LIBRO II

DE LA CIRCUNFERENCIA

§ VI. De la circunferencia. — Dependencia mútua de los arcos y de las cuerdas, de las cuerdas y de sus distancia al centro.

82. Definiciones. La *circunferencia* es una línea curva ABC (*fig*. 53) cuyos puntos equidistan de uno interior O que se llama *centro*. *Círculo* es la porcion de plano limitado por la circunferencia.

Rádio se llama toda recta, como OA que va desde el centro á un punto cualquiera de la circunferencia. Por la definicion, todos los rádios son iguales. Todo punto interior á la circunferencia está á una distancia del centro menor que el rádio; y todo punto exterior, á una distancia mayor que el rádio.

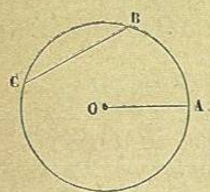

Fig. 53.

Dos círculos del mismo rádio son iguales, porque si se los superpone de modo que los centros coincidan, la igualdad de los rádios hará que coincidan evidentemente las dos circunferencias.

Se llama *arco* una porcion cualquiera BC de la circunferencia; y se llama *cuerda* la recta que une los dos extremos del arco. Se dice frecuentemente que la cuerda *subtiende* al arco ó que el arco está *subtendido* por la cuerda.

Se llama *segmento* de círculo la porcion de este comprendida entre un arco y su cuerda.

83. Teorema. *Una recta no puede tener mas que dos puntos comunes con una circunferencia.*

Porque desde un punto no pueden trazarse á una recta mas que dos líneas iguales (**44**); luego desde el centro no podrán trazarse á la recta mas de dos líneas iguales al rádio.

Observacion. Por esta razon se dice que la circunferencia es una curva *convexa*.

84. Definiciones. Se llama *secante* de una circunferencia la recta que la corta en dos puntos.

Diámetro es una recta que pasa por el centro y termina por sus dos extremos en la circunferencia. El diámetro es el doble del rádio, y por tanto todos los diámetros son iguales.

85. Teorema. *El diámetro es la mayor de las cuerdas* (fig. **54**.)

Sea AB una cuerda, BC un diámetro de la circunferencia O, y tracemos el rádio OA. La línea recta AB es mas corta que la línea quebrada AOB, ó lo que es lo mismo, la cuerda AB es menor que el doble del rádio, menor, pues, que el diámetro BC. Q. E. L. D.

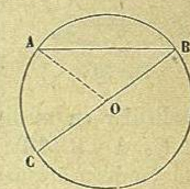

Fig. 54.

86. Teorema. *Todo diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, y lo mismo al círculo* (fig. 55).

Doblemos la figura por el diámetro AB nasta que la parte superior del plano se aplique sobre la inferior. Un rádio OM cualquiera tomará una posicion ON formando con OA un ángulo AON = AOM; y como todos los rádios son iguales, el punto M caerá en el punto N situado en la parte inferior de la circunferencia. Todos los puntos del arco AMB caerán de igual modo sobre el arco AND, luego estos dos arcos coincidirán, con lo cual queda demostrado el teorema.

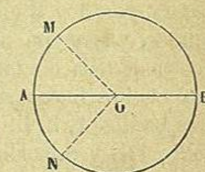

Fig. 55.

Observacion. Una cuerda que no pasa por el centro divide la circunferencia en dos arcos desiguales el uno menor que la semi-circunferencia, y el otro mayor, y dicha cuerda subtiende los dos arcos mencionados, de los cuales, ordinariamente no se considera sino el arco menor.

87. Teorema. *Por tres puntos que no están en línea recta, se puede siempre hacer pasar una circunferencia pero no mas de una* (fig. 55).

Sean A, B, C los puntos dados; unimos AB y BC. En medio de AB levantamos la perpendicular DE á dicha recta, y en medio de BC la FG perpendicular á BC. Las dos líneas DE y FG no son paralelas porque las perpendiculares BA, BC trazadas á estas dos rectas por un mismo punto, no están en línea recta. Sea ahora O el punto en que se encuentran aquellas dos rectas, y resultará que el punto O hallándose en la recta DE perpendicular en medio de AB, está igualmente distante de los puntos A y B (**46**); este mismo punto por hallarse en FG está tambien á igual distancia de los puntos B y C; está pues á igual distancia de los tres puntos A, B, C, ó lo que es lo mismo, es el centro de una circunferencia que pasa por dichos tres puntos A, B, C.

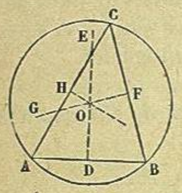

Fig. 56.

Decimos además que por ellos no puede pasar mas que una circunferencia; porque el centro de toda circunferencia que pasara por A y B estaria igualmente distante de dichos dos puntos, y seria un punto de DE (**48**). Por iguales razones el centro de toda circunferencia por pasando B y C se hallaria en la recta FG. Luego si una circunferencia ha de pasar por los tres puntos A, B, C, su centro se hallará á la vez sobre DE y sobre FG, y coincidirá con el punto O, de donde resulta que por los tres puntos A, B, C, no puede trazarse mas que una circunferencia.

88. Corolario I. Si unimos AC y elevamos una perpendicular en medio de esta línea, deberá contener tambien el punto O que está igualmente distante de los puntos A y C.

Por consiguiente: *las perpendiculares elevadas en la mitad de los tres lados de un triángulo se cortan en un mismo punto que es el centro del círculo circunscrito al triángulo.*

89. Corolario II. *Dos circunferencias no pueden tener mas de dos puntos comunes sin coincidir.*

90. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*
1.° *A arcos iguales corresponden cuerdas iguales;*
2.° *Si dos arcos menores que una semi-circunferencia son desiguales, al mayor corresponde la cuerda mayor* (fig. 56).

1.° Sean dos arcos AB, CD iguales tomados sobre las circunferencias iguales O y O'. Llevemos la circunferencia O' de manera que el rádio O'C coincida con su igual OA: las circunferencias coincidirán, y como el arco CD es igual al arco AB, el punto D caerá en el punto B; y las cuerdas AB y CD coincidirán. Q. E. L. D.

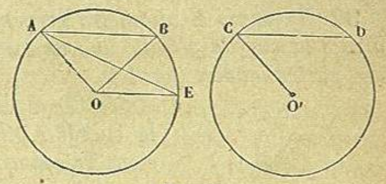

Fig. 57.

2.° Supongamos que los arcos AE, CD tomados en las circunferencias iguales O y O' sean desiguales y sea AE el mayor, y decimos que la cuerda AE es mayor que la cuerda CD. En efecto: tomemos sobre AE un arco AB igual al arco CD, y evidentemente el punto B caerá entre A y E. Tracemos los rádios OA, OB y OE. El ángulo AOB será menor que AOE. Los dos triángulos, AOB, AOE tienen comun el lado OA, el lado OB = OE, como rádios, el ángulo AOB < AOE; luego (**33**) el lado AB es mas pequeño que AE. La cuerda AE = CD (1.°), luego, últimamente la cuerda CD es menor que la AE.

91. Corolario. Las recíprocas de los teoremas precedentes se deducen con facilidad.

En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.º *Cuerdas iguales subtienden arcos iguales.*

2.º *Si dos cuerdas son desiguales, la mayor subtiende al arco mayor.*

Porque en virtud del teorema precedente, las cuerdas son iguales ó desiguales segun que los arcos mismos son iguales ó desiguales; luego las cuerdas no pueden ser iguales, si los arcos son desiguales, ni las cuerdas desiguales, si los arcos son iguales. Además, cuando son desiguales, la mayor subtiende necesariamente el arco mayor.

Observacion. Los enunciados que preceden suponen expresamente que se trata de arcos menores que la semi-circunferencia.

92. Teorema. *El diámetro perpendicular á una cuerda, divide la cuerda y cada uno de los arcos que subtiende en dos partes iguales* (fig. 58).

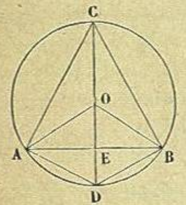

Fig. 58.

Sea CD el diámetro perpendicular á la cuerda AB, E el punto de interseccion. Tracemos los rádios OA, OB. Estas dos líneas son oblícuas y como son iguales, distan igualmente del pié de la perpendicular OE (**43**), luego AE = BE. Tracemos despues las cuerdas CA, CB, DA, DB. Puesto que E es el medio de AB, la oblícua CA es igual á CB, luego (**88**) los arcos CA, CB son iguales, y lo mismo los arcos DA y DB.

93. Observacion. Resulta que el medio de una cuerda, el medio de los dos arcos que subtiende y el centro del círculo son cuatro puntos en línea recta, y dicha recta es perpendicular á la cuerda, lo cual equivale á decir que la recta CD tiene ó cumple cinco condiciones. Cuando dos de estas cinco se cumplen, se cumplen tambien los otras tres, lo cual hace que el teorema precedente pueda enunciarse de diez modos distintos.

94. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales:*

1.º *Dos cuerdas iguales, están igualmente distantes del centro.*

2.º *De dos cuerdas desiguales, la menor es la que más dista del centro* (fig. 59).

1.º Sean AB, CD dos cuerdas iguales en la circunferencia O; OE y OF las perpendiculares bajadas desde el centro á cada una de las cuerdas. Segun lo dicho (**92**) las dividen en dos partes iguales y por tanto CF = AE. Tracemos los rádios OA, OC, y los triángulos OAE, OCF que son rectángulos tienen las hipótenusas OA, OC iguales como rádios, y AE = CF; luego son iguales (**47**), é iguales tambien OE y OF. Q. E. L. D.

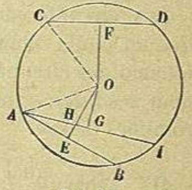

Fig. 59.

2.º Sean AI, CD dos cuerdas desiguales y supongamos AI > CD. El arco AI será mayor que el arco CD (**91**). Tracemos desde el centro sobre las dos cuerdas las perpendiculares OG, OF y decimos que OG < OF. Con efecto, tomemos sobre el arco AI un arco AB igual al arco CD, y tracemos la cuerda AB, que será igual á la cuerda CD y la perpendicular OE = OF (1.º). Esto supuesto, cayendo el punto B sobre el arco AI, la cuerda AB y el centro O se hallarán en lados diferentes de la línea AI, y OE cortará á AI en un punto H situado entre O y E; de donde resulta OH < OE; OG < OH puesto que OG es perpendicular y OH es oblícua á AI: luego *á fortiori* OG < OE, ó bien OG < OF. Q. E. L. D.

95. Corolario. Recíprocamente, *en un mismo círculo ó en círculos iguales, las cuerdas igualmente distantes del centro son iguales, y de dos cuerdas desigualmente distantes del centro, la que más se aleja es la más pequeña.*

§ VII. — Tangente al círculo. — Interseccion y contacto de dos círculos.

96. Definiciones. Se llama *tangente* del círculo una recta que no tiene mas que un punto comun con la circunferencia. Dicho punto se llama de *contacto ó tangencia*.

Dos circunferencias son *tangentes* cuando no tienen mas que un punto comun, que se llama tambien punto de *contacto*. Cuando dos circunferencias tienen dos puntos comunes se llaman *secantes*, y no pueden tener mas que los dos puntos comunes dichos.

97. Teorema. *Toda perpendicular al estremo de un rádio es tangente al círculo* (fig. 60).

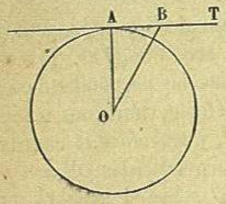

Fig. 60.

La línea AT perpendicular al extremo del rádio OA es tangente al círculo, porque toda línea OB, por ejemplo, trazada desde el centro á la línea AT es oblícua á esta línea, por consiguiente mas larga que OA, y por esta razon todos los puntos de AT, á escepcion del punto A son exteriores al círculo y AT, por tanto, tangente á la circunferencia. Q. E. L. D.

98. Teorema. Recíprocamente, la tangente á la circunferencia es perpendicular al extremo del rádio que termina en el punto de contacto (fig. 60).

Sea AT una tangente al círculo O, y A el punto de contacto. Todos los puntos de AT á escepcion del punto A son esteriores al círculo; luego OA es la línea mas corta que puede trazarse desde el punto O á la línea AT; y por consiguiente (**45**) OA es perpendicular á AT. Q. E. L. D.

99. Coralorio. *Por un punto de una circunferencia no puede trazarse más de una tangente*, porque no puede trazarse

mas que una perpendicular al extremo del rádio que pasa por dicho punto.

100. Teorema. *Cuando dos circunferencias se cortan, la línea que une sus centros es perpendicular á la cuerda comun y pasa por el medio de esta* (fig. 61).

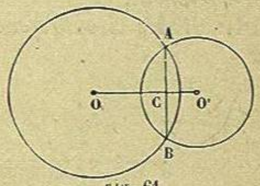

Fig. 61.

Sean O y O′ dos circunferencias que se cortan en A y B. El punto O está igualmente distante de A y de B, y lo mismo sucede al punto O′. Luego los puntos O y O′ se encuentran en la perpendicular elevada en medio de AB (**48**) y por tanto OO′ es perpendicular en medio de AB. Q. E. L. D.

101. Teorema. *Si dos circunferencias O y O′ tienen un punto comun A fuera de la línea de los centros, estas dos circunferencias son secantes* (fig. 61).

Con efecto : desde el punto A bajemos la línea AC perpendicular á OO′ y la prolongamos una cantidad CB = CA, con lo cual resulta que el punto O está igualmente distante de los puntos A y B (**48**) y el punto B está en la circunferencia O, y por iguales razones en la circunferencia O′; luego dichas dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Q. E. L. D.

102. Corolario. *Cuando dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros.*

103. Observacion. Dos circunferencias pueden ocupar una con relacion á otra cinco posiciones diferentes : pueden no tener ningun punto comun y ser *exteriores* (fig. 62), ó *interiores* (fig. 66), ó *tangentes exteriormente* (fig. 63), ó *interiormente* (fig. 65), ó por fin pueden ser secantes (fig. 64).

104. Teorema. 1.° *Si dos circunferencias son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.*

2.º *Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.*

3.º *Si dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios, y mayor que su diferencia.*

4.º *Si dos circunferencias son tangentes interiormente,*

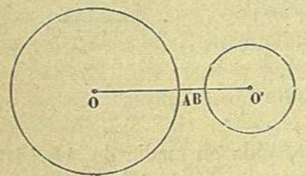

Fig. 62.

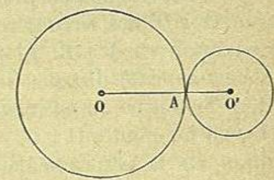

Fig. 63.

la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.

5.º *Si dos circunferencias son interiores, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.*

1.º Tenemos en la (fig. 62)

$$OO' = OA + O'B + AB$$

luego :

$$OO' > OA + O'B.$$

2.º El punto de contacto A está en la línea de las centros (**102**) y comprendido entre los dos centros; y tenemos (fig. 63)

$$OO' = OA + AO'.$$

3.º Sea A uno de los dos puntos de encuentro de dos circunferencias secantes O, O' (fig. 64) y tendremos en el triángulo O'OA (**29**)

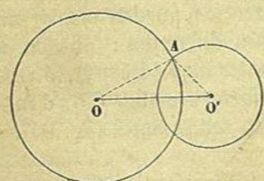

Fig. 64.

$$OO' < OA + O'A$$
$$OO' > OA - O'A.$$

4.º Sean O y O' dos circunferencias tangentes interiormente

y A el punto de contacto (fig. 65) que está situado en la prolongacion de la línea de los centros (**102**) y tendrémos

$$OO' = OA - O'A.$$

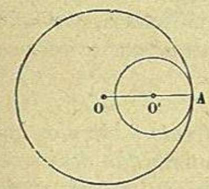

Fig. 65.

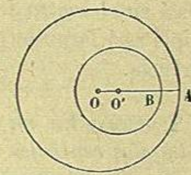

Fig. 66.

5.º Sean O y O' dos circunferencias interiores (fig. 66) y tendremos :

$$OO' = OA - O'A = OA - O'B - BA;$$

luego :

$$OO' < OA - O'B.$$

103. Observacion. Las recíprocas de los cinco teoremas que preceden son verdaderas, y se deducen inmediatamente, porque las condiciones relativas á cada caso se excluyen mútuamente.

Demostremos, por ejemplo que si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, las circunferencias se cortan. En efecto : dichas circunferencias no pueden ser ni exteriores, ni tangentes exteriormente, puesto que la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios ; tampoco pueden ser tangentes interiormente ni interiores, puesto que la distancia de los centros es mayor que la diferencia de los rádios ; luego son secantes. Q. E. L. D.

De igual manera se pueden demostrar las otras cuatro recíprocas.

§ VIII. — Medida de los ángulos. — Ángulos inscritos.

106. Definiciones. Se llama *ángulo central* aquel cuyo vértice está en el centro de una circunferencia, y *ángulo inscrito* el que está formado por dos cuerdas que se cortan en la circunferencia.

107. Teorema. *En un mismo círculo ó círculos iguales : 1.° dos ángulos centrales iguales interceptan dos arcos iguales ; 2.° Dos ángulos centrales desiguales comprenden dos arcos desiguales, y al ángulo mayor corresponde el mayor arco* (fig. 67.)

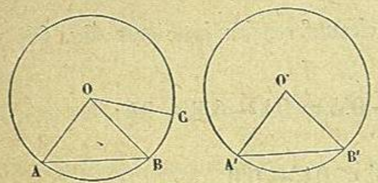

Fig. 67.

1.° Sean AOB, A'O'B' dos ángulos centrales iguales en los círculos iguales O y O'. Unamos AB y A'B', y los triángulos AOB, A'O'B' tienen el ángulo AOB = A'O'B' por el supuesto, OA = O'A', OB = O'B' como rádios de círculos iguales, y por tanto dichos triángulos son iguales y AB = A'B' ; y los arcos AB y A'B' que están subtendidos por cuerdas iguales, son iguales. Q. E. L. D.

2.° Sean AOC > A'O'B' y decimos que el arco AC > arco A'B'. Con efecto : si formamos el ángulo AOB = A'O'B', la línea OB caerá en el interior del ángulo AOC, y por tanto el punto B caerá sobre el arco AC ; luego el arco AB < arco AC, y como el arco AB = arco A'B' (1.°) resulta al fin que arco A'B' < arco AC. Q. E. L. D.

108. Corolario. *Los ángulos centrales que comprenden arcos iguales en círculos iguales, son iguales*, porque si fueran desiguales, los arcos comprendidos entre sus lados, serian desiguales, lo cual es contra el supuesto.

109. Teorema. *En un mismo círculo ó círculos iguales, la relacion de dos ángulos centrales es igual á la relacion de los arcos que comprenden entre sus lados* (fig. 68) [1].

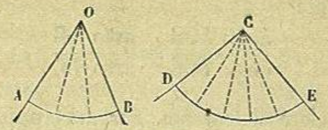

Fig. 68.

Supongamos que los arcos AB y DE tienen una medida comun (V. la *Arithmética*) que esté contenida, v. g. tres veces en AB y cinco en DE, y tendremos :

$$\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DE}} = \frac{3}{5};$$

Unimos los puntos de division de los dos arcos con sus centros respectivos O y C, y los dos ángulos AOB, DCE quedarán divididos en pequeños ángulos, iguales entre sí, puesto que comprenden arcos iguales (**108**) ; luego el ángulo AOB

1. Recordamos aquí que se llama *relacion* de dos magnitudes de la misma especie al número entero ó fraccionario que expresa la medida de la primera, cuando se toma la segunda por unidad, ó el número que indica las veces que la primera magnitud contiene la segunda, ó qué fraccion de la segunda magnitud representa la primera. Así, decir que la relacion de dos ángulos es igual á $\frac{3}{5}$, es decir que el primero contiene tres veces la 5.ª parte del 2.°, ó, mas sencillamente, que el primero vale los $\frac{3}{5}$ del segundo.

Nótese tambien que para abreviar el lenguaje, representaremos la relacion de dos cantidades de la misma especie por una fraccion que tenga por numerador la primera cantidad y por denominador la segunda, aun en el caso en que estas dos cantidades no se expresen en números : así la fraccion $\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DE}}$ significa la relacion del arco AB al DE. Si las dos magnitudes estuvieran reducidas á números, su relacion, como se sabe, se expresaria realmente por el cociente del primer número por el segundo, ó por la fraccion que tenga el primero por numerador y el segundo por denominador. (Véase la *Aritmética*).

contiene 3 y el ángulo DCE contiene 5; de donde resulta :

$$\frac{\text{áng. AOB}}{\text{áng. DCE}}=\frac{3}{5};$$

y por consiguiente

$$\frac{\text{áng. AOB}}{\text{áng. DCE}}=\frac{\text{arco AB}}{\text{arco DC}} \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Siendo verdadero el teorema, por muy pequeña que sea la medida comun de los arcos AB y DE, será verdad cuando los arcos son incomensurables.

110. Teorema. *Si se toma como unidad de ángulo central el ángulo que comprende entre sus lados la unidad de arco, la medida de un ángulo central es la misma que la del arco comprendido entre sus lados* (fig. 68), ó mas brevemente, *el ángulo central tiene por medida el arco comprendido entre sus lados.*

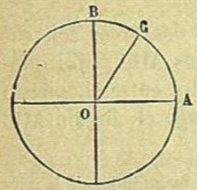

Fig. 69.

Sea AOC el ángulo que es necesario medir, AOB la unidad de ángulo. Desde el punto O como centro, con un rádio cualquiera describo una circunferencia. La unidad de arco será por el supuesto el arco AB comprendido entre los lados de la unidad de ángulo; luego la medida del ángulo AOC será (V. la *Aritmética*) la relacion $\frac{\text{áng. AOC}}{\text{áng. AOB}}$, y la medida del arco AC será la relacion $\frac{\text{arco AC}}{\text{arco AB}}$; y como estas medidas son iguales segun el teorema precedente, luego, etc.

111. Si se toma el ángulo recto por unidad de ángulo, la unidad de arco será evidentemente la cuarta parte de la circunferencia, ó sea el *cuadrante*.

112. Para comparar con mas facilidad los arcos, se ha dividido la circunferencia entera en 360 partes iguales llamadas *grados*, cada grado en 60 *minutos* y cada minuto en 60 *segundos*, y segun esto, se dice *ángulo de un grado, de un minuto*, etc., al ángulo central que comprende un arco de un grado, de un minuto, etc.

Los grados se indican por el signo (°), los minutos por el signo (′) y los segundos por (″); y así 18 grados y 25 minutos y 13 segundos se escriben asi : 18°, 25′, 13″.

Si un ángulo central comprende entre sus lados un arco de 25° por ejemplo, este ángulo será 25 veces mayor que el ángulo de 1° y se dice por esta razon que este es un ángulo de 25°; de igual manera, si un ángulo central comprende entre sus lados un arco de 25°, 13′, 45″, este será un ángulo de 25°, 13′ y 45″.

El ángulo recto vale 90° ó 5400′ ó 324 000″.

113. Teorema. *La medida de un ángulo inscrito es igual á la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados* ó mas breve : *un ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

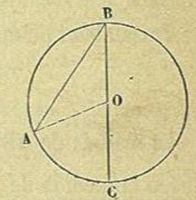

Fig. 70.

Hay que distinguir tres casos :

1.° *Que uno de los lados del ángulo inscrito pase por el centro*, como ABC (fig. 70).

Unamos el punto A con el O, y resultará que el triángulo OAB es isósceles puesto que OA = OB, y por consiguiente el ángulo A = B (**37**). El ángulo AOC exterior al triángulo AOB es igual á la suma de los dos ángulos A y B no adyacentes (**66**) y por tanto es doble que el ángulo B, ó en otros términos, el ángulo B es la mitad del ángulo AOC. Este tiene por medida el arco AC comprendido entre sus lados (**110**), luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC. Q. E. L. D.

2.° *Que el centro O esté en el interior del ángulo* ABC (fig. 71).

Trazamos el diámetro BD, y resultará que el ángulo ABC es la suma de los ABD y DBC; y como la medida (1.°) de ABD es arco $\frac{\text{AD}}{2}$ y la de DBC $\frac{\text{arco DC}}{2}$, resulta que la de ABC será

$$\frac{\text{arco AD}}{2}+\frac{\text{arco DC}}{2}=\frac{\text{arco AC}}{2} \quad \text{Q. E. L. D.}$$

3.° *Que el centro O sea exterior al ángulo* ABC (fig. 72).

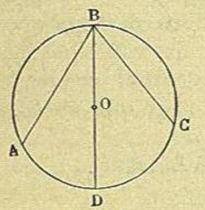

Fig. 71.

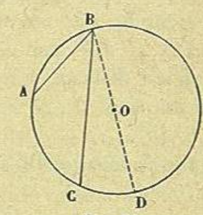

Fig. 72.

Trazando el diámetro BD, resultará

$$\text{ABC}=\text{ABD}-\text{CBD}.$$

La medida de ABD es $\frac{\text{arco AD}}{2}$ (1.°) y la de CBD $\frac{\text{arco CD}}{2}$; luego la medida de ABC es

$$\frac{\text{arco AD}}{2}-\frac{\text{arco CD}}{2}=\frac{\text{arco AC}}{2} \quad \text{Q. E. L. D.}$$

Ejemplo. Supongamos, que el arco AC comprendido entre los lados del ángulo inscrito ABC valga 69°,35′,42″; el ángulo ABC valdrá la mitad de este número ó sean 34°, 47′ y 51″; en términos mas exactos, el ángulo inscrito ABC será la mitad del ángulo central que comprenda entre sus lados un arco igual á AC.

114. Coralario I. *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto* (fig. 73).

Porque tiene por medida la mitad de una semi-circunferencia, ó cuadrante y por tanto es recto.

115. Corolario II. *Todo ángulo inscrito en un segmento mayor que un semicírculo es agudo; y todo ángulo inscrito en un segmento mas pequeño que un semicírculo es obtuso.*

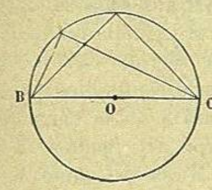

Fig. 73.

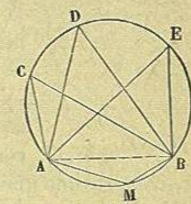

Fig. 74.

El ángulo ADB, por ejemplo, (fig. 74) inscrito en el segmento ACDEB mayor que un semicírculo tiene por medida la mitad del arco AMB, menor que una semicircunferencia; su medida es, pues, menor que la de un ángulo recto, ó en en otros términos, el ángulo es agudo.

Igualmente claro resulta que el ángulo AMB inscrito en un segmento menor que un semicírculo, es obtuso.

116. Corolario. III. *Todos los ángulos inscritos en un mismo segmento son iguales* (fig. 74).

Los ángulos ACB, BDA, AEB son todos iguales porque todos tienen por medida la mitad del arco AMB. El segmento ACDEB suele llamarse el *segmento capaz del ángulo* ACB.

117. Corolario IV. Los ángulos ACB, AMB (fig. 74) inscritos en los dos segmentos determinados por la cuerda AB son suplementarios; porque la suma de sus medidas es igual á la semi-circunferencia. *Así pues, en un cuadrilátero inscrito los ángulos opuestos son suplementarios.*

118. Teorema. *El ángulo formado por una tangente y* *una cuerda trazada por el punto de contacto tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados* (fig. 75).

Sea AC una cuerda, y BA la tangente en punto A. Por este mismo punto trazo una secante AD, y el ángulo inscrito CAM tiene por medida la mitad del arco CM. Si ahora la secante AM gira sobre el punto A de manera que el segundo punto de interseccion M se acerque cada vez mas al punto A, hasta confundirse con él, la secante llegará á ser la tangente, y se confundirá con AB. Siempre resultará que por más próximo que el punto M esté del punto A, el ángulo CAM tiene siempre por medida la mitad del arco AM comprendido entre sus lados. Lo mismo sucede cuando al fin el punto M llega á confundirse con el punto A, y por consiguiente el ángulo CBA tiene por medida la mitad del arco CA comprendido entre sus lados Q. E. L. D.

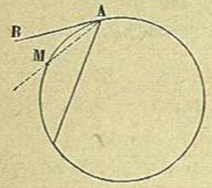

Fig. 75.

119. Teorema. *El ángulo formado por dos cuerdas que se cortan en un círculo tiene por medida la semi-suma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos* (fig. 76).

Sea ABC el ángulo dado, BD, BE las prolongaciones de sus lados; y únase el punto A con el E. El ángulo ABC exterior al triángulo ABE es igual á la suma de los ángulos interiores A y E (**66**). El ángulo A y el E tienen por medida $\frac{\text{arco AC}}{2}$ y $\frac{\text{arco DE}}{2}$ (**115**)

Luego el ángulo ABC tiene por medida $\frac{\text{arco AC} + \text{arco DE}}{2}$.

Q. E. L. D.

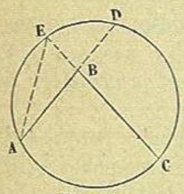

Fig. 76.

120. Teorema. *El ángulo formado por dos secantes á un círculo que se cortan fuera de la circunferencia, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados* (fig. 77).

Sea ABC el ángulo dado; trazemos la cuerda AE, y el ángulo AEC exterior al triángulo ABE es igual á la suma de los ángulos A y B (**66**). Luego el ángulo B es igual al esceso de AEC sobre el ángulo A. La medida de AEC es $\frac{\text{arco AC}}{2}$, la del ángulo A es $\frac{\text{arco DE}}{2}$, luego la del ángulo ABC $= \frac{\text{arco AC} - \text{arco DE}}{2}$.

Q. E. L. D.

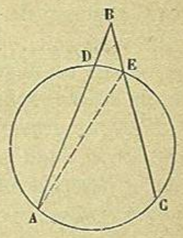

Fig. 77.

121. Teorema. *En la porcion de plano situado sobre una recta AB, el lugar de los puntos desde donde esta recta se vé bajo un ángulo dado, es un arco de círculo que tenga á AB por cuerda* (fig. 78).

Sea C un punto del lugar: por los tres puntos A, B, C, se hace pasar un círculo, y decimos que el arco ACB es el lugar pedido.

En efecto: 1.º desde todos los puntos de este arco la recta AB se ve bajo el mismo ángulo (**116**).

2.º Sea D un punto interior al segmento ACB, el ángulo ADB tiene por medida $\frac{\text{arco AB} + \text{arco EF}}{2}$ (**119**); luego es mayor que el ángulo ACB cuya medida es $\frac{\text{arco AB}}{2}$. Sea G un punto exterior al segmento. El ángulo AGB tiene por medida $\frac{\text{arco AB} - \text{arco HI}}{2}$ (**20**); luego es menor que el ángulo ACB. Los puntos del arco ACB son pues los únicos desde donde la recta AB es vista bajo un ángulo igual al ángulo dado.

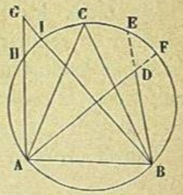

Fig. 78.

122. Observacion. Si el ángulo dado es recto el lugar es la semi-circunferencia descrita sobre AB como diámetro por la parte superior de esta recta; pero en la porcion de plano situado bajo ella, el lugar de los puntos desde donde esta recta se ve bajo un ángulo recto es la otra mitad de la circunferencia descrita sobre AB como diámetro; luego.

El lugar geométrico de los puntos del plano desde donde una recta dada se ve bajo un ángulo recto, es la circunferencia descrita sobre esta recta como diámetro.

§ IX. Uso de la regla y del compás en los trazados sobre el papel. Trazado de perpendiculares y paralelas; uso de la escuadra.

123. En las aplicaciones de la geometría es necesario trazar las figuras con precision para determinar con exactitud la posicion de un punto, la direccion de una recta, la longitud de esta ó la amplitud de un ángulo. En los problemas que siguen, todos los trazados *gráficos* que habrá necesidad de efectuar se reduciran al de líneas rectas y circunferencias de círculos: los instrumentos que deberémos estudiar al principio son, pues, la *regla*, que sirve para el trazado de líneas rectas y el *compás* para el de circunferencias. Mas adelante darémos á conocer otros instrumentos que abrevian las operaciones.

124. La *regla* (fig. 79) es una plancha longitudinal, comunmente de madera, uno de cuyas lados, por lo menos, debe estar perfectamente recto. Para comprobarlo, se traza con el lado en cuestion una línea AB y se marcan los dos puntos A y

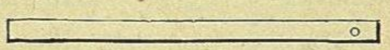

Fig. 79.

B. Despues se vuelve la regla de manera que la otra cara, la de arriba, caiga sobre el papel, y una vez aplicado el borde á los dos puntos marcados, y partiendo aproximadamente del mismo sitio en que concluyó el trazado anterior con relacion á

la regla, se traza otro de nuevo. Si el borde está perfectamente rectilíneo, las dos rectas así trazadas coincidirán entre los puntos A y B; en caso contrario resultarán dos líneas diferentes tales como ACB y ADB (fig. 80).

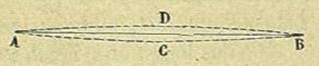

Fig. 80.

Cuando se quiere hacer pasar una recta por dos puntos dados, se coloca la regla sobre el papel de modo que el borde toque los dos y despues con la punta de un lapiz fino ó con un tiralíneas se hace el trazo á lo largo del borde de la regla.

125. El *compás* (fig. 81) es un instrumento formado de dos brazos unidos por un ege en torno del cual pueden girar rozando suavemente. Estos dos brazos pueden terminar en dos puntas finas de acero, en cuyo caso se dice que el compás es de *puntas fijas*, ó bien una de ellas se sustituye por un lapiz ó tiralíneas. El ege que une los dos brazos se llama *cabeza* del compás. Sirve este instrumento para tomar las distancias y trazar circunferencias. Para tomar las distancias, se fija una de las puntas en uno de los puntos, se abre el compás con precaucion y de una manera contínua hasta que la otra punta coincida exactamente con el segundo punto dado. La distancia de las dos puntas es la de los dos puntos dados; y levantando el compás sin variar la abertura de los brazos, podrá trasladarse la distancia sobre otra parte cualquiera del papel.

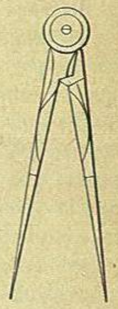

Fig. 81.

Cuando se desea describir una circunferencia cuyo rádio y centro son conocidos, se sustituye una de las puntas metálicas por un lapiz ó tiralíneas; se coloca la punta en el centro, se abre el compás de modo que la distancia entre las dos puntas sea igual al rádio dado, y cogiendo el instrumento por la cabeza se le hace girar cuidando de que la abertura no cambie, y de