LIBRO III

DE LAS ÁREAS

§ XII. Medida de las áreas. — Área del rectángulo, del paralelógramo, del trapecio, de un polígono cualquiera. — Área aproximada de una figura limitada por una curva cualquiera. — Teorema del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo. — Numerosas aplicaciones numéricas.

152. Definiciones. Se llama *área* la extension de una superficie. Las dos palabras *área* y *superficie*, tienen sentidos diversos, puesto que la segunda se refiere á la forma de la superficie, y la primera á su extension. Cuando no puede haber confusion, en el lenguage usual se dice *superficie* por *área*, y otras veces se emplea la palabra *superficie* como sinónima de *área*.

Dos figuras *equivalentes* son las que tienen áreas iguales, sean ó no superponibles. Así un triángulo puede ser equivalente á un rectángulo, á un paralelógramo, á un un círculo.

153. Se toma por *unidad de área* el área de un cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud: por consiguiente, cuando se toma el metro por unidad de longitud, es necesario tomar por unidad de área el *metro cuadrado*, ó el cuadrado que tiene por lado un metro. Del mismo modo, cuando se miden longitudes por medio del decímetro, se deben medir las áreas tomando como unidad el cuadrado que tiene un decímetro de lado y que se llama *decímetro cuadrado* y así en adelante. Segun esto, las unidades superficiales empleadas en Francia son: el *miriámetro cuadrado*, el *kilómetro cuadrado*, el *hectómetro cuadrado*, el *decámetro cuadrado*, el *metro*, el *decímetro*, *centímetro y milímetro cuadrados*. En la medida de superficies

de los campos se emplean esclusivamente el hectómetro, decámetro y metro cuadrado, á los que se les denomina para el caso *hectárea*, *área* y *centiárea*, y á todas se las llama medidas *agrarias*.

154. El *decámetro cuadrado* vale cien *metros cuadrados*. Con efecto: coloquemos diez metros cuadrados unos al lado de otros á lo largo de una recta AB, y obtendremos un rectángulo de diez metros de largo por uno de ancho: coloquemos despues unos al lado de otros diez rectángulos iguales ál anterior, de manera que se toquen por su longitud, y formaremos evidentemente un cuadrado ABCD, que tendrá diez metros de lado, es decir, un decámetro cuadrado. Dicho cuadrado se compone de diez rectángulos iguales, cada uno de los que contiene diez metros cuadrados. Luego el cuadrado en cuestion vale diez veces diez, ó sean cien metros cuadrados (fig. 106).

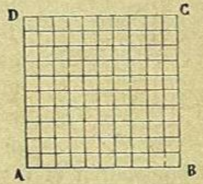


Fig. 106.

De igual manera se demostraria que el miriámetro cuadrado vale cien kilómetros cuadrados; el kilómetro cuadrado 100 hectómetros cuadrados, etc., y en general, *que cada una de las unidades de área vale* 100 *veces la que le sigue inmediatamente en órden inferior de magnitud*. Resulta de esta sencillez de relaciones que bastará para pasar de una de estas unidades á otra, multiplicar ó dividir los números que expresan las áreas, por 100, 10,000 ó 1,000,000, etc. Lo cuál se hace fácilmente sin cálculo.

Cuando, v. g., se exprese un área en hectómetros cuadrados, bastará multiplicar el número que la represente por 100 si se desea expresarla en decámetros cuadrados; por 10,000 si se quiere referir á metros cuadrados y así en adelante.

155. Se llaman *bases* de un paralelógramo dos lados opuestos cualesquiera, y *altura* la longitud de una perpendicular comun á las dos bases. En un rectángulo la base y la altura son dos lados consecutivos del rectángulo : se las llama en este caso usualmente *dimensiones* del rectángulo.

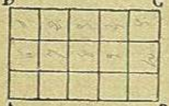
Se llama *base* de un triángulo la longitud de un lado cualquiera; y *altura*, la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice opuesto á esta base.

Por último, se llaman *bases* de un trapecio las longitudes de los lados paralelos, y *altura* la longitud de la perpendicular comun á las dos bases.

156. Teorema. El *área de un rectángulo tiene por medida el producto de su base por su altura.*

Consideremos primeramente el caso en que los lados del rectángulo son dos múltiplos exactos de la unidad de longitud : supongamos, por ejemplo, que la base del rectángulo ABCD (fig. 107) sea igual á cinco metros, y la altura á tres. Dividamos AB en cinco parte iguales; todas ellas serán metros. Por cada uno de los puntos de division de AB se trazan paralelas á AD, y por cada uno de los de AD, paralelas á AB. Estas líneas descompondrán el rectángulo en cuadrados que tienen todos un metro de lado, y que son por tanto metros cuadrados. Basta contarlos : cinco de estos cuadrados se hallan colocados á lo largo de AB y forman un trozo, y el rectángulo entero contiene tres trozos paralelos, esto es, tres veces cinco metros cuadrados, ó en otros términos, su área es igual á :

D C



A B

Fig. 107.

$$5 \times 3 = 15 \text{ metros cuadrados,}$$

y se halla perfectamente expresada por el producto de la base por la altara.

Supongamos en segundo lugar que las dimensiones del rectángulo no sean múltiplos de la unidad de longitud : tomemos, por ejemplo, un rectángulo cuya base sea igual á $5^{m},2$ y cuya altura sea $1^{m},83$. Para referir este caso al precedente, tomo el centímetro por medida de longitud y por consecuencia el centímetro cuadrado por unidad de área ; la base será

520 centímetros y la altura 183 centímetros; y el área del rectángulo será, segun la demostracion precedente,

$$520 \times 183 \text{ centím. cuadrados}$$

Ahora es necesario expresar este área en metros cuadrados : para esto sabemos que el centímetro cuadrado es la diezmilésima parte del metro cuadrado, y que por tanto para referir el área encontrada al metro cuadrado como unidad, bastará dividir el número producido, por 10,000, es decir, separar cuatro cifras decimales de la derecha del producto 520×183, y dará justamente el producto de los dos números decimales 5,2 y 1,83, y el área buscada será por consiguiente

$$5{,}2 \times 1{,}83 = 9^{mc},516.$$

El área se obtiene en casos semejantes, tambien multiplicando los números que representan la base y la altura del rectángulo. Q. E. L. D.

157. Observacion. Es indispensable para que este teorema sea exacto que las dos dimensiones del rectángulo se expresen mediante la misma unidad de longitud, lo cual resulta evidente de la demostracion anterior. Así, cuando se pide el areá de un rectángulo cuya base es igual á 67 metros y la altura por 4 decímetros, será necesario en primer término referir estas dos líneas á una misma unidad, al metro, por ejemplo, lo que dará 67 metros y $0^{m},4$ y por tanto el área será igual á $67 \times 0{,}4 = 26^{mc},8$.

158. Corolario. *El área de un cuadrado tiene por medida el cuadrado de su lado.*

Con efecto : un cuadrado no es otra cosa que un rectángulo cuyas dos dimensiones son iguales entre sí, siendo necesario, para obtener el areá, multiplicar el lado por sí mismo, es decir, formar el cuadrado de este lado.

Resulta de lo dicho que para obtener el lado de un cuadrado cuya área sea conocida, será indispensable extraer la raiz cuadrada del número que exprese la medida de este área Si el área de un cuadradro es, pues, igual á 64 metros cuadrados, el lado de este cuadrado será $\sqrt{64}$ ó sean 8 metros.

Aplicaciones. I. Una parcela de tierra rectangular tiene $258^m,6$ de longitud y $123^m,45$ de anchura, y se desea hallar el área de dicha parcela y expresarla en hectáreas, áreas y centiáreas.

El área es igual á $258^m,6 \times 123^m,45 = 31,924^{mc},17$ y como el área es un decámetro cuadrado, vale por consiguiente 100 metros cuadrados, y como la hectárea vale 100 veces mas ó 10,000 metros cuadrados, el área propuesta equivale á tres hectáreas, 19 áreas, 24 centiáreas, 17 decímetros cuadrados.

II. Uno de los lados de una habitacion es un muro de forma rectangular que tiene $4^m,72$ de largo por $3^m,40$ de altura y se quiere cubrir con papel pintado cuya anchura es $0^m,465$: cuánto papel se necesitará?

Todas las bandas de papel puestas unas á continuacion de otras formarian una superficie rectangular $0^m,465$ de auchura, equivalente á la del muro, es decir, á $4^m,72 \times 3^m,40$ metros cuadrados. Para obtener la longitud del papel bastará dividir $4^m,72 \times 3^m,40$ por $0^m,465$, y la longitud seria

$$\frac{4,72 \times 3,40}{0,465} = 34^m,58,$$

con un centímetro de diferencia.

III. Una losa cuadrada tiene $27^c,5$ de lado: ¿cuál es su área?

Basta formar el cuadrado de 27,5, que es $756^{cc},25$, ó de otro modo 7 decímetros cuadrados, 56 centímetros cuadrados, y veinticinco milímetros cuadrados.

IV. El área de un cuadrado es igual á $17^{mc},368$; ¿cuál es su lado?

Basta extraer la raiz cuadrada de 17,368, que da $4^m,167$ con un milímetro de error.

V. Hallar el lado de un cuadrado equivalente á un rectángulo cuyas dimensiones son: $3^m,2$ y $4^m,75$.

El área del cuadrado es igual á $3,2 \times 4,75 = 15^{mc},2$ y su lado seria igual á la raiz cuadrada de este número, esto es, á $3^m,858$, con un milímetro de diferencia.

159. Teorema. El área de un parolelógramo tiene por medida el producto de su base por su altura (fig. 108).

Sea ABCD el paralelógramo que se va á medir. Por los extremos A y B de la base levanto perpendiculares á esta línea hasta que encuentren el lado opuesto en E y en F, formando de esta suerte el rectángulo ABEF, que digo que es equivalente al paralelógramo ABCD.

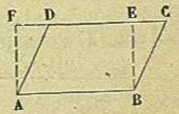


Fig. 108.

En efecto: los dos triángulos rectángulos AFD, BEC tienen las hipotenusas AD y BC iguales como paralelas comprendidas entre paralelas, y los lados AF y BE iguales por la misma razon; luego estos triángulos son iguales (**47**). Esto dicho, si del trapecio ABCF se quita el triángulo ADF queda el paralelógramo ABCD, y si del mismo trapecio se quita el triángulo BEC igual al primero, queda el rectángulo ABEF, y por tanto este rectángulo es equivalente al paralelógramo. Ahora bien: el área del rectángulo tiene por medida $AB \times BE$; luego el área del paralelógramo tiene el producto $AB \times BE$; luego el área del paralelógramo tiene la misma medida, es decir, el producto de su base por su altura, $AB \times BE$. Q. E. L. D.

160. Teorema. *El área de un triángulo tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura* (fig. 109).

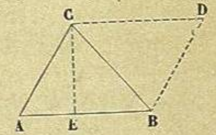


Fig. 109.

Sea ABC un triángulo que tiene por base AB y por altura CE. Por los vértices B y C se trazan paralelas á los lados opuestos y se forma de este modo un paralelógramo ABDC que tiene la misma base AB y la misma altura CE que el triángulo ABC. Los dos triángulos ABC, BCD son iguales por tener los tres lados iguales, y por tanto el triángulo ABC es la mitad del paralelógramo ABCD. El área de este último tiene por medida el producto $AB \times CE$; luego el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura. Q. E. L. D.

161. Corolario I. *Todo triángulo es la mitad del rectángulo que tenga la misma base y la misma altura.* Esto es lo que resulta relacionando los teoremas n.os **156** y **160**.

162. Corolario II. *Dos triángulos que tienen la misma base y la misma altura son equivalentes* (fig. 110). Porque tienen la misma medida.

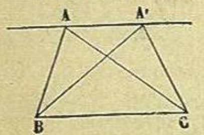


Fig. 110.

Los dos triángulos ABC, A'BC que tienen la misma base BC y sus vértices A y A' en una misma paralela á la base, son equivalentes, porque sus alturas son iguales (**75**).

163. Corolario III. *Dos triángulos que tienen la misma base, son entre sí como sus alturas, y dos triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.* Tomemos primero dos triángulos que tienen la misma base B y sean H y H' sus alturas : las áreas respectivas de dichos dos triángulos serán :

$$\frac{1}{2} B \times H, \qquad \frac{1}{2} B \times H',$$

y la relacion de estas dos áreas se expresará por el cociente

$$\frac{\frac{1}{2} B \times H}{\frac{1}{2} B \times H'}$$

cuyo cociente no cambiara si se dividen sus dos términos por $\frac{1}{2}$ B, resultando igual $\frac{H}{H'}$, es decir á la relacion de las alturas. Q. E. L. D.

El mismo razonamiento servirá para demostrar que la relacion de dos triángulos de la misma altura es igual á la relacion de las bases.

Observacion : Del mismo modo puede demostrarse *que dos rectángulos ó dos paralelógramos que tienen la misma base, son entre sí como las alturas, y que dos rectángulos ó dos paralelógramos que tienen la misma altura, son entre sí como las bases.*

Aplicaciones I. La base de un triángulo es igual á $72^{m},25$ y su altura á $45^{m},40$; y se pregunta cuál será su área.

Será igual á

$$\frac{1}{2}\, 72,25 \times 45,40 = 72,25 \times 22,70 = 1640^{mc},075$$

ó bien 16 decámetros cuadrados, 40 metros cuadrados, 7 decímetros cuadrados y 50 centímetros cuadrados.

II. Hallar el lado de un cuadrado equivalente al triángulo que precede.

Será la raíz cuadrada del número 1640,075 que mide el área, es decir $40^{m},498$ con menos de un milímetro de exceso.

III. El área de un triángulo es igual á $74^{decametc},469$ y su base á $401^{m},8$ y se desea saber cuál será la altura.

Para ello comenzamos por referir el área y la base dadas á unidades correspondientes, el área al metro cuadrado, puesto que la base se refiere al metro. El área será, pues, $7446^{mc},9$ Este número es igual al producto de la base por la mitad de la altura, y por tanto se obtendria esta dividiendo el área 7446,9 por la mitad de la base, por 200,9, de lo cual resultaria $37^{m},068$, con menos de un milímetro de exceso.

164. Teorema. *El areá de un trapecio tiene por medida el producto de la semi-suma de sus bases paralelas por su altura.*

Sea ABCD un trapecio cuyas bases son AB y DC (fig. 111) y cuya altura es DH. Prolonguemos la base AB tanto como sea la longitud de la otra base, $BE = DC$, y tiremos DE que encuentra en F el lado BC del trapecio. Los dos triángulos BEF, CDF tienen los lados BE y CD iguales por construccion, los ángulos BEF, CDF, iguales como alternos internos formados por las paralelas BE y DC cortadas por la secante DE, y los ángulos EBF, DCF iguales por la misma razon, luego los dos triángulos son iguales

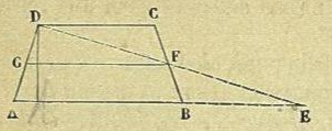


Fig. 111.

(**41**). Si los resto sucesivamente del polígono total AEFCD, el trapecio ABCD y el triángulo ADE, que obtengo como resíduos, son equivalentes. El triángulo ADE tiene por medida $\frac{1}{2}\,AE \times DH$ ó bien $\frac{AB+CD}{2} \times DH$, puesto que $AE = AB + CD$; luego el área del trapecio tiene por medida la expresion $\frac{AB+CD}{2} \times DH$, es decir, el producto de la semi-suma de las bases por la altura. Q. E. L. D.

165. Problema. Construir un triángulo equivalente á un polígono dado ABCDE (fig. 112).

Separemos del polígono un triángulo ABC por la diagonal AC. Por el vértice B tracemos una paralela á AC hasta que encuentre á DC, prolongado hasta F, y unamos A con F. Los dos triángulos ACB, ACF tienen la misma base AC y sus vértices B y F en una misma paralela á la base, y por tanto son equivalentes (**162**), pudiendo reemplazarse el triángulo ABC por el ACF sin alterar el área del polígono, y el nuevo que resulta AFDE es equivalente al polígono dado, con la diferencia de que tiene un lado menos. Siguiendo en esta manera de proceder, se concluiria por llegar á un triángulo GAF equivalente el polígono dado.

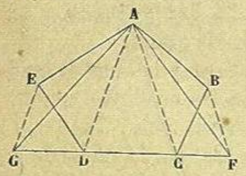


Fig. 112.

166. Problema *Hallar el área de un polígono cualquiera.*
Primer método. Se descompone el polígono ABCDE (fig. 113) dado, en triángulos por medio de diagonales procedentes de un mismo vértice A. Se miden las áreas de todos estos triángulos y se suman. Así en la figura indicada, en la cuál se han trazado las alturas de los diversos triángulos, el área del polígono tiene por medida la suma siguiente

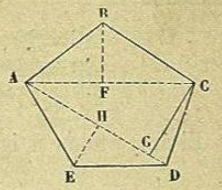


Fig. 113.

$$\frac{1}{2}\,AC \times BF + \frac{1}{2}\,AD \times CG + \frac{1}{2}\,AD \times EH.$$

Segundo método. En el polígono ABCDEFG (fig. 114) trazamos una diagonal AE y desde todos los vértices se bajan perpendiculares á esta diagonal, descomponiendo así el polígono en trapecios y en triángulos rectángulos. Sumando las áreas de los trapecios y de los triángulos, tendremos el área del polígono. Estando las alturas de los trapecios y triángulos dirigidas á la diagonal AE, basta para tener todas las áreas parciales, medir las diversas partes de la diagonal y las perpendiculares BB′, CC′, etc. El área del polígono, tendrá, pues, por medida la suma.

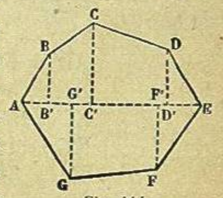


Fig. 114.

$$\frac{1}{2}BB' \times AB' + \frac{BB'+CC'}{2} \times B'C' + \frac{CC'+D'D}{2} \times C'D'$$
$$+\frac{1}{2}DD' \times D'E + \frac{1}{2}FF' \times EF' + \frac{FF'+GG'}{2} \times F'G'$$
$$+\frac{1}{2}GG' \times AG'.$$

Este método es el mas cómodo sobre el terreno.

Tercer método. Se transforma el polígono dado en un triángulo equivalente (**165**) y se mide el área de este triángulo. Este método es el mas rápido, cuando el polígono dado está sobre el papel.

Aplicaciones I. Medir el área del polígono ABCDE (fig. 113) sabiendo que

$$AC = 22^{m}, \quad CG = 11^{m},25,$$
$$AD = 21^{m},30, \quad EH = 6^{m},$$
$$BF = 17^{m},80.$$

El área pedida es igual á

$$\frac{1}{2} \cdot 22 \times 17,80 + \frac{1}{2} \cdot 21,30 \times 11,25 + \frac{1}{2} 21,30 \times 6$$

ó simplificando;

$$11 \times 17,80 + 10,65 \times 17,25 = 203^{mc},2925.$$

II. Medir el área del polígono ABCDEFG, (fig. 114), sabiendo que

$$AB' = 3^{m},80, \quad C'D' = 10^{m},10,$$
$$B'C' = 5^{m},70, \quad D'E = 4^{m},50,$$
$$EF' = 5^{m},80, \quad CC' = 10^{m},82,$$
$$F'G = 11^{m},55, \quad DD' = 7^{m},50,$$
$$G'A = 6^{m},75, \quad FF' = 8^{m},70,$$
$$BB' = 6^{m},40, \quad GG' = 10^{m}.$$

El área pedida será igual á

$$\frac{6,40}{2} \times 3,80 + \frac{6,40 + 10,82}{2} \times 5,70$$
$$+ \frac{10,82 + 7,50}{2} \times 10,10 + \frac{7,50}{2} \times 4,50 + \frac{8,70}{2} \times 5,80$$
$$+ \frac{8,70 + 10}{2} \times 11,55 + \frac{10}{2} \times 6,75.$$

que haciendo todos los cálculos será en resúmen $337^{mc},6005$.

167. Problema. Hallar el área aproximada de una figura limitada por una curva.

Para ello se marcan sobre la curva una porcion de puntos bastante próximos unos á otros, con el fin de que pueda asi-

milarse á una línea recta la parte de curva comprendida entre dos de ellos, y se reemplaza la línea curva por una quebrada, cosa que se obtiene uniendo dos á dos estos puntos. El área del polígono así obtenido difiere poco del área dada, y puede substituirse una por otra. Como se comprende, el error cometido es tanto menor mientras mas próximos se hallen los vértices unos á otros.

168. Teorema. *El cuadrado* BCDE *formado sobre la hipotenusa* BC *de un triángulo rectángulo* ABC, *es equivalente á la suma de los cuadrados* ABFG *y* ACHK *construidos sobre los dos lados del ángulo recto* (fig. 115).

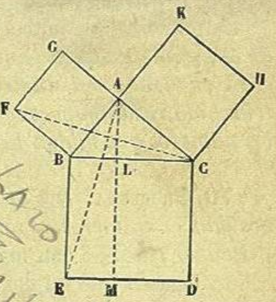


Fig. 115.

Bajemos desde el punto A sobre BC una perpendicular AL que se prolonga hasta encontrarse con DE en M, y decimos que el rectángulo LBEM es equivalente al cuadrado ABFG; porque, uniendo AE y CF, los dos triángulos ABE, FBC tienen el lado AB = FB, como lados de un mismo cuadrado; BE = BC por la misma razon, y el ángulo ABE igual al FBC, como formados los dos agregando un ángulo recto al ABC, y por tanto los dos triángulos son iguales.

Ahora bien: el triángulo ABE tiene la misma base que el rectángulo BEML y la misma altura, puesto que el vértice A del triángulo está sobre la prolongacion de la otra base; luego el área del rectangulo BELM es doble de la del triángulo ABE (164). De igual modo el triángulo FBC tiene la misma base BF que el cuadrado ABFG y la misma altura, puesto que su vértice C está sobre la prolongacion de AG; luego el área del cuadrado ABFG es doble de la del triángulo FBC. Por consiguiente el rectángulo BELM es equivalente al cuadrado ABFG.

Del mismo modo se demostraria que el rectángulo CLMD es equivalente al cuadrado ACHK, quedando demostrado final-