mente que CBDE que es la suma de los dos rectángulos, es equivalente á la suma de los dos cuadrados ABFG, ACHK. Q. E. L. D.

Observacion. El descubrimiento de esta propiedad notable del triángulo rectángulo se atribuye al filósofo griego Pitágoras.

169. Corolario. El área del cuadrado construido sobre BC tiene por medida el cuadrado del número que mida BC; y de igual manera, la medida de los cuadrados formados sobre AB y sobre AC tiene respectivamente por expresion los cuadrados de los números que midan á AB y AC; luego el teorema precedente, puede tambien enunciarse de la manera siguiente:

El cuadrado del número que mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los números que miden los dos lados del ángulo recto.

170. Problema. *Dos lados de un triángulo rectángulo se nos dan en números, y se desea saber cuál es el tercero.*

Primer caso. Se dan los dos lados del ángulo recto.

Supongamos que los dos lados sean iguales uno á $7^m,50$, y el otro á 10^m; el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de estos dos números, es decir á

$$7,50^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25$$

y por consiguiente, se obtendrá la hipotenusa, extrayendo la raiz cuadrada de este número, que será $12^m,5$.

Para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los dos lados del ángulo recto, no hay que hacer mas que sumar los cuadrados de los números dados y estraer la raiz cuadrada de esta suma.

Segundo caso. Se nos dan la hipotenusa y uno de los lados del ángulo recto. Supongamos, v. g: que la hipotenusa sea igual á 5 m. y uno de los lados del ángulo recto á 3 m. El cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los dos lados del ángulo recto. Si, pues, del cuadrado de la hipotenusa se sustrae el cuadrado de uno de los lados del

ángulo recto, se tendrá el cuadrado del otro lado, y en el caso propuesto el cuadrado del lado desconocido será igua á

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de 16 se tendrá el valor del lado, que sera 4 m.

Cuando se conoce en un triángulo rectángulo la hipotenusa y uno de los lados del ángulo recto, para averiguar el valor del otro lado, se resta del cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del lado dado, y se extrae luego la raiz cuadrada de la diferencia que resulte.

171. Problema. *Construir un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados dados.*

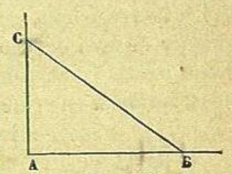

Fig. 116.

Primer caso. Propongámonos, primeramente construir un cuadrado equivalente á la suma de dos cuadrados cuyos lados son conocidos. Sobre los lados de un ángulo recto, se toman á partir del vértice A (fig. 116), dos longitudes AB y AC respectivamente iguales á los lados de los cuadrados dados, y uniendo BC, esta línea es el lado del cuadrado que se busca (**168**).

Segundo caso. Propongámonos, en segundo lugar, construir un cuadrado igual á la diferencia de dos cuadrados dados. Sobre uno de los lados de un ángulo recto tomamos, á partir del vértice A (fig. 116), una longitud AB igual al lado del menor de los dos cuadrados dados, y desde el punto B, como centro, con un radio igual al lado del mayor cuadrado, describimos un arco de círculo que corte en C el otro lado del ángulo recto: AC es el lado del cuadrado que se busca. En efecto: si juntamos BC se forma un triángulo rectángulo ABC, y resulta del teorema n.° **168** que el cuadrado construido sobre AC es equivalente á la diferencia de los cuadrados construidos sobre BC y sobre AB, es decir, á la diferencia de los cuadrados dados.

OBSERVACION. El problema precedente podria servir para construir un cuadrado doble de un cuadrado dado, y tambien para construir un cuadrado equivalente á la suma de muchos cuadrados dados menos la suma de muchos otros cuadrados dados tambien.

§ XIII. Nociones de agrimensura. — Uso de la cadena y de la escuadra de agrimensor.

172. *Medir* un terreno, es apreciar su superficie.

En todo lo que sigue supondrémos que el terreno que se va á medir es llano y horizontal.

Los teoremas que acabamos de demostrar enseñan que para obtener el área de una figura plana hay necesidad de medir líneas rectas y perpendiculares á estas líneas. Es menester, pues, aprender en primer lugar á trazar líneas rectas en el terreno, á medir longitudes, y á trazar perpendiculares á otras rectas.

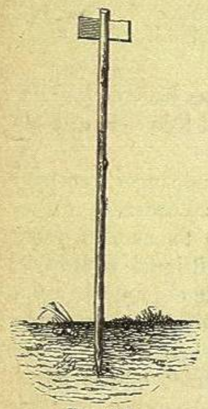

Fig. 117.

173. *Trazado de una línea recta sobre el terreno.* Es raro que se trace efectivamente una línea recta sobre el terreno; limítase la operacion á marcar un cierto número de puntos con auxilio de señales llamadas *jalones*, á lo cual se llama *jalonar una alineacion*.

Un jalon es un baston de madera (fig. 117) de uno á dos metros de altura, aguzado en su extremo inferior, y hendido en el superior longitudinalmente para recibir un cuadrado de papel blanco ó una placa de hojalata pintada de dos colores que se llama *mira*. Supongámos ahora que A y C sean los dos extremos de una línea recta, marcados por dos jalones clavados perfectamente verticales (fig. 118), y que se

quiere colocar un jalon entre A y C en la alineacion determinada por dichos dos puntos. El agrimensor se coloca un poco detrás del jalon A, y envia un ayudante que lleva un jalon en la direccion AC. Mediante señales hechas con las manos

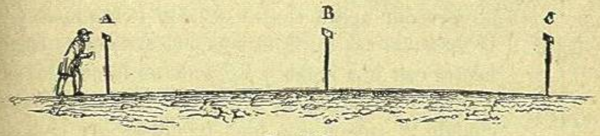

Fig. 118.

hace variar la colocacion del jalon hásta que, mirando en la direccion AC, el jalon A cubra simultáneamente los jalones B y C, en cuyo caso se está seguro de que los pies de los tres jalones estan en línea recta. De igual manera se colocan cuantos jalones se desee, bien entre los puntos A y C ó sobre la prolongacion de la línea AC.

174. *Medida de longitudes sobre el terreno*. Colocándose comunmente los jalones de veinte en veinte metros, no hay que pensar en el emplo del metro para medir tales distancias; se emplea un instrumento llamado *cadena de agrimensor*. Esta (fig. 119) se compone de cincuenta eslabones de hilo grueso de

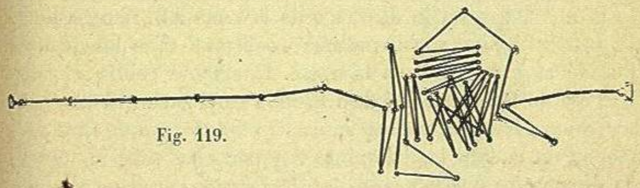

Fig. 119.

hierro, cada uno de los cuales tiene 20 centímetros de longitud, de suerte que la cadena entera tiene la de 10 metros ó un decámetro. Estos eslabones están reunidos por anillos de hierro, sustituidos de cinco en cinco por anillos de cobre que indican los metros: el medio de la cadena está señalado por un anillo de forma particular. Los dos extremos de la misma los forman dos asas de hierro, cuya magnitud está tomada de los eslabones finales. Con la cadena se emplean diez agujas de hierro de 30 á 40 centímetros de altura (figura 120), que suelen llamarse piquetes.

Fig. 120.

Para medir una recta AB (fig. 121) jalonada, el operador apoya contra el jalon extremo A y en la base, el asa de la cadena; el ayudante, cogida la otra con una mano y llevando en la otra las diez agujas, marcha en la direccion AB, deteniéndose cuando la cadena está bien tendida sobre el suelo. Entonces el operador hace que el ayudante cambie á derecha ó izquierda, segun convenga, hasta que la línea trazada en el suelo por la cadena coincida con la alineacion AB. Entonces el ayudante clava en el suelo una aguja en el extremo de la cadena y dentro del asa final que llevaba él cogida. Hecho esto, operador y ayudante se ponen en marcha en la direccion AB, llevando la cadena. Una vez que el agri-

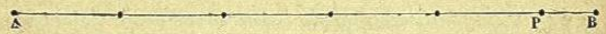

Fig. 121.

mensor llega á la aguja clavada se detiene, apoya contra ella la cadena, y hace que el ayudante clave otra aguja, teniendo cuidado, como la primera vez, de que la cadena esté bien estendida y en la direccion de la recta AB. Recoge luego la primera aguja, y así continua hasta que el ayudante haya llegado al extremo B de la recta. Este apoya contra el jalon B el asa de la cadena que deja tendida en el suelo. El agrimensor avanza hasta la última aguja P; cuenta las que lleva, teniendo en cuenta la del punto P y por ellas sabe el número de decametros que hay entre A y P. Estando la cadena tendida, aprecia el agrimensor el número de metros y dobles decímetros que hay en PB, y con el auxilio de un doble decímetro dividido en centímetros puede apreciar la fraccion de eslabon que queda, si hay alguna, y por tanto puede averiguar la magnitud completa de AB. Supongamos por ejemplo que el número de agujas clavada sea cinco, y que la línea PB contiene cuatro

metros, tres eslabones y diez y ocho centímetros; la longitud AB valdrá 5 decámetros, 4 metros, 6 decímetros, 18 centímetros, ó $54^{m},78$.

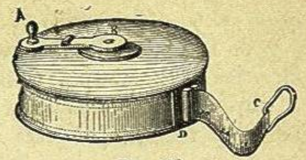

Fig. 122.

Observacion. Para las pequeñas distancias sustituye á la cadena una cinta de hilo engomada, de diez metros de larga, dividida en metros, decímetros y centímetros. Esta cinta se enrolla en un carrete y el todo se encierra en una caja cilíndrica de cuero, cuyo pequeño instrumento toma el nombre de ruleta (fig. 122).

175. *Trazado de perpendiculares sobre el terreno.* El instrumento que se emplea para trazar sobre el terreno líneas perpendiculares á otras se llama *escuadra de agrimensor* ó simplemente *escuadra*. Consiste en una caja cilíndrica ó prismática de cobre, de ocho á diez centímetros de alta por cinco ó seis de diámetro, y cuyo contorno esta hendido por cuatro ventanas verticales que determinan dos líneas de visualidad perpendiculares. Tomemos, por ejemplo, una escuadra prismática de ocho caras (fig. 123). La cara A está hendida en su parte inferior por una hendidura vertical, muy estrecha, y en su parte superior por una ventana rectangular, dividida en sentido de su longitud por un hilo muy fino cuya direccion coincide con la de la hendidura inferior : la reunion de estas dos aberturas así dispuestas se llama una *pínula :* la ventana estrecha se llama *ojetillo* porque se aplica á ella el ojo, y la abertura rectangular se denomina *ventana.* La cara A′ paralela y

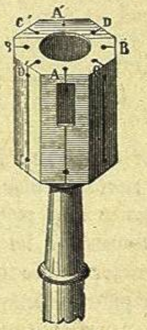

Fig. 123.

Fig. 124.

opuesta á la A presenta una pínula enteramente semejante, con la sola diferencia de que la mira está arriba y la ventana abajo. Si se aplica el ojo al ogetillo de la cara A y se ve el hilo de la ventana de la cara A′, queda así determinada una direccion perfectamente definida; y lo mismo sucederá con la direccion determinada por la hendidura de la cara A′ y el hilo de la ventana de la cara A. Las caras B y B′ llevan igualmente dos pínulas, y el instrumento está construido de modo que la línea de visualidad dada por estas otras pínulas sea perpendicular á la precedente.

La caja termina en la parte inferior por un cubo que sirve para fijarla sobre un baston ferrado que se coloca verticalmente en el suelo, cuando se quiere hacer uso de la escuadra (fig. 124).

Expliquemos ahora el uso de este instrumento. Hay dos problemas que resolver segun que se quiera trazar una perpendicular á una recta por un punto tomado en ella, ó por un punto exterior á dicha recta.

1.º *Trazar una perpendicular á una recta* MN *por un punto* A *de esta recta* (fig. 125).

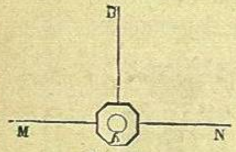

Fig. 125.

El operador coloca en A el baston de la escuadra y hace girar el instrumento hasta que la línea de mira determinada por dos pínulas opuestas pase por el jalon colocado en M. Mira despues en la direcion perpendicular, y hace colocar un jalon en un punto B de esta direccion: la línea determinada por los jalones A y B es la perpendicular pedida.

2.º *Trazar una perpendicular á una recta* MN *por un punto* A *tomado fuera de esta recta* (fig. 126).

El operador coloca la escuadra en un punto O de la línea MN que le parece á simple vista ser el pié de la perpendicular. Comienza por asegurarse de que el punto O esta en la línea MN y al efecto gira la escuadra hasta que á traves de dos pínulas opuestas vea el jalon M. Después, á traves de las mismas pínulas mira en direccion opuesta, y sí el punto O está sobre la

recta, deberá ver el jalon N. Esto hecho, el operador mira en la direccion perpendicular, y lo mas fácil será que la visual no pase por el punto A, que quedará á derecha ó izquierda. Se trasladará entonces la escuadra hácia donde fuere necesario, cuidando de cerciorarse en el nuevo punto de que se halla este sobre la línea MN.

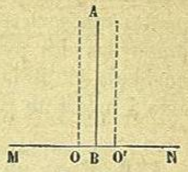

Fig. 126.

Después de algunos ensayos se llegará á encontrar el pié de la perpendicular en el punto B.

176. Problema. *Medir un polígono* (fig. 127).

Se colocan jalones en todos los vértices del polígono dado ABCDEFG, y se jalona sobre el terreno una línea MN, sobre la cual se bajan desde todos los vértices las perpendiculares AA′, BB′, CC′, etc. Se mide con la cadena la porcion de la línea MN comprendida entre los piés A′ y E′ de las perpendiculares extremas, teniendo cuidado de anotar las distancias al punto A′ de todos los jalones B′, C′, D′, F′, G′ que marcan los piés de las perpendiculares.

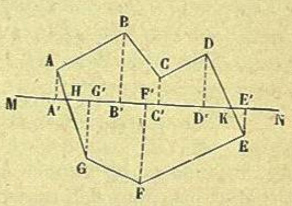

Fig. 127.

Se mide además el largo de todas las perpendiculares, con lo que se tienen todos los datos necesarios para calcular las areas de los triángulos y los trapecios, tales como AA′H, AA′B′B, y por consiguiente el área del polígono.

177. *Medir una porcion de terreno limitado por una línea curva.*

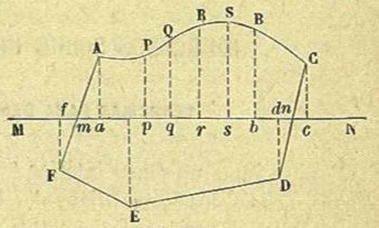

Fig. 128.

Consideremos un terreno limitado en parte par la línea curva ABC (fig. 128).

Se buscan sobre esta curva los puntos P, Q, R, S, bastante próximos para que el arco de curva comprendido entre dos puntos consecutivos difiera poco de la línea recta, que ha de juntar los dos puntos, y se sustituye la curva ABC por la quebrada APQRSBC. Queda desde entonces la operacion reducida á medir un polígono, como se hizo antes.

178. *Medir un terreno cuyo interior no es accesible.*

Se rodea el terreno de otro polígono que ordinariamente es un rectángulo ó un trapecio y se mide de una parte este polígono, y de otra el terreno comprendido entre el perímetro de este polígono y el del terreno dado, hallando después la diferencia de las dos áreas. Así para medir el estanque ABCD.... U (fig. 129) se rodea de un trapecio rectángulo MNPQ, cuya área se obtendria sin dificultad. Después, bajando de los puntos ABC.... U perpendiculares sobre los lados próximos del trapecio, se miden las porciones de terreno comprendidas entre los lados y el borde del estanque. Se suman estas áreas, y se restan del área del trapecio MNPQ y tendremos la superficie del estanque.

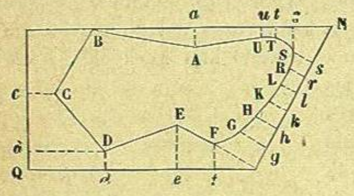

Fig. 129.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO III

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si se junta un punto interior á un paralelogramo con los cuatro vértices, los cuatro triángulos formados son tales, que la suma de los dos triángulos opuestos es equivalente á la suma de los otros dos.

2. Si se unen dos á dos los puntos medios de los lados de

un cuadrilátero, se forma un paralelógramo que equivale á la mitad del cuadrilátero.

3. Dos cuadriláteros que tienen las diagonales iguales é igualmente inclinadas, son equivalentes.

4. El área de un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares tiene por medida la mitad del producto de las diagonales.

5. Si se une un punto P interior á un paralelógramo ABCD á todos los vértices, y se considera los tres triángulos que tienen su vértice comun en el punto P y por bases respectivas la diagonal y los dos lados que parten del mismo punto A, el primero de estos triángulos es igual á la diferencia de los otros dos. ¿Cómo será menester modificar el enunciado del teorema cuando el punto P sea exterior al paralelógramo?

6. Dado un cuadrilátero, por el punto medio de cada diagonal se traza una paralela á la otra diagonal. Estas dos líneas se cortan en un punto que se une con los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero. Estas líneas descomponen el cuadrilátero dado en cuatro cuadriláteros equivalentes.

7. El cuadrado que tiene por lado la diagonal de otro cuadrado, tiene un área doble de la de este cuadrado.

8. Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se construyen triángulos equiláteros, el triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los otros dos.

9. Demostrar que el cuadrado construido sobre la suma de dos líneas A y B es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos líneas, mas dos veces el rectángulo que tiene una de estas líneas por base y la otra por altura.

10. Demostrar que el cuadrado construido sobre la diferencia de dos líneas A y B es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos líneas, menos dos veces el rectángulo que tiene una de estas líneas por base y la otra por altura.

11. Demostrar que la diferencia de los cuadrados construidos sobre dos líneas A y B es equivalente al rectángulo que tiene por base la suma $A + B$ y por altura la diferencia $A - B$.

12. Dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que comprenden el ángulo igual.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es a. Aplicacion al caso en que $a = 5$m.

2. Un trapecio rectángulo tiene un ángulo igual $\frac{2}{3}$ de recto: calcular su área: 1.º cuando se dan las dos bases; 2.º cuando se dan una base y la altura; 3.º cuando se dan una base y la longitud del lado oblícuo á esta base.

3. En un trapezio ABCD, la base mayor AB es igual á 18 m.; los ángulos A y B son iguales los dos á 45º; y los lados no paralelos son los dos iguales á 7 m. Hallar el área de este trapecio y la del triángulo obtenido prolongando los lados no paralelos hasta que se encuentran.

4. El mismo problema suponiendo que los ángulos A y B sean iguales los dos á 60º.

5. Dos triángulos equiláteros están colocados uno al lado del otro de modo que tienen un vértice comun y sus bases en línea recta. Se unen los dos vértices y se obtiene un cuadrilátero, cuya área se pide, sabiendo que los lados de los dos triángulos equiláteros tienen las longitudes respectivamente iguales á a y á b. — Aplicacion al caso en que $a = 1$ m. y $b = 2$ m.

6. Hallar el área de un polígono circunscrito á un círculo de 54 m. de rádio y cuyo perímetro es igual á 432 m.

7. Se construyen cuadrados sobre los tres lados de un triángulo rectángulo; se unen dos á dos los vértices próximos de estos tres cuadrados. Se obtiene así un exágono cuya área se desea conocer.

8. Dividír un triángulo en partes equivalentes por líneas que emanan de un mismo vértice.

9. Dividir un trapecio en partes equivalentes por líneas que encuentren las dos bases.

10. De entre todos los triángulos que pueden construirse con dos lados dados, ¿ó cual esel mayor?

11. De todos los triángulos inscritos en un mismo círculo y teniendo una misma base, ¿cuál es el mayor?

12. ¿Cuál es el mayor de todos los triángulos inscritos en un mismo círculo, teniendo un vértice comun?

13. De entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un mismo círculo, ¿cuál es el mayor?

14. Con diagonales de longitud dada pueden construirse una infinidad de cuadriláteros: ¿bajo que ángulo deben estas diagonales cortarse para que las áreas de estos cuadriláteros sean lo mayor posible?

15. Dos campos están separados por una línea quebrada: se pide sustituir esta línea de separacion por una línea recta, de modo que la superficie de las dos parcelas de tierra no cambie