que el lapiz ó tiralíneas no se separe del papel, hasta dejar trazada la circunferencia pedida.

126. Problema. *Por un punto C dado en una recta* AB, *levantarle una perpendicular* (fig. 82).

A uno y otro lado del punto C tomamos sobre la recta AB dos longitudes iguales CD y CE. Desde el punto D como centro, con una abertura de compás mayor que DC, describimos un arco de círculo, y desde el punto E como centro, con la *misma anchura de compás*, describimos un segundo arco de círculo que corte al primero en el punto F, el cual se une con el punto C mediante la recta FC que será la perpendicular pedida.

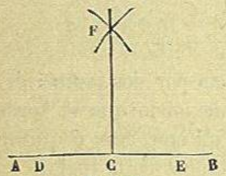

Fig. 82.

Hacemos notar en primer lugar que los dos arcos de círculo se cortarán si se los prolonga suficientemente; porque en efecto, por una parte la distancia de los centros DE es menor que la suma de los rádios, puesto que cada uno de ellos es mayor que la mitad de DE. Y por otra, la distancia de los centros DE es mas grande que la diferencia de los rádios, puesto que los rádios son iguales. De todo ello resulta (**105**) que las circunferencias se cortarán en dos puntos, de los que no consideramos mas que el F.

Decimos ahora que la línea CF es perpendicular á AB, porque, segun la construccion, el punto C y el F están equidistantes uno y otro de los puntos D y E y pertenecen ambos á la perpendicular levantada en medio de DE (**48**) y por consecuencia la línea CF que une estos dos puntos es perpendicular á DE ó á AB. Q. E. L. D.

127. Problema. *Desde un punto fuera de una recta* AB *bajar una perpendicular á dicha recta* (fig. 83).

Desde el punto C como centro, con una abertura de compás suficientemente grande describimos una circunferencia que corte á AB por los dos puntos D, E. Desde estos dos puntos

como centro con un mismo rádio mayor que la mitad de DE describimos dos arcos de círculo que se corten en F, y tiramos CF que es la perpendicular pedida.

La demostracion es idéntica á la que ha sido dada para el problema precedente.

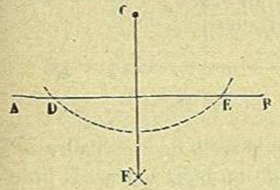

Fig. 83.

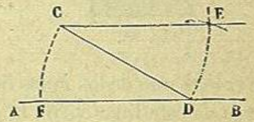

Fig. 84.

128. Problema. Por un punto C dado fuera de una recta AB, trazarle una paralela (fig. 84).

Desde el punto C como centro describimos un arco de círculo DE que corte á AB en el punto D. Desde el punto D como centro y con el mismo rádio trazamos un arco de círculo CF que pase por el punto C y que corte á AB en el punto F. Desde el punto D como centro con un rádio igual á la cuerda del arco CF describimos un arco de círculo que corte al arco DE en el punto E y unimos el punto C con el punto E y esta será la paralela pedida. En efecto : segun la construccion los arcos CF, DE del mismo rádio tienen las cuerdas iguales y por consiguiente son iguales (**88**). Los ángulos centrales CDF, DCE son tambien iguales (**108**), y como son alternos internos, las rectas que los forman son paralelas (**61**).

129. De la escuadra. *La escuadra* es una lámina de madera que tiene la forma de un triángulo rectángulo (fig. 85) y de la que podemos servirnos para el trazado de perpendiculares y paralelas.

Para que una escuadra sea buena, es necesario en primer lugar que sus lados sean perfectamente rectilíneos, lo cual se comprueba como se hizo con la regla. Es menester además que su ángulo sea recto, lo cual se comprobará de la manera siguiente. Se traza sobre el papel una línea recta AB (fig. 86).

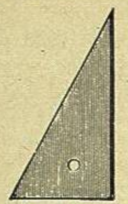

Fig. 85.

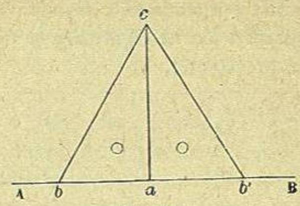

Fig. 86.

Se coloca uno de los lados del ángulo recto de la escuadra *ab* á lo largo de esta línea y con la punta de un lapiz se traza la línea *ac* á lo largo del otro lado del ángulo recto. Se vuelve luego la escuadra, como lo indica la figura, de manera que el lado *ba* venga á parar á *ab'* y quede todavía aplicado á lo largo de la línea AB. Se traza la línea *ac* en esta nueva posicion, y si coincide con la primera, la escuadra está perfecta, porque en este caso los dos ángulos adyacentes *bac*, *b'ac* siendo iguales entre sí, son rectos por la definicion misma del ángulo recto.

130. Problema. *Por un punto* C *tomado fuera de una recta* AB *trazar una paralela á esta recta, sirviéndose de la regla y la escuadra* (fig. 87).

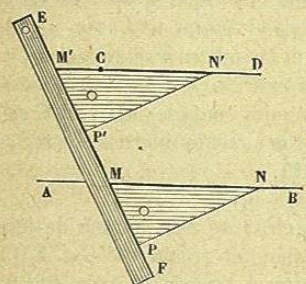

Fig. 87.

Se aplica uno de los lados MN de la escuadra á lo largo de AB, y se coloca una regla EF á lo largo del otro lado MP de la escuadra. Una vez fija la regla EF, se hace deslizar la escuadra hasta que el lado MN pase por el punto C. La línea M'N' es la paralela pedida. En efecto: los ángulos N'M'P, NMP son evidentemente iguales y como son correspondientes, las rectas CD y AB que los forman, son paralelas (**61**).

Observacion. Este modo de trazar las paralelas es muy sencillo y exacto: se ve además que no exige que el ángulo de la escuadra sea recto; basta que los lados sean perfectamente rectilíneos.

131. Problema. *Por un punto tomado sobre una recta* AB, *ó fuera de esta recta, trazarle una perpendicular, sirviéndose de la regla y la escuadra* (figs. 88 y 89).

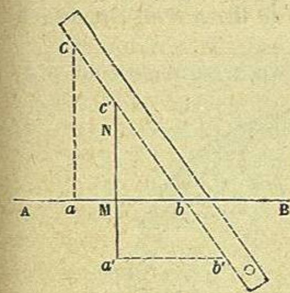

Fig. 88.

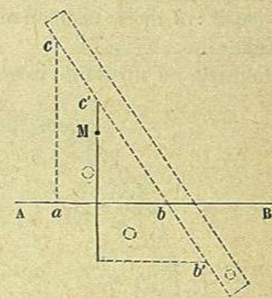

Fig. 89.

En la primera figura el punto M está sobre la recta AB, fuera de ella en la segunda, pero la construccion es la misma.

Se coloca primero la escuadra de manera que uno de los lados del ángulo recto *ab* coincida con la recta AB. Se aplica luego una regla á lo largo de la hipotenusa, teniendo cuidado de mantener la escuadra en la posicion en que se habia colocado. Fijando despues la regla, se corre la escuadra á lo largo de la regla hasta que el otro lado del ángulo recto *ac* venga á pasar por el punto M. La escuadra ocupa entonces la posicion *a'b'c'*, y si se traza la línea MN á lo largo de *a'c'* se tendrá la perpendicular pedida. La razon es obvia: si la escuadra es exacta, *ac* es perpendicular á AB y MN es una paralela á AC trazada por el punto M (**130**); luego MN es perpendicular á AB (**57**).

Observacion. El trazado de perpendiculares con auxilio de la regla y el compás es preferible al precedente, que no alcanza gran precision.

§ X. Valuacion de los ángulos en grados, minutos y segundos. Semi-círculo graduado.

132. Hemos ya explicado cómo los ángulos pueden valuarse en grados, minutos y segundos (**112**); réstanos describir el instrumento mediante el que puede hallarse el número de grados y fracciones de grado que vale un ángulo trazado sobre el papel: á dicho instrumento se le llama semi-círculo graduado.

Consiste en un semi-círculo de asta trasparente ó de cobre,

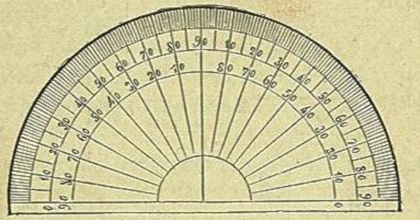

Fig. 90.

vacío (fig. 90) en el centro, y cuyo borde se halla divido en 180 partes iguales ó grados, y si el diámetro es suficientemente grande, cada grado se halla dividido á su vez en medios grados y algunas veces en cuartos de grado.

Para apreciar un ángulo con el semi-círculo se coloca el centro del instrumento en el vértice del ángulo (fig. 91) y su diámetro sobre el lado OA; luego se lee sobre el borde del semi-círculo la division *b* por la cual pasa el otro lado OB del ángulo.

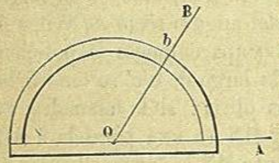

Fig. 91.

El semi-círculo es un instrumento que carece de precision, y aun en el caso que sea de grandes dimensiones y bien construido, cosa rara, no da á conocer sino ángulos con medio grado de error.

§ XI. Problemas elementales sobre la construccion de ángulos y triángulos. — Trazar una tangente por un punto exterior á un círculo. — Trazar á un círculo una tangente paralela á otra dada. — Trazar una tangente á dos círculos. — Describir sobre una recta dada un segmento que pueda contener un ángulo dado.

133. Problema. *Por un punto* A *dado sobre una recta* AB *formar con dicha recta un ángulo igual á otro dado* M (fig. 92).

Desde el vértice M como centro, con un radio cualquiera se describe un arco de círculo NP y desde el punto A como centro y con igual rádio se describe otro arco de círculo que corte á AB en el punto C. Desde el punto C como centro, con un rádio igual á la cuerda del arco PN se describe un arco de círculo que corte al arco CD en el punto D y se une A con D y el ángulo BAD es el ángulo pedido. En efecto: los arcos CD y PN del mismo rádio son iguales por tener cuerdas iguales (**91**) y por esta razon los ángulos centrales A y M que comprenden arcos iguales en círculos iguales, son iguales tambien. (**108**). Q. E. L. D.

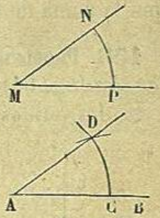

Fig. 92.

134. Observacion. El círculo graduado podria igualmente servir para resolver este problema, para lo cual se determinaria previamente el número de grados del ángulo dado M; despues se colocaria el semi-círculo de manera que, estando el centro en A, su diámetro tomara la direccion AB, para enseguida con la punta del lapiz marcar sobre el papel el punto en que cae la division del semi-círculo correspondiente á la medida del ángulo M, y juntar luego este punto con el punto A. Pero este procedimiento hemos dicho ya que carece de precision.

135. Problema. *Dados dos ángulos de un triángulo construir el tercero.*

Sean A y B los dos ángulos dados (fig. 93). Trazamos una recta indefinida MN y en el punto O tomado á voluntad sobre dicha línea formo con OM un ángulo MOC igual al ángulo A; en el mismo punto O formo con OC un ángulo COD igual al ángulo B; y el ángulo DON será el pedido, porque la suma de este ángulo y de los A y B es igual á dos rectos (**65**).

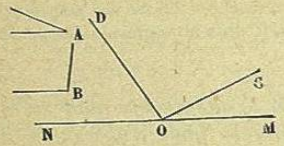

Fig. 93.

Observacion. El problema no es posible sino en el caso en que la suma de los ángulos A y B es inferior á dos rectos.

136. Problema. *Dividir una recta dada* AB *en dos partes iguales* (fig. 94).

De los puntos A y B como centros, con un mismo rádio mayor que la mitad de AB se describen dos arcos de círculo que se cortan en C por la parte superior de AB; y haciendo la misma operacion por la parte de abajo para determinar el punto D, y uniendo C con D, tendremos la perpendicular CD. Con efecto : los puntos C y D están cada uno á igual distancia de los puntos A y B; luego pertenecen á la perpendicular levantada en medio de AB, (**48**) y CD por tanto es esta perpendicular y el punto E es el medio de AB.

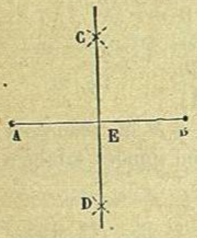

Fig. 94.

137. Problema. *Dividir un arco de círculo en dos partes iguales.*

Por igual procedimiento que el anterior se levanta una perpendicular en medio de la cuerda, y dicha perpendicular pasa tambien por el medio del arco (**89**).

138. Problema. *Dividir un ángulo* AOB *en dos partes iguales* (fig. 95).

Desde el vértice O del ángulo y con un rádio cualquiera se

describe un arco de círculo BA. Desde los puntos B y A con un rádio mayor que la mitad de la cuerda BA se describen dos arcos de círculo que se corten en C, y OC es la bisectriz pedida. Evidentemente : los puntos O y C, estando cada uno á igual distancia de los puntos B y A, la línea OC es perpendicular en medio de la cuerda AB; divide por tanto al arco en dos partes iguales en el punto D (**92**) y por consecuencia los ángulos BOD, DOA son iguales (**108**).

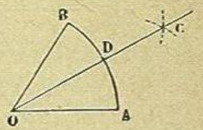

Fig. 95.

139. Problema. *Construir un triángulo del que se conoce un lado y dos ángulos.*

Dados dos ángulos de un triángulo, se encuentra el tercero restando de dos rectos el valor de los dos ángulos dados (**135**). Puede, pues, suponerse que se conocen un ángulo y los dos ángulos adyacentes.

Sea, esto sabido, *c* el lado conocido (fig. 96), A y B los dos ángulos tambien dados que deben ser adyacentes al lado conocido. Sobre una recta indefinida tomenos la longitud AB igual á *c*; en el punto A formemos un ángulo BAC igual al ángulo dado A; en el punto B, un ángulo ABC igual al ángulo dado B. Prolongadas las dos rectas AC y BC se cortan en el punto C y el triángulo ABC es el pedido.

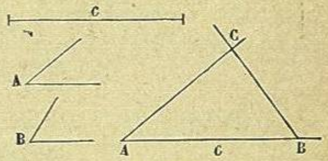

Fig. 96.

Observacion. Para que el problema sea posible, es necesario que la suma de los ángulos dados sea menor que dos rectos.

140. Problema. *Construir un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos.*

Sean *b* y *c* los lados conocidos (fig. 97) y A el ángulo dado. Formo un ángulo igual á A, y á partir de su vértice, tomo sobre uno de sus lados una longitud $AC = b$, y sobre el otro

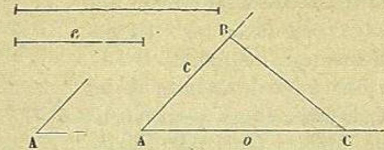

Fig. 97.

lado, otra $AB = c$. Unimos despues BC y el triángulo ABC es el pedido.

141. Problema. *Construir un triángulo del que se conocen los tres lados.*

Sean a, b, c los tres lados conocidos (fig. 98). Sobre una recta indefinida tomamos una longitud BC igual á a; desde el punto B como centro y con un rádio igual á c describimos una circunferencia; y desde el punto C como centro describimos, con un rádio igual á b, otra circunferencia que corta á la primera en dos puntos A y A′. Los dos triángulos BAC y BA′C son iguales al pedido y cualquiera de ellos será el que deseamos.

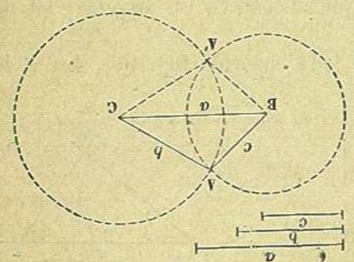

Fig. 98.

142. Observacion. Para que el problema sea posible es necesario que las dos circunferencias se corten, y para ello es bastante que la distancia de los centros sea menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia; es decir, que el lado a sea mas pequeño que la suma de los otros y mayor que su diferencia; luego:

Para que pueda construirse un triángulo con tres longitudes determinadas como lados, es necesario que una de dichas longitudes sea menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

143. Problema. *Por un punto A dado en una circunferencia de círculo, trazar una tangente á este círculo* (fig. 99).

Trazemos el radio OA y en el extremo le levantamos una perpendicular que será la tangente pedida (**97**).

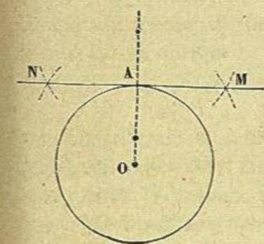

Fig. 99.

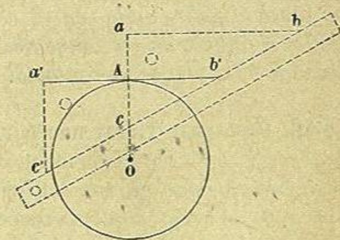

Fig. 100.

La figura 99 indica la construccion llevada á cabo con la regla y el compas (**126**); y la figura 100 la construccion mediante la regla y la escuadra. (**131**). —

144. Problema. *Desde un punto A fuera de un círculo trazar una tangente al mismo* (fig. 101).

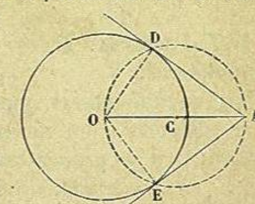

Fig. 101.

Unamos el punto A con el centro O : tomenos la mitad C de la línea OA. Desde el punto C como centro, y con un rádio igual á CO se describe una circunferencia, de la cual AO es el diámetro y la cual corta á la circunferencia O en dos puntos D y E. Se unen despues AD y AE, que son las tangentes pedidas. En efecto : tracemos OD, OE y los ángulos ADO, AEO inscritos en semi-circunferencias son rectos (**114**). Las rectas AD, AE son respectivamente perpendiculares en los extremos de los rádios OD, OE y por consiguiente tangentes al círculo O (**97**).

145. Corolario. Los dos triángulos rectángulos AOD, AOE tienen la hipotenusa AO comun, OD = OE como rádios, y por consiguiente son iguales (**47**). Los lados AD y AE son iguales y el ángulo OAD = OAE, como DOA = EOA. De aquí resultan las propiedades siguientes : *Si desde un punto exterior á un círculo se le trazan tangentes, estas son iguales, y la línea que junta el punto dado con el centro, divide en dos partes iguales el ángulo de las tangentes, y el ángulo de los rádios trazados á los puntos de contacto.*

146. Problema. Trazar una tangente á un círculo paralelamente á una recta dada (fig. 102.)

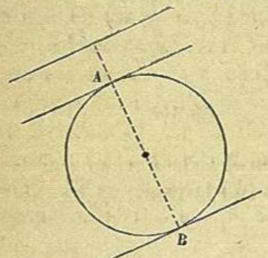

Fig. 102.

Bajemos desde el centro una perpendicular á la recta dada. Dicha perpendicular encuentra al círculo en dos puntos A y B. En cada uno de estos puntos trazamos una paralela á la recta dada, y estas dos son las tangentes pedidas, porque son perpendiculares en los extremos del diámetro AB.

147. Problema. *Trazar una tangente comun á dos circunferencias.*

Dos circunferencias que tocan una misma recta pueden estar colocadas á un mismo lado de esta recta, ó en lados diversos : en el primer caso la tangente comun se llama *exterior;* en el segundo, *interior.*

Busquemos en primer lugar las tangentes comunes exteriores á los círculos O y O′ (fig. 103). Sea AB una de estas tangentes. Tracemos los rádios OA y O′B que terminan en los dos puntos de contacto, y por el centro O′ de la circunferencia menor, trazo O′C paralela á AB. Los dos rádios OA y O′B perpendiculares á una misma recta AB, son paralelos. Las líneas O′B y CA son tambien paralelas comprendidas entre paralelas y por consiguiente son iguales (**72**). Además OC = OA — CA, y como CA = O′B, OC es igual OA — O′B, es decir á la diferencia de los rádios de las dos circunferencias. Tambien,

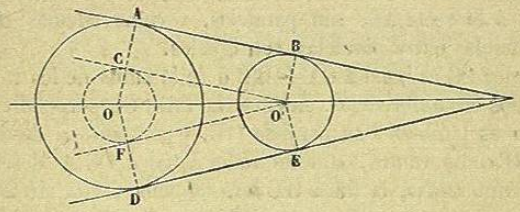

Fig. 103.

OA perpendicular á AB lo es tambien á CO′ paralela á AB Resultando de todo que si desde el punto O, como centro y con un rádio OC describimos un círculo, la línea O′C es tangente á este círculo, puesto que es perpendicular en el extremo del rádio OC.

Se deduce de este análisis la construccion siguiente de la tangente exterior : desde el centro de la circunferencia mayor, con una abertura de compás igual á la diferencia de los rádios se describe una circunferencia, y por el centro O′ de la menor se traza una tangente á la circunferencia que se ha descrito. Se une el punto de contacto C con el centro O, y se prolonga esta línea hasta que en A se encuentre con la circunferencia mayor. Por el punto A se traza una paralela á O′C, y esta línea es la tangente pedida. Como desde el punto O′ pueden trazarse dos tangentes al círculo OC, se obtienen dos tangentes comunes exteriores, AB, DE.

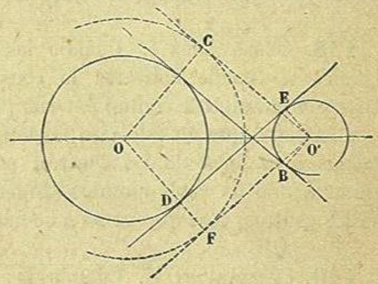

Fig. 104.

Veamos ahora como se trazan las tangentes comunes interiores. Sea AB (fig. 104) una de estas tangentes. Tracemos los rádios OA y O'B que terminan en los puntos de contacto. Por el centro O' de la una de las circunferencias trazamos una paralela O'C á la tangente AB hasta que se encuentre en C con la prolongacion del rádio OA. Las dos líneas O'B y CA perpendiculares á la recta AB, son paralelas, y como ademas están comprendidas entre paralelas, son iguales.

La línea OC es igual á OA + O'B ó á la suma de los rádios de las dos circunferencias. Ademas la línea OC perpendicular á AB lo es tambien á su paralela O'C, y por tanto si desde el punto O como centro, con un rádio igual á OC se describe una circunferencia, la línea O'C será tangente á esta circunferencia.

De ello resulta la construccion siguiente : desde el centro O de una de las circunferencias con una abertura de compás igual á la suma de los rádios se describe un círculo. Desde el centro O' de la otra circunferencia se traza una tangente O'C al círculo que se ha trazado : se traza ademas el rádio OC del punto de contacto, cuyo rádio corta á la primera de las circunferencias dadas en el punto A y por este punto se traza una paralela á O'C que será la tangente comun pedida. Trazando por el punto O' la segunda tangente O'F á la circunferencia OC se obtendrá una segunda tangente comun interior DE.

148. Observacion I. Cuando las dos circunferancias son iguales no puede aplicarse la construccion precedente en cuanto á la tangente comun exterior; pero desde luego se nota con facilidad que en este caso las tangentes exteriores son paralelas á la línea de los centros, por consiguiente, bastará trazar á uno de estos círculos tangentes paralelas á la línea de los centros, cosa que ya se sabe hacer (**146**).

149. Observacion II. Cuando las circunferencias son exteriores una á otra, como en las figuras precedentes, pueden trazarse cuatro tangentes comunes, dos interiores y dos exteriores.

Cuando las dos circunferencias son tangentes exteriormente, pueden trazárseles dos tangentes comunes exteriores y una sola tangente comun interior.

Si las circunferencias se cortan, pueden todavía trazárseles dos tangentes comunes exteriores, pero no tienen tangente comun interior.

Cuando son las circunferencias tangentes interiormente, no tienen mas que una tangente comun que es exterior.

Finalmente, en el caso de ser las circunferencias interiores, no tienen tangente comun.

150. Observacion III. Es útil llamar la atencion sobre el método que hemos seguido para dar solucion al problema precedente, y que lleva por lo comun el nombre de método *analítico*. Hemos supuesto que el problema está resuelto, que está trazada una de las tangentes comunes, y por un análisis exacto de las condiciones que debe reunir esta línea, hemos hallado la construccion que es menester ejecutar para obtener dichas condiciones. Cuando los problemas no ofrecen una solucion inmediata, suele emplearse este procedimiento para hallarla.

151. Problema. *Describir sobre una recta dada* AB *un segmento capaz de un ángulo dado* K (fig. 105.)

Supongamos el problema resuelto y sea O el centro del círculo buscado. Este centro se encuentra en la perpendicular levantada en medio de la recta AB (**89**). En el punto A trazamos la tangente AC al círculo. El ángulo BAC tiene por medida la mitad del arco AB (**118**); luego es igual al ángulo inscrito en el segmento AMB y por consiguiente al ángulo K. Para obtener esta línea AC, se formará en el punto A un ángulo igual al ángulo K. Despues se elevará en el punto A una perpendicular á AC. Esta línea pasará por el centro (**98**). Este quedará determinado por el punto

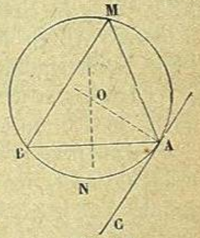

Fig. 105.

de encuentro de la recta AO con la perpendicular levantada en medio de AB. Desde el punto O como centro, con OA por rádio, se trazará una circunferencia cuya porcion AMB, sobre AB será el segmento pedido.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO II

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Dos secantes paralelas interceptan en la circunferancia correspondiente dos arcos iguales. — Caso en que una de las secantes sea tangente ó que lo sean las dos.

2. Dada una circunferencia O y un punto exterior A; desde el punto O, como centro, se describe una segunda circunferencia que tenga un rádio doble del de la circunferancia dada. Desde el punto A como centro, con OA par rádio, una segunda circunferencia que corte la precedente en dos puntos B y C. Júntese OB y OC. Estas líneas cortan la circunferencia dada en dos puntos D y E. Demostrar que AD y AE son tangentes á la circunferencia dada.

3. Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible en un círculo.

4. Si por el punto C, medio de un arco AB de una circunferencia se trazan dos cuerdas, la primera que corte la cuerda AB en D y la circunferencia en E, y la segunda que corte la cuerda AB en F y la circunferencia en G, el cuadrilátero DFGE es inscriptible.

5. Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera forman un cuadrilátero inscriptible,

6. Las perpendiculares bajadas desde los vértices de un triángulo sobre los lados opuestos son las bisectrices de los ángulos del triángulo formado por los piés de estas perpendiculares.

7. Si desde un punto cualquiera de una circunferencia circunscrita á un triángulo se bajan perpendiculares sobre los tres lados de este triángulo, los piés de estas perpendiculares están en línea recta.

8. Si por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes se trazan los diámetros de las dos circunferencias, la línea que une los extremos de estos dos diámetros pasa por el segundo punto de interseccion de las dos circunferencias y corta la cuerda comun en ángulo recto.

9. Si por el punto de contacto de dos circunferencias tangentes se les trazan dos secantes cualesquiera, las cuerdas que pasan por los puntos de interseccion de estas secantes con cada circunferencia, son paralelas.

10. Por un punto A exterior á un círculo O se traza una secante ABC, cuya parte exterior AB es igual al rádio; se junta OB y OC y se traza el diámetro AOD que pasa por el punto A: y esto así, demostrar que el ángulo COD es triplo del ángulo AOB,

11. En un cuadrilátero circunscrito á un círculo, es decir, que sus cuatro lados son tangentes al círculo, la suma de los dos lados opuestos es igual á la de los otros dos; y recíprocamente.

12. Desde un punto A tomado en una circunferencia se trazan dos cuerdas á lados diversos del punto A; la línea que une el medio de los arcos subtendidos por las cuerdas las corta en dos puntos equidistantes del punto A.

12. Se da una circunferencia y dos tangentes á ella, que parten de un punto A. Se traza una tercera tangente variable que forma con las dos primeras un triángulo exterior al círculo. Debe demostrarse que el perímetro de este triángulo es constante, como el ángulo bajo el que se ve desde el centro el lado opuesto al punto A, cualquiera que sea la tangente. — ¿Cómo seria menester modificar el enunciado del teorema, si la tangente variable estuviera trazada de modo que el círculo fuera interior al triángulo formado por las tres tangentes?

14. Las bisectrices de los ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito son perpendiculares.

15. En un triángulo los medios de los tres lados, los piés de las perpendiculares bajadas desde los vértices á los lados y los medios de las distancias del punto de reunion de estas per-

pendiculares á los tres vértices, son nueve puntos de una misma circunferencia.

16. En un triángulo isósceles ABC en el que se supone AB=AC, se traza una circunferencia tangente al lado AB en el punto B y con su centro sobre AC : se prolonga la base BC hasta que encuentre la circunferencia en el punto D. Hay que demostrar que el rádio que pasa por el punto D es perpendicular á AC.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Trazadas por todos los puntos de una circunferencia líneas paralelas iguales entre sí y dirigidas en el mismo sentido, hallar el lugar geométrico de los extremos de estas líneas.

2. Dada una circunferencia y un punto interior, hallar la cuerda memor que pasa por este punto.

3. Trazadas en una circunferencia cuerdas que tengan una misma longitud, hallar el lugar geométrico de los medios de estas cuerdas.

4. Por un punto dado en el plano de un círculo trazar una secante que sea tal que la cuerda comprendida por la circunferencia en esta secante tenga una longitud dada. — Discusion del problema.

5. Por un punto fijo tomado en el plano de un círculo se trazan secantes, y se desea hallar el lugar de los medios de las cuerdas comprendidas en estas secantes.

6. Por un punto de una circunferencia se trazan una infinidad de cuerdas, y cada una se prolonga otro tanto de su longitud. ¿Cúal es el lugar de los extremos de estas rectas?

7. Sea un arco de círculo y su cuerda AB. Se consideran todos los triángulos formados uniendo un punto cualquiera del arco de círculo con las extremos de la cuerda. En cada uno de dichos triángulos se bajan desde los puntos A y B perpendiculares á los lados opuestos, y se desea saber cuál es el lugar geométrico de los puntos de encuentro de estas perpendiculares.

8. Tomados arbitrariamente cuatro puntos en un plano, trazar por estos puntos cuatro rectas paralelas dos á dos, y que formen un cuadrado mediante sus mútuas intersecciones.

9. Describir con un rádio dado un círculo que pase por dos puntos dados.

10. Describir con un rádio dado un círculo que pase por un punto dado tambien y que sea tangente á una recta dada. Discusion.

11. Trazar con un rádio dado un círculo tangente á dos rectas dadas. Discusion.

12. Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y que tenga su centro en una recta ó una circunferencia dada. Discusion.

13. Describir un círculo tangente á tres rectas dadas.

14. Describir un círculo tangente á una recta dada, que pase por un punto dado tambien y que tenga su centro en una línea que pase por este último punto.

15. Construir un triángulo, conociendo dos lados y la mediana que cae en uno de ellos.

16. Construir un triángulo, conociendo dos lados y la mediana que cae sobre el tercero. Discusion.

17. Construir un triángulo, conociendo un lado, el ángulo opuesto, y la distancia del lado dado al vértice opuesto. Discusion.

18. Construir un triángulo, conociendo un lado, el ángulo opuesto y la suma ó la diferencia de los otros dos lados. Discusion.

19. Construir un triángulo, conociendo un lado, uno de los ángulos adyacentes y la suma ó la diferencia de los otros dos lados.

20. Construir un triángulo, conociendo los piés de las perpendiculares bajadas desde los tres vértices á los lados opuestos.

21. Construir un triángulo rectangulo, conociendo la hipotenusa y la diferencia entre esta línea y uno de los lados del ángulo recto.

22. Construir un rectángulo, conociendo un lado y el ángulo de las diagonales.

23. Construir un paralelógramo conociendo las diagonales y su ángulo.

24. Construir un trapecio conociendo los cuatro lados.

25. Construir un pentágono, conociendo los puntos medios de los cinco lados.

26. Trazar por un punto exterior á una circunferencia una secante cuya parte exterior sea igual á la cuerda comprendida por la circunferencia.

27. Por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes trazar una recta tal que la suma de las cuerdas comprendidas sobre esta recta por las dos circunferencias tenga una longitud determinada.

28. Trazar una circunferencia que pase á igual distancia de cuatro puntos dados que no están en línea recta.

29. Una circunferencia gira sin resbalar en el interior de otra circunferencia de rádio doble que la primera, y se desea encontrar la línea descrita por un punto de la circunferencia móvil.

30. Dado un círculo y dos tangentes al mismo, trazar una tercera, cuya parte comprendida entre las dos primeras tangentes sea igual á una longitud dada. (Concurso general de la clase de tercera, 1868.)

31. Dadas dos circunferencias O y O′ que se cortan, se traza por uno de los dos puntos comunes una secante que encuentra la circunferencia O en un punto B y la circunferencia O′ en un punto B′. Se une el punto B con el centro O y el punto B′ con el centro O′. Las dos rectas así trazadas se cortan en un punto M : y se pregunta cuál es el lugar de este punto. (Concurso general de la clase de tercera, 1875.)

32. Dos circunferencias se cortan en dos puntos. Por uno de los puntos comunes se trazan dos rectas rectangulares cualesquiera, que prolongadas cuanto sea necesario, cortan la primera circunferencia en los puntos A y B y la segunda en los A′ y B′. Se trazan las dos líneas AB y A′B′, y se desea encontrar el lugar de su punto de interseccion. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1869.)

33. Dada una recta AB y dos puntos C y D exteriores á esta recta y situados á un mismo lado, encontrar en la recta un punto M, tal que el ángulo CMA sea doble del DMB.

34. Se inscriben en un círculo dado todos los triángulos de los cuales dos lados son respectivamente paralelos á dos rectas fijas dadas, y se pide el lugar de los centros de los círculos inscritos en estos triángulos. (Concurso general de la clase de filosofía, 1873.)