por tanto iguales (**46**) y los lados ME y MF opuestos á ángulos iguales, son tambien iguales. Q. E. L. D.

2.º Sea M un punto tomado en el interior del ángulo BAC, de tal suerte que las perpendiculares ME y MF bajadas desde este punto sobre los lados AB y AC del ángulo sean iguales; y decimos que el punto M pertenece á la bisectriz del ángulo, BAC (fig. 27). Para ello trazamos la recta MA, y los dos triángulos rectángulos MAE, MAF que tienen la hipotenusa MA comun y el lado ME = MF por el supuesto, son iguales (**47**) y por tanto el ángulo MAE opuesto al lado ME es igual al ángulo MAF opuesto al lado MF, ó en otros términos, la línea MA es la bisectriz del ángulo BAC. Q. E. L. D.

51. Corolario. *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que, situados en el interior del ángulo, están equidistantes de sus lados.*

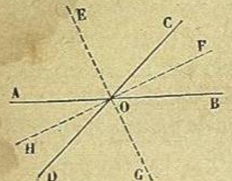

Fig. 28.

52. Observacion. *Si dos rectas indefinidas* AB *y* CD (fig. 28) *se cortan en un punto* O, *el lugar geométrico de los puntos igualmente distantes de estas dos rectas se compone de las dos bisectrices perpendiculares* EG *y* FH *que dividen en dos partes iguales los cuatro ángulos formados por las rectas* AB *y* CD (**27**).

§ V. Rectas paralelas. — Suma de los ángulos de un triángulo, de un polígono cualquiera. — Propiedades de los paralelógramos.

53. Definicion. Dos líneas son *paralelas* cuando, al estar situadas en un mismo plano, no se encuentran nunca, sea cualquiera la distancia que se prolonguen.

54. Teorema. *Dos perpendiculares á una misma recta son paralelas.*

Con efecto: desde un punto no puede trazarse mas que una perpendicular á una recta, luego dichas perpendiculares no podrán encontrarse, y por tanto serán paralelas. Q. E. L. D.

55. Teorema. *Por un punto tomado fuera de una recta puede trazarse una paralela á aquella, y no se puede trazar mas que una.*

1.º Sea AB la recta dada, C el punto exterior á dicha recta (fig. 29). Del punto C trazo CD perpendicular á AB, y la CE perpendicular á CD. La recta CE es paralela á AB, porque estas dos líneas son perpendiculares á una misma recta CD.

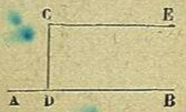

Fig. 29.

2.º Se admite sin demonstracion *que por un punto no se puede trazar mas que una paralela á otra recta dada.*

Esta proposicion que no se puede demostrar se llama por esta razon el Postulado de la teoría de las paralelas ó de Euclides

56. Corolario. *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí* (fig. 30).

Sean A y B dos rectas paralelas á la recta C, y tendrémos, que supuesto que por un mismo punto no pueden trazarse dos paralelas á una tercera, las dos líneas A y B no podrán encontrarse, y por tanto serán paralelas entre sí. Q. E. L. D.

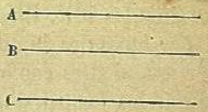

Fig. 30.

57. Teorema. *Si dos líneas son paralelas, toda recta que sea perpendicular á una de ellas lo será á la otra* (fig. 31).

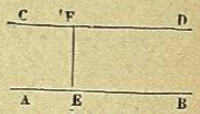

Fig. 31.

Sean AB y CD dos paralelas y EF perpendicular á AB, y decimos, que por serlo á AB lo será tambien á CD. Desde luego dicha recta no es paralela á CD puesto que por el punto E no puede trazarse á CD más que una sola paralela que es AB. Sea ahora F el punto de encuentro de CD y de EF, y por el punto F tracemos una perpendicular á EF y será paralela á AB (**54**); luego coincidirá con CD (**55**) y CD es perpendicular á EF. Q. E. L. D

58. Teorema. *Cuando dos rectas paralelas están cortadas por una secante, los cuatro ángulos agudos formados son iguales entre sí, y lo mismo los cuatro ángulos obtusos* (fig. 32).

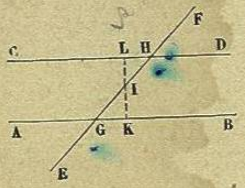

Fig. 32.

Sean AB, CD dos paralelas, EF, una secante que las corta en los puntos GH; la línea EF forma con cada una de estas rectas cuatro ángulos de los cuales dos son agudos y dos obtusos, salvo en el caso particular en que EF sea perpendicular á los dos paralelas. Esto sentado, consideremos primero los dos ángulos agudos CHG, HGB, que decimos que son iguales. Con efecto: por el medio I de GH tracemos una perpendicular á AB, que será por ello perpendicular á CD (**37**). En este caso los dos triángulos IGK, IHL son rectángulos que tienen la hipotenusa IG = IH por construccion y los ángulos en I iguales por opuestos por el vértice, y por tanto son iguales (**46**) é iguales los ángulos IGK, IHL.

Los otros dos ángulos agudos son respectivamente iguales á los precedentes como opuestos por el vértice, y por lo mismo lo son los cuatro ángulos agudos. Cada ángulo obtuso es el suplemento de uno de los ángulos agudos (**21**) que siendo iguales, resultan iguales tambien los obtusos.

59. Observacion. Se ha dado nombre particular á los ángulos que una secante forma con dos rectas. Sean AB, CD las dos rectas y EF la secante (fig. 33).

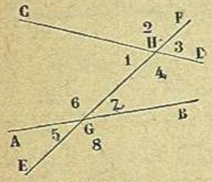

Fig. 33.

Los dos ángulos no adyacentes situados en el interior de las dos líneas y á diverso lado de la secante, se llaman ángulos *alternos internos*, como los ángulos 1 y 7, 4 y 6.

Los ángulos no adyacentes situados fuera de las rectas y á diverso lado de la secante se llaman *alternos externos*, como los 2 y 8, 3 y 5.

Los dos ángulos no adyacentes situados al mismo lado de la secante el uno entre las dos rectas y el otro fuera, se llaman *correspondientes*, como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

Dos ángulos situados entre las dos rectas y á un mismo lado de la secante se llaman *interiores de un mismo lado*, como los ángulos 1 y 6, 7 y 4; y exteriores los 3 y 8, 2 y 5.

60. Corolario. Con referencia á la figura 32 el teorema precedente puede sin duda enunciarse en los siguientes términos:

Cuando dos paralelas son cortadas por una secante.

1.° *Los ángulos alternos internos son iguales;*

2.° *Los ángulos alternos externos también lo son;*

3.° *Los ángulos correspondientes lo son también;*

4.° *Los ángulos interiores de un mismo lado son suplementarios.*

5.° *También son suplementarios los exteriores de un mismo lado.*

61. Teorema. Recíprocamente: *si dos rectas forman con una secante:*

Angulos alternos internos iguales;

Angulos alternos externos iguales;

Angulos interiores de un mismo lado suplementarios;

Angulos exteriores de un mismo lado suplementarios;

Dichas dos rectas son paralelas (fig. 34).

Supongamos, por ejemplo, que los ángulos alternos internos CHG, HGB sean iguales, y decimos que las dos rectas AB, CD son paralelas. En efecto: si imaginamos que se traza por el punto H una paralela á AB; esta línea deberá formar con la secante HG y sobre esta línea un ángulo igual al ángulo HGB porque los dos serán alternos internos. La recta HC llena esta condicion, nd esto que, segun el supuesto

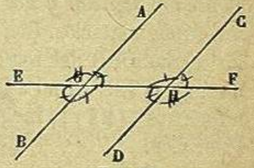

Fig. 34.

el ángulo GHC es igual al ángulo HGB; luego la línea HC es precisamente la paralela á AB, trazada por el punto H. Q. E. L. D.

El mismo razonamiento se aplicaria sin duda á los demás casos del teorema.

62. Teorema. *Los ángulos que tienen los lados paralelos son iguales, ó suplementarios* (fig. 35).

Hay tres casos diversos, que distinguir :

1.º Los dos ángulos BAC, EDF tienen los lados paralelos y *dirigidos* en un *mismo sentido;* y decimos que son iguales. En efecto : las dos rectas AC y ED no son paralelas y por consiguiente se encontrarán en un punto G, y el ángulo BAC = EGC como correspondientes formados por las paralelas AB, DE cortadas por la secante AC; el ángulo EDF = EGC como correspondientes formados por las paralelas AC, DF cortadas por la secante DG; luego los ángulos BAC, EDF iguales á un mismo ángulo EGC son iguales entre sí. Q. E. L. D.

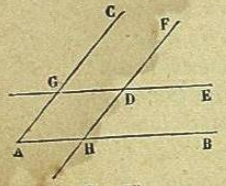

Fig. 35.

2.º Los dos ángulos BAC, GDH tienen los lados paralelos y *dirigidos en sentido contrario*, y decimos que tambien son iguales. En efecto; prolongando más allá del vértice los lados del ángulo GDH, tenemos un ángulo EDF que es igual á BAC (1.º), pero el ángulo GDH = EDF por opuestos por el vértice; luego BAC = GDH. Q. E. L. D.

3.º Los dos ángulos BAC, EDH tienen *dos lados dirigidos en el mismo sentido y dos en sentido contrario*, y decimos que son suplementarios. Con efecto : prolongamos más allá del vértice el lado HD del segundo ángulo. Formamos de esta suerte un ángulo EDF igual á BAC (1.º); pero EDH y EDF son suplementarios (**21**); luego EDH y BAC son suplementarios. Q. E. L. D.

63. Teorema. *Dos ángulos que tienen los lados perpendiculares son iguales ó suplementarios* (fig. 36).

Sean ABC, DEF dos ángulos que tienen los lados perpendiculares dos á dos; y decimos que son iguales ó suplementarios. En efecto : en el punto B elevamos á BC una perpendicular BC′ situada al mismo lado que BA respecto de BC, y hacemos girar el ángulo ABC alrededor del vértice B hasta que el lado BC coincida con BC′, en cuyo caso el lado BA vendrá á ocupar la posicion BA′ y el ángulo A′BC′ será igual al ángulo ABC. Los dos ángulos CBC′, ABA′, son tambien iguales, por que los dos, si se le agregan respectivamente los ángulos A′BC′, ABC dan la misma suma CBA′; pero el ángulo CBC′ es recto por construccion, luego ABA′ lo es igualmente, y BA′ es perpendicular á AB. Esto sentado, resulta que BA′ y DE perpendiculares á una tercera recta BA, son paralelas (**54**) y por igual razon BC′ y EF son tambien paralelas; luego los ángulos A′BC′, DEF que tienen sus lados paralelos son iguales ó suplementarios (**62**); y por consiguiente los ángulos ABC, DEF son iguales ó suplementarios. Q. E. L. D.

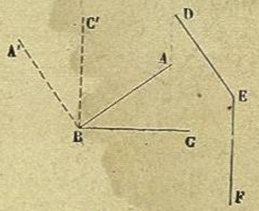

Fig. 36.

Observacion. Si los dos ángulos son ambos agudos ó ambos obtusos, son iguales; y si uno es agudo y el otro obtuso son suplementarios.

64. Definicion. Se llama *polígono* una porcion de plano limitado completamente por líneas rectas. Dichas rectas se llaman *lados* del polígono; los ángulos que forman, *ángulos* del polígono; los vértices de estos ángulos, vértices del polígono, y á la recta que une dos vértices no consecutivos, *diagonal* del polígono.

La figura 37 representa un polígono cuyos lados son las rectas AB, BC, CD, DE, EA; los vértices son los puntos A, B, C, D, E; los ángulos BAE, CBA, DCB, EDC, AED, y la recta AC es una diagonal.

La suma de los lados de un polígono se llama *perimetro* del polígono.

Un polígono se llama *convexo* cuando prolongando indefinidamente todos sus lados, queda todo él situado á un mismo lado de cada una de estas rectas. Si un polígono convexo se corta por una recta, no puede esta cortar el perimetro del polígono más que en dos puntos.

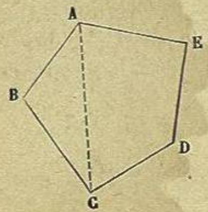

Fig. 37.

Se llama *triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, eptágono, octógono, decágono*, etc., un polígono que tiene 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, etc. lados.

Se llama *paralelógramo* el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (fig. 38).

Se llama *rombo* el cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales (fig. 39).

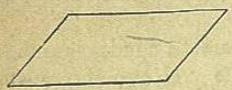
Fig. 38

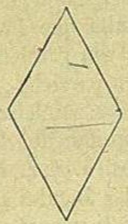
Fig. 39.

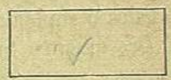
Fig. 40.

El *rectángulo* es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos (fig. 40).


Fig. 41.

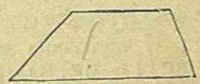
Fig. 42.

Cuadrado es el cuadrilátero que tiene sus lados iguales y los ángulos rectos (fig. 41).

Trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos, que se llaman *bases* del trapecio (fig. 42).

65. Teorema. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos* (fig. 43).

Sea ABC un triángulo, del cual prolongo el lado AC en CD y por el punto C trazo la línea CE paralela á BA. El ángulo A del triángulo es igual á DCE como correspondientes formados por las paralelas BA y CE cortadas por la secante AD; el ángulo B del triángulo es igual al ángulo BCE como alterno interno formado por las paralelas AB, CE cortadas por la secante BC. Luego la suma de los tres ángulos del triángulo es igual á la suma de los ángulos DCE + ECB + ACB y como esta suma vale dos rectos, dos rectos (**22**) vale tambien la suma de los tres ángulos del triángulo en cuestión. Q. E. L. D.

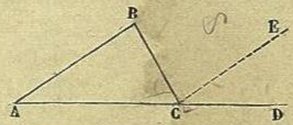

Fig. 43.

66. Corolario I. El ángulo BCD formado por un lado BC y la prolongacion de otro lado se llama *exterior* al triángulo. Resulta de la demostracion precedente que *el ángulo exterior de un triángulo es igual á la suma de los ángulos interiores no adyacentes*. Así el ángulo BCD es igual á la suma de los ángulos interiores A y B.

67. Corolario II. El tercer ángulo de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos. Luego *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales uno á uno, los terceros ángulos son tambien iguales*.

68. Corolario III. *Un triángulo no puede tener más que un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso*.

69. Corolario IV. *En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios*.

70. Teorema. *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos* (fig. 44).

Sea ABCDEF un polígono convexo, y desde el vértice A tracemos todas las diagonales posibles, con lo cual el polígono quedará descompuesto en triángulos que tendrán por vértice comun A y en los que los lados opuestos á dicho vértice son todos los lados del polígono, á escepcion de los dos lados AB, AF que parten del punto A. El número de estos triángulos es, pues, igual al número de lados del polígono menos dos. La suma de los ángulos del polígono es evidentemente la misma que la de los ángulos de todos estos triángulos. Luego, en virtud del teorema precedente, es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos. Q. E. L. D.

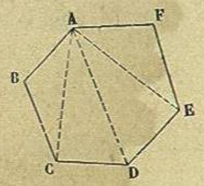

Fig. 44.

71. Observacion. Sea n el número de lados de un polígono: la suma de sus ángulos es igual á

$$2 \text{ rectos} \times (n-2) = (2n-4) \text{ rectos.}$$

72. Teorema. *En todo paralelógramo,*

1.º *Los ángulos opuestos son iguales;*

2.º *Los lados opuestos son iguales.*

1.º Los ángulos opuestos son iguales por tener los lados paralelos y dirigidos en distintos sentidos (**62**, 2.º).

2.º Sea el paralelógramo ABCD (fig. 45). Si trazamos la diagonal BD comun, los triángulos ABD, CDB, tienen comun el lado BD, el ángulo ABD = CDB como alternos internos á las paralelas AB, DC cortadas por la secante BD, y el ángulo ADB = CBD como alternos internos con relacion á las paralelas DA, BC cortadas por la secante DB. Dichos triángulos son, pues, iguales (**31**), y por

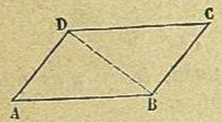

Fig. 45.

consiguiente AD opuesto al ángulo ABD es igual á BC opuesto al ángulo CDB y lo mismo AB = CD. Q. E. L. D.

73. Corolario. *Dos paralelas están á igual distancia en toda su longitud* (fig. 46). Sean AB, CD dos paralelas; EF, GH dos perpendiculares á dichas paralelas, las cuales son paralelas (**54**). La figura EGHF es, pues, un paralelógramo y por consiguiente EF = GH. Q. E. L. D.

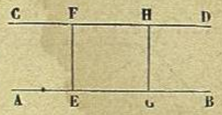

Fig. 46.

74. Teorema. *Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos son respectivamente iguales, el cuadrilátero es un paralelógramo.*

La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro rectos (**70**); los ángulos opuestos son iguales dos á dos, y por tanto la suma de dos ángulos no opuestos valdrá la mitad de cuatro rectos ó sean dos rectos, es decir, que dos ángulos inmediatos de este cuadrilátero son suplementarios. Ahora bien, si teniendo esto en cuenta suponemos que en el cuadrilátero ABCD (fig. 47) los ángulos A y C son iguales así como los ángulos B y D, resultará que los ángulos A y B, v. g., son suplementarios; pero estos ángulos son interiores de un mismo lado con relacion á las dos líneas AD y BC cortadas por la secante AB; luego las líneas AD y BC son paralelas (**61**) y lo mismo sucede á los otros dos lados opuestos, y el cuadrilátero es un paralelógramo. Q. E. L. D.

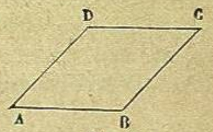

Fig. 47.

75. Corolario. *Un rectángulo es un paralelógramo*, porque sus ángulos opuestos son iguales dos á dos, como rectos que son.

76. Teorema. *Si en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales, el cuadrilátero es un paralelógramo* (fig. 48).

Sea ABCD el cuadrilátero en el cual tenemos:

$$AB = CD, \quad AD = BC.$$

Trazamos la diagonal BD y los dos triángulos ABD, CDB tienen el lado comun BD, $AB = CD$, $AD = BC$, por el supuesto, y por tanto son iguales (**35**) y lo mismo los ángulos ABD y CDB. Estos ángulos son alternos internos con relacion á las líneas AB y CD, cortadas por la secante BD; luego estas líneas son paralelas. De igual manera los ángulos ADB, CBD son iguales y las rectas AD, CB son paralelas, y la figura es por lo tanto un paralelógramo. Q. E. L. D.

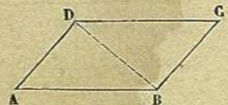

Fig. 48.

77. Corolario. *Un rombo es un paralelógramo,* porque sus ángulos opuestos son evidentemente iguales.

El cuadrado es tambien un paralelógramo.

78. Teorema. *Si en un cuadrilátero dos lados opuestos son iguales y paralelos, el cuadrilátero es un paralelógramo* (fig. 48, *bis*).

Sea ABCD el cuadrilátero en el cual suponemos que el lado AB es igual y paralelo al CD, y pretendemos demostrar que los otros dos lados AD y BC son tambien paralelos. En efecto: tracemos la diagonal BD y los dos triángulos ABD, CDB tienen el lado $AB = CD$ por el supuesto, y el ángulo $ABD = CDB$ como alternos internos entre las paralelas AB, CD cortadas por la secante BD; luego son iguales (**32**); luego el ángulo $ADB = DBC$. Mas estos ángulos son alternos internos entre las rectas AD, CB cortadas por la secante BD; luego estas rectas son paralelas (**61**) y el cuadrilátero ABCD es un paralelógramo. Q. E. L. D.

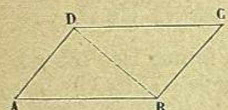

Fig. 48 *bis*.

79. Teorema. *Las diagonales de un paralelógramo se cortan mutualmente en dos partes iguales* (fig. 49).

Sea ABCD un paralelógramo, AC, DB sus diagonales que se cortan en O; y decimos que $OA = OC$ y que $OB = OD$. En efecto: los dos triángulos OAB, OCD tienen el lado $AB = CD$ como lados opuestos de un mismo paralelógramo; (**72**) el ángulo $OAB = OCD$ como alternos internos, y el ángulo $OBA = ODC$ por la misma razon. Estos dos triángulos son, pues, iguales (**31**) y los lados AO, CO opuestos á los ángulos iguales ABO, CDO son iguales, y lo mismo puede decirse que $OB = OD$. Q. E. L. D.

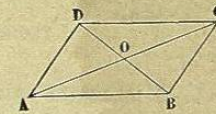

Fig. 49.

80. Corolario I. *Las diagonales de un rombo* ABCD *son perpendiculares entre sí* (fig. 50).

Teniendo el rombo sus cuatro lados iguales, los puntos B y D están uno y otro á igual distancia de los puntos A y C, y pertenecen los dos á la perpendicular levantada en medio de AC (**48**); por consiguiente BD es perpendicular á AC. Q. E. L. D.

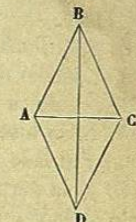

Fig. 50.

81. Corolario II. *Las diagonales de un rectángulo* ABCD *son iguales* (fig. 51).

En efecto: los dos triángulos rectángulos ABC, BAD tienen el lado comun AB y el lado $BC = AD$ (**72**), y por tanto un ángulo igual comprendido entre lados iguales uno á uno; luego son iguales (**32**), resultando que sus hipotenusas AC y BD son tambien iguales. Q. E. L. D.

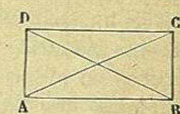

Fig. 51.

Observacion. El cuadrado es á la vez un rombo y un rectángulo: *luego las diagonales de un cuadrado son perpendiculares é iguales entre sí.*

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO PRIMERO

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si un punto tomado en el interior de un triángulo se une con los tres vértices, la suma de éstas líneas es menor que la suma de los tres lados del triángulo.

2. La línea que une uno de los vértices de un triángulo con el medio del lado opuesto (esta línea se llama una *mediana* del triángulo), es menor que la semisuma de los otros dos lados.

3. Si la línea que junta uno de los vértices de un triángulo con el medio del lado opuesto es perpendicular á este lado, el triángulo es isósceles.

4. Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo es perpendicular al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

5. Si la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo al lado opuesto divide este lado en dos partes iguales, el triángulo es isósceles.

6. Si las perpendiculares bajadas desde dos vértices de un triángulo sobre los lados opuestos son iguales entre sí, el triángulo es isósceles.

7. Las perpendiculares levantadas en medio de los tres lados de un triángulo se cortan en un mismo punto.

8. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto.

9. Dadas dos líneas paralelas, si se traza otra paralela á igual distancia de las dos primeras, aquella divide en dos partes iguales todas las rectas comprendidas entre las dos paralelas dadas.

10. Si por cada uno de los vértices de un triángulo se traza una paralela al lado opuesto, dichas rectas, suficientemente prolongadas, forman un nuevo triángulo que vale cuádruplo del primero y cuyos lados tienen una longitud doble que los lados del primero.

11. Las perpendiculares bajadas desde los tres vértices de un triángulo sobre los lados opuestos se cortan en un mismo punto.

12. Si en un triángulo la línea que junta uno de los vértices con el medio del lado opuesto es igual á la mitad de este lado, el triángulo es rectángulo.

13. Si en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es doble que el otro, la hipotenusa es doble que el menor de los otros dos lados.

14. Si se prolongan en un mismo sentido todos los lados de un polígono convexo, la suma de los ángulos exteriores de esta manera formados es igual á cuatro ángulos rectos.

15. Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados que son respectivamente iguales.

16. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mútuamente en dos partes iguales, este cuadrilátero es un paralelógramo.

17. Si en un cuadrilátero las diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales y son perpendiculares, el cuadrilátero es un rombo.

18. Si en un cuadrilátero las diagonales son iguales y se cortan recíprocamente en partes iguales, el cuadrilátero es un rectángulo.

19. La línea trazada por el medio de un lado de un triángulo paralelamente á otro lado, pasa tambien por el medio del tercer lado, y su longitud es la mitad de aquel lado á que es paralela.

20. Si se unen dos á dos los medios de los lados de un cuadrilátero convexo, se forma un nuevo cuadrilátero que es un paralelógramo: ¿en qué caso será dicho paralelógramo un rombo ó un rectángulo?

21. En un trapecio los puntos medios de los lados no paralelos y de las diagonales están en línea recta.

22. En un trapecio isósceles, esto es, aquel en que los lados no paralelos son iguales entre sí, los ángulos opuesto son suplementarios.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. ¿Cuál es el lugar geómetrico de los medios de las rectas trazadas desde un punto fijo á una recta?

2. Dos puntos A y B y una recta MN dados (fig. 52), determinar sobre la recta MN un punto C tal que el ángulo ACM sea igual al BCN (Problema del billar). Demostrar que la línea quebrada ACB determinada de este modo, es mas corta que toda otra línea quebrada obtenida mediante la union de un punto de la línea MN á los puntos A y B.

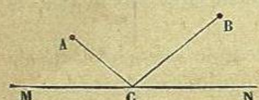

Fig. 52.

3. Dadas dos paralelas y dos puntos A y B situados fuera de ellas y en lados diversos, encontrar el camino mas corto desde A á B mediante una línea quebrada tal que la porcion comprendida entre las dos paralelas tenga una direccion dada.

4. ¿Cuál es el valor del ángulo de un triángulo equilátero? — 60

5. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es los $\frac{2}{5}$ de un ángulo recto; ¿cuál es el valor del otro?

6. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles es los $\frac{6}{7}$ de un ángulo recto; ¿cuánto vale cada uno de los ángulos de la base?

7. Cada uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es igual á $\frac{3}{4}$ de un recto; ¿cuál es el valor del ángulo del vértice?

8. La suma de los ángulos de un polígono convexo es igual á 94 ángulos rectos; ¿cuántos lados tiene este polígono?

9. ¿Cuáles son las propiedades del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un paralelógramo, y del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos exteriores? (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1866).

10. Si en un trapecio ABCD (el lector tendrá á bien ima-

ginarse la figura) cuyos lados paralelos son AB y CD, se trazan las bisectrices de los ángulos A y D, ¿en qué ángulo se cortarán? ¿Cuál es la direccion de la recta que une el punto de encuentro de las bisectrices de los ángulos A y D con el punto de encuentro de las bisectrices de los ángulos B y C? (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1868).