bajada desde el foco á la directriz. El punto medio A de la distancia FD es un punto de la parábola. Por un punto P tomado á la derecha del punto A trazamos una paralela á la directriz y desde el punto F como centro, con un rádio

igual á DP describimos un círculo que determina sobre la paralela dos puntos M y N de la parábola, porque MF = DP = MH. Repitiendo esta construccion se tendrán tantos puntos como se deseen de la parábola. Para que la construccion sea posible es necesario que FP < DP lo cual exige que el punto P esté á la derecha del punto A.

Resulta de la construccion que la curva no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente alejándose de la directriz.

401. Problema. *Trazar la parábola con un movimiento continuo.*

A lo largo de la directriz DD′ se aplica una regla (fig. 269) y contra esta regla se apoya uno de los lados del ángulo recto de una escuadra GHK. AL punto G se halla unido el extremo de un hilo cuya otra extremidad está en el foco F y cuya longitud es igual al lado GH de la escuadra. Se hace resbalar la escuadra á lo largo de la regla manteniendo con un lápiz el hilo aplicado sobre GH. El lápiz trazará un arco de parábola, porque tendremos para el punto M, por ejemplo,

$$GM + MF = GH$$

de donde

Fig. 269.

$$MF = GH - GM = MH$$

El punto M está, pues, igualmente distante del foco y de la directriz, y por consiguiente pertenece á la parábola.

402. Observacion. La perpendicular FD bajada desde el foco sobre la directriz es un eje de la parábola y el punto A es el vértice.

La demostracion es análoga á la que hemos dado para el eje mayor de la elipse (**396**). Puede por lo demás observarse que en la construccion de la curva por puntos, los dos M y M′ que se obtienen á la vez son evidentemente simétricos con relacion á FD, y por consiguiente, á cada punto M de la parábola corresponde otro punto M de esta misma curva, simétrico del primero con relacion á la línea FD, ó en otros términos, la línea FD es un eje de la parábola.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO VIII

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. El volúmen de un tronco de cono es igual á la suma de un cilindro que tenga la misma altura que el tronco y por base la seccion paralela dada á igual distancia de las dos bases, y de un cono que tenga tambien la misma altura que el tronco y por base un círculo cuyo rádio es igual á la semidiferencia de los rádios de las dos bases del tronco.

2. Cuando la apotema de un tronco de cono es igual á la suma de los rádios de las bases, la media geométrica entre estos rádios da la mitad de la altura, y se obtiene el volúmen multiplicando la superficie total por la sexta parte de dicha altura.

3. Por cuatro puntos que no están situados en el mismo plano puede hacerse pasar una esfera, pero no mas de una.

4. Si un cilindro está circunscrito á una esfera y se le corta por planos paralelos al círculo máximo de contacto, la zona comprendida entre estos dos planos es equivalente á la porcion de la superficie cilíndrica comprendida entre estos mismos planos.

5. Un casquete esférico es equivalente al círculo que tiene por rádio la cuerda del arco que engendra el casquete.

6. El volúmen del cilindro circunscrito á una esfera es $\frac{3}{2}$ del de la esfera, y la superficie total es igualmente $\frac{3}{2}$ del de la esfera.

7. Un cono está circunscrito á una esfera dada, y su altura

términos, el volúmen de la pirámide es el límite de la suma de los volúmenes de estos prismas, cuando su número aumenta mas y mas. Ahora bien, por muy grande que sea este número, la suma de los prismas inscritos en la primera pirámide es igual á la suma de los prismas inscritos en la segunda. Luego las dos pirámides son equivalentes. Q. E. L. D.

334. Teorema. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura* (fig. 238).

1.° Consideremos en primer lugar una pirámide triangular SABC. Sobre ABC como base y BS como arista construimos el prisma ABCESD, que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide. Dicho prisma se compone de la pirámide SABC y de la pirámide cuadrangular SACED. Esta última se descompone en dos pirámides triangulares SACE, SDCE que tienen bases iguales ACE, DCE y la misma altura, por lo cual son equivalentes (**333**). Además la pirámide SDCE puede considerarse teniendo por base SDE y por vértice el punto C, en cuyo caso tiene la misma base y la misma altura que la pirámide SABC, y por consecuencia es equivalente á ella. De esto resulta que las tres pirámides que componen el prisma son equivalentes, y la pirámide SABC es el tercio del prisma que tiene la misma base y altura que ella. De aquí se deduce finalmente (**334**) que la pirámide tiene por medida de su volúmen el tercio del producto de su base por su altura.

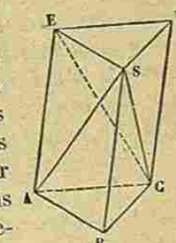

Fig. 238.

2.° Sea en segundo lugar la pirámide poligonal SABCDE (fig. 239). Por la arista SE de esta pirámide y por las aristas SB y SC se trazan planos que la descompongan en pirámides triangulares; que tengan todas por altura la

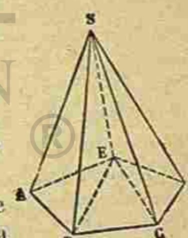

Fig. 239.

de la pirámide en cuestion. Cada una de estas pirámides triangulares tiene por medida el producto de su base por el tercio de la altura comun; luego la pirámide total tiene por medida la suma de las bases triangulares multiplicada por el tercio de la altura, es decir, el tercio del producto de la base poligonal ABCDE por la altura. Q. E. L. D.

335. Observacion. Un poliedro cualquiera puede siempre descomponerse en pirámides, imaginando, por ejemplo, un punto tomado en su interior que se una con todos los vértices. Calculando el volúmen de cada pirámide, se obtendrá el volúmen del poliedro.

336. Teorema. *Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides que tengan por altura la del tronco y por bases, la primera la base inferior del tronco, la segunda la base superior y la tercera una media proporcional entre estas dos bases.*

1.° El tronco de pirámide es triangular (fig. 240). Descomponemos este sólido en pirámides, y trazamos en primer lugar el plano EAC que separa del poliedro la pirámide EABC, que tiene por base la inferior del tronco ABC y por altura la del tronco: esta es la primera de las pirámides del enunciado.

Fig. 240.

Queda la pirámide cuadrangular EACFD, que descomponemos en dos pirámides triangulares ECFD, EADC. La ECFD puede considerarse teniendo por vértice el punto C y por base DEF, es decir, la base superior del tronco: la altura es en este caso la del tronco, y esta es la segunda pirámide del enunciado.

Consideremos, por último, la pirámide EADC. Por el putno E trazamos EG paralela á AD, y por tanto, al plano ADC. Las dos pirámides EADC, GADC son equivalentes, por tener la misma base y la misma altura. La pirámide GADC puede considerarse teniendo por vértice el punto D y por base GAC. Su al-

es doble del diámetro de la esfera. Demostrar que su volúmen es doble del de la esfera y que su superficie total es doble de la de la esfera.

8. En un paralelipípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c, se empilan esferas iguales cuyo diámetro está contenido m veces en a, n veces en b y p veces en c. Demostrar que si m, n y p varian permaneciendo enteros, la suma de los volúmenes de todas estas esferas permanece constante.

9. Los volúmenes engendrados por un paralelógramo que gira sucesivamente alrededor de dos lados adyacentes, están en razon inversa de las longitudes de dichos lados.

10. El volúmen engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta situada en su plano y exterior al triángulo es igual al producto del área del triángulo por la circunferencia que describe el punto en que se cortan las medianas del triángulo.

11. El volúmen engendrado por un segmento de círculo que gira alrededor de un diámetro es igual á la sexta parte de un cilindro que tenga por rádio la cuerda del segmento y por altura la proyeccion de esta cuerda sobre el eje.

12. Dada una série de círculos concéntricos, trazamos en estos círculos cuerdas iguales todas entre sí y paralelas á un diámetro comun. Los volúmenes engendrados por los segmentos correspondientes girando alrededor del diámetro comun son equivalentes.

13. El volúmen de un segmento de esfera es igual á la suma de un cilindro que tenga la misma altura que el segmento y por base la semi-suma de las bases del segmento, y de una esfera que tenga por diámetro la altura del segmento. (Se llama *segmento de esfera* la porcion de esta comprendida entre dos planos paralelos.)

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Calcular el volúmen engendrado por un triángulo equilátero girando alrededor de uno de sus lados.

2. Calcular el volúmen engendrado por un octógono regular que gira alrededor de uno de sus lados.

3. Dividir el área lateral de un cono de revolucion en partes equivalentes por planos paralelos á las bases.

4. Conociendo el volúmen de un tronco de cono de revolucion, una de sus bases y la altura, hallar la otra base.

5. Un cilindro y un tronco de cono tienen una base comun y la misma altura : ¿cuál será la relacion de las dos bases del tronco de cono para que el volúmen del cilindro sea el doble del del tronco de cono?

6. Dado el cuadrado ABCD y la recta AX trazada por el vértice A en el plano del cuadrado, se pide que construyamos sobre el lado BC como base el triángulo isósceles BCM, de tal modo, que este triángulo y el cuadrado dado engendren volúmenes equivalentes girando alrededor de la recta AX. (Concurso general de la clase de Retórica, 1867.)

7. En un cubo dado se inscribe una esfera, y en ella se inscribe un segundo cubo : se pide la relacion de los volúmenes de estos dos cubos. (Concurso general de Filosofía, 1865.)

8. ¿Qué condiciones deben reunir dos círculos que no están en un mismo plano para que pertenezcan á una misma esfera?

9. Hallar el lugar de los centros de las secciones, dadas en una esfera, mediante todos los planos que pasen por una recta dada.

10. Por una recta dada trazar un plano tangente á una esfera tambien dada.

11. Dada una esfera y un plano, consideramos cada punto del plano como el vértice de un cono circunscrito á la esfera, y que tiene por consiguiente como base un círculo mínimo de esta esfera. Se pide que hallemos el lugar geométrico de los centros de los círculos de esta manera determinados. (Concurso general de la clase de Retórica, 1866.)

12. Dadas dos esferas se inscribe en la primera un cono recto de base circular cuyo lado sea igual al diámetro de la base y se circunscribe á la segunda un cilindro. Resulta que el volúmen del cono es la décimaoctava parte del del cilindro, y se

pide la relacion que hay entre los rádios de las dos esferas. (Concurso general de la clase de Retórica, 1873.)

13. En una esfera de un rádio conocido consideramos una zona de dos bases : es además conocida el área de esta zona y la distancia de una de sus bases al centro. Se desea saber cuál sea el rádio de la otra base.

14. Inscribir en una esfera un cono cuya área lateral equivalga á la del casquete esférico terminado en el mismo círculo.

15. Cortar una esfera por un plano tal que el área determinada por dicho plano equivalga á la diferencia de los dos casquetes en que divide la esfera.

16. Un triángulo ABC gira alrededor de una recta dada pasando por el vértice A, y se pide que tracemos por este vértice una recta AD de tal naturaleza, que los volúmenes engendrados por los triángulos ABD y ACD sean equivalentes.

17. Trazar una paralela á la base de un triángulo, de modo que los volúmenes engendrados por las dos partes del triángulo girando alrededor de su base sean equivalentes.

18. Circunscribir á una esfera dada un tronco de cono cuyo volúmen esté con el de la esfera en una relacion dada. Hallar la relacion de la superficie total del tronco de cono con la de la esfera. (Concurso general de la clase de Retórica, 1869.)

19. Un triángulo equilátero ABC, cuyo lado es igual á a gira alrededor de una recta MN situada en su plano y paralela á uno de sus lados BC. Cuál debe ser la distancia de las dos paralelas BC y MN para que el volúmen engendrado por el triángulo, girando alrededor de MN sea igual á cuatro veces el volúmen engendrado por el mismo triángulo girando alrededor de su lado BC. (Concurso general de la clase de Filosofía, 1870.)

20. Dado un semi-círculo AB, se pide que hallemos sobre su circunferencia un punto N de tal naturaleza, que si se traza la tangente MP hasta que encuentre el diámetro AB prolongado, si se une el punto M con el centro O y se hace girar luego la figura alrededor de AB, los volúmenes engendrados por el sector AOM y por el triángulo OMP estén entre sí en una

relacion dada. (Concurso general de la clase de Retórica, 1870.)

21. Dada una esfera OA, determinar otra segunda esfera O'A tangente interiormente á la primera en A y de tal naturaleza, que si se le traza un plano tangente en A, y que si, siguiendo el círculo de interseccion de este plano con la esfera dada se circunscribe un cono á dicha esfera, resulta que el volúmen comprendido entre la superficie lateral del cono y el de la zona BAC sea igual á m veces el volúmen de la esfera O'A. (Concurso general de la clase de Retórica, 1868.)

22. El diámetro de un círculo es de 4 metros : una cuerda paralela á este diámetro es de 2. ¿Cuál será la superficie engendrada por esta cuerda, girando alrededor del diámetro?

23. Tenemos un depósito cilíndrico de $2^m,40$ de profundidad, y debe contener 1200 litros de agua. ¿Cuál será su diámetro?

24. El lado de un cono es de $28^m,5$ y la superficie de su base de 6 metros cuadrados. ¿Cuál será la superficie del círculo cuyo plano recto dista del de la base $2^m,75$?

25. Calcular las dimensiones del doble decálitro empleado para los áridos, sabiendo que su diámetro es igual á su altura.

26. ¿Cuál será el diámetro de un hilo de platino que pesa 28 gramos por metro de longitud, sabiendo que la densidad del platino es 22,06?

27. La superficie de un cilindro recto es a; su volúmen, b. Calcular el rádio de la base y la altura de este cilindro.

28. Hacemos girar un triángulo equilátero alrededor de uno de sus lados, y se nota que la superficie engendrada equivale á la superficie total de un cilindro de $0^m,6$ de rádio y $8^m,8$ de altura. ¿Cuál será la longitud del lado de aquel triángulo? (Concurso general de la clase de Filosofía, 1868.)

29. Calcular el volúmen engendrado por un rombo de $3^m,79$ de lado, girando alrededor de una de sus diagonales que tiene 6 metros de longitud.

30. Por un punto S tomado en la prolongacion del diámetro de un círculo, se traza una tangente SA y se hace girar la figura alrededor del diámetro. El círculo describe una esfera,

y la línea SA un cono cuya base es el círculo descrito por la perpendicular AP al diámetro. ¿Cuál será la superficie y el volúmen de este cono, teniendo en cuenta que el rádio del círculo es de $0^m,035$ y la distancia del punto S al centro de $0^m,125$?

31. Un cono de corcho tiene $0^m,6$ de rádio en la base, y $0^m,8$ de altura, y se sumerje en el agua por su vértice. ¿Qué cantidad, contada sobre su altura, debe sumergirse suponiendo que la densidad del corcho es de 0,24?

32. La altura de un tronco de cono es h; los diámetros de sus dos bases son 4 y 22 decímetros. ¿Qué diámetro será menester dar á un cilindro de la misma altura h para que su volúmen fuera equivalente al del tronco de cono?

33. Un vaso tiene la forma de un tronco de cono cuya base inferior tiene 23 centímetros de diámetro. La superficie superior del agua contenida en dicho vaso es un círculo de 26 centímetros de diámetro y la profundidad de la misma de $14^c,4$. Se deja caer un cubo de piedra de 3 centímetros de lado. ¿A qué altura se elevará el nivel del agua?

34. Un vaso de forma cónica tiene la capacidad de un litro y un diámetro de 25 centímetros, y está lleno de agua y mercurio. El peso de los dos líquidos es el mismo, y se pregunta cuál será el espesor de la capa de agua y la del mercurio, siendo la densidad de este 13,6.

35. Un cristal tiene la forma de un tronco de cono cuyo fondo tiene $0^m,04$ de diámetro, el borde superior $0^m,07$ y la altura $0^m,10$. Dicho cristal contiene un metal en fusion cuya superficie superior es de $0^m,06$ de diámetro, y se desea verter el metal en un molde esférico. ¿Cuál debe ser el rádio de este molde para que el metal le llene enteramente?

36. El rádio de la superficie de los mares, suponiéndola esférica, es de 6 366 198 metros. ¿A qué distancia puede extenderse en alta mar la mirada de un observador colocado á 50 metros sobre el nivel del mar?

37. Una bola de vidrio pesa un kilógramo. ¿Cuál será la superficie exterior de dicha bola, siendo la densidad del vidrio 2,38?

38. Hallar el volúmen de una esfera en la cual se conoce la altura y la superficie de una zona. La altura es de $0^{m},47$, y la superficie de dos metros cuadrados.

39. Un pedazo de cobre de forma cúbica y que pesa $1^{kil},75$ se coloca en un torno y se le reduce á una esfera cuyo diámetro es igual á $0^{m},75$ de la longitud del lado del cubo primitivo. La densidad del cobre es 8,85. ¿Cuál será el peso de la pieza de cobre obtenida?

40. Una esfera, un cilindro y un cono tienen volúmenes equivalentes. La esfera, la base del cilindro y la del cono tienen además diámetros iguales entre sí y á 3 decimetros. ¿Cuál será la altura del cilindro y la del cono?

41. Se desea hacer con tafetan barnizado que pese 250 gramos por metro cuadrado un globo esférico para contener 904 metros cúbicos de gas. ¿Cuál será el peso del tafetan empleado?

42. AB es el diámetro de un semi-círculo. Tomamos un punto C sobre este diámetro y sobre cada uno de los segmentos AC y BC como diámetro, describimos un semi-círculo. ¿Cuál será el volúmen descrito por la superficie comprendida entre las tres semi-circunferencias cuando la figura haya dado una vuelta entera alrededor de AB?

FIN

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

NOCIONES PRELIMINARES

LIBRO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA

38. Hallar el volúmen de una esfera en la cual se conoce la altura y la superficie de una zona. La altura es de $0^{m},47$, y la superficie de dos metros cuadrados.

39. Un pedazo de cobre de forma cúbica y que pesa $1^{kil},75$ se coloca en un torno y se le reduce á una esfera cuyo diámetro es igual á $0^{m},75$ de la longitud del lado del cubo primitivo. La densidad del cobre es 8,85. ¿Cuál será el peso de la pieza de cobre obtenida?

40. Una esfera, un cilindro y un cono tienen volúmenes equivalentes. La esfera, la base del cilindro y la del cono tienen además diámetros iguales entre sí y á 3 decimetros. ¿Cuál será la altura del cilindro y la del cono?

41. Se desea hacer con tafetan barnizado que pese 250 gramos por metro cuadrado un globo esférico para contener 904 metros cúbicos de gas. ¿Cuál será el peso del tafetan empleado?

42. AB es el diámetro de un semi-círculo. Tomamos un punto C sobre este diámetro y sobre cada uno de los segmentos AC y BC como diámetro, describimos un semi-círculo. ¿Cuál será el volúmen descrito por la superficie comprendida entre las tres semi-circunferencias cuando la figura haya dado una vuelta entera alrededor de AB?

FIN

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA PLANA

NOCIONES PRELIMINARES

LIBRO PRIMERO

DE LA LÍNEA RECTA

LIBRO II

DE LA CIRCUNFERENCIA

LIBRO III

DE LAS ÁREAS

LIBRO IV

LAS FIGURAS SEMEJANTES

LIBRO V

LOS POLÍGONOS REGULARES Y EL CÍRCULO

SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

LIBRO VI

EL PLANO Y LA LÍNEA RECTA

APÉNDICE AL LIBRO VI

LEVANTAMIENTO DE PLANOS Y NIVELACION

LIBRO VII

LOS POLIEDROS

LIBRO VIII

CUERPOS REDONDOS

APÉNDICE

ELIPSE Y PARÁBOLA

FIN DEL ÍNDICE

12940. — Imprenta A. Lahure, calle de Fleurus, 9, Paris.

Antonio L. Treviño