La perpendicular se obtiene tomando la media proporcional entre los dos segmentos, lo cual da :

$$\sqrt{\frac{25}{13}\times\frac{144}{13}}=\frac{60^m}{13}=4^m,615,$$

con un milímetro de aproximacion.

Finalmente el segundo lado del ángulo recto se halla calculando la media proporcional entre la hipotenusa y el segundo segmento, lo cual da

$$\sqrt{13\times\frac{144}{13}}=\sqrt{144}=12 \text{ metros.}$$

III. Los segmentos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo son iguales á $16^m,15$ el primero, y á $25^m,60$ el segundo, y se trata de calcular los lados del triángulo y la perpendicular.

La hipotenusa es igual á la suma de los dos segmentos, es decir á

$$16^m,15+25^m,60=41^m,75.$$

Los lados del ángulo recto se obtienen por las medias proporcionales, y el priméro es igual á

$$\sqrt{41,75\times16,15}=\sqrt{674,2625}=25^m,773,$$

con un milímetro de aproximacion. El segundo será igual á

$$\sqrt{41,75\times25,60}=\sqrt{1068,80}=32^m,693,$$

con un milímetro de aproximacion.

Ultimmamente la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos, y su valor será por tanto :

$$\sqrt{16,15\times25,60}=\sqrt{413,44}=20^m,333,$$

con un milímetro de diferencia.

IV. Se nos da la perpendicular AD=18 metros y el segmento BD=5 metros y se trata de calcular el otro segmento y los lados del triángulo rectángulo.

De la igualdad

$$\overline{AD}^2=BD\times CD$$

resulta,

$$CD=\frac{AD^2}{BD}=\frac{18^2}{5}=\frac{324}{5}=64^m,8.$$

La hipotenusa será igual á

$$5^m+64^m,8=69^m,8.$$

Los lados del ángulo recto pueden calcularse mediante el teorema del n.º **195** ó bien aplicando el teorema **198** á los triángulos rectángulos ABD, ACD. Empleando el primer procedimiento tendremos :

$$AB=\sqrt{BC\times BD}=\sqrt{69,8\times5}\quad=18^m,681,$$
$$AC=\sqrt{BC\times CD}=\sqrt{69,8\times64,8}=67^m,254,$$

con un milímetro de diferencia.

§. XVII. Teorema relativo al cuadrado del número que expresa la longitud del lado de un triángulo opuesto á un ángulo agudo ú obtuso.

200. Teorema. *El cuadrado del lado de un triángulo opuesto á un ángulo agudo A es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto del uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre el primero* (fig. 114.)

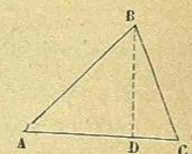

Fig. 114.

Desde el vértice B bajamos la perpendicular BD sobre el lado AC. En el triángulo rectángulo BCD tenemos (198) :

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2; \qquad [1]$$

en el triángulo rectángulo ABD, tenemos igualmente :

$$\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2; \qquad [2]$$

además, observando la figura, resulta que $DC = AC - AD$, y elevando los mienbros de esta igualdad al cuadrado[1] tenemos que

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AC \times AD.$$

Si ahora sumamos las igualdades [1], [2], [3], y hacemos las reducciones consiguientes resultará al fin que :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

201. Teorema. *En un triángulo obtusángulo* ABC *el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso* A *es igual á la suma de los cuadrados de los otros lados, mas dos veces el producto del uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre el primero* (fig. 145.)

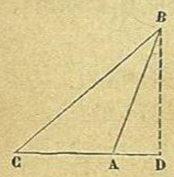

Fig. 145.

Desde el punto B bajamos la perpendicular BD sobre el lado opuesto; en cuyo caso el triángulo rectángulo BCD nos da (**198**) :

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2; \qquad [1]$$

el triángulo rectángulo ABD nos da igualmente

$$\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2; \qquad [2]$$

tenemos además en la figura que $CD = AC + AD$, y elevando al cuadrado[1] los miembros de esta igualdad resulta

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,AC \times AD; \qquad [3]$$

1. Suponemos conocida la composicion del cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos números. Demuéstrase en Aritmética y en Algebra que el *cuadrado de la suma de dos números es igual á la suma de los cuadrados de estos dos números, mas el doble producto del primero por el segundo;* y que *el cuadrado de la diferencia de dos números es igual á la suma de los cuadrados de estos números menos el doble producto de uno por otro.*

sumando ahora las igualdades [1], [2] y [3], tendremos por fin

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AC \times AD. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

202. Corolario. *Un ángulo de un triángulo es agudo, recto ó obtuso, segun que el cuadrado del lado opuesto á este ángulo sea inferior, igual ó superior á la suma de los cuadrados de los otros lados.*

Esto resulta inmediatamente, teniendo al mismo tiempo presente los teoremas de los números **198**, **200** y **201**.

203. Aplicacion. Los teoremas precedentes permiten la resolucion de la cuestion siguiente.

Dados los tres lados de un triángulo hallar la altura que cae sobre uno de los lados y la superficie de este triángulo.

Supongamos que se desea calcular la altura BD (fig. 144 y 145). Se buscará en primer lugar la proyeccion AD del lado AB sobre el lado AC. Si el ángulo A es agudo, tendremos (**200**)

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD;$$

de donde fácilmente se deduce :

$$AD = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AC};$$

si el ángulo A fuese obtuso, tendríamos (**201**)

$$AD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2AC}.$$

Conociendo AD se obtendrá BD en el triángulo rectángulo ABD por la fórmula

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}.$$

Despues, se calcula fácilmente la superficie multiplicando AC por BD y tomando la mitad del producto.

Ejemplo. Se nos da :

$$AB=25^m,$$
$$BC=41^m,$$
$$AC=32^m;$$

y se desea calcular la altura BD y la superficie.

Formamos para ello los cuadrados de los tres lados, que serán

$$\overline{AB}^2=625,$$
$$\overline{BC}^2=1681,$$
$$\overline{AC}^2=1024.$$

$\overline{BC}^2$ es mayor que $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=1649$; luego el ángulo A es obtuso y tendremos

$$AD=\frac{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}{2AC}=\frac{32}{64}=0^m,5.$$

De esto se deduce que

$$BD=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{624,75}=24^m,995,$$

con un milímetro de diferencia. Finalmente, la superficie será :

$$\frac{1}{2}AC\times BD=16\times 24,995=399^{mc},92,$$

con un decímetro cuadrado de diferencia.

§ XVIII. Teorema relativo á las secantes de un círculo que proceden de un mismo punto.

204. Teorema. *Si desde un punto tomado en el plano de un círculo se le trazan secantes, el producto de las distancias desde el punto á los otros dos puntos en que las secantes cortan cada cual la circunferencia es el mismo para todas las secantes.*

Hay que distinguir dos casos :

1.° El punto dado P se halla en el interior de la circunferencia (fig. 146). Trazamos por este punto dos secantes cualesquiera, BPA, DPC, y unimos los puntos C y B, A y D. Los dos triángulos CPB, APD tienen el ángulo D=B, como inscritos en el mismo segmento (**116**), el ángulo C=A, por la misma razon; luego son semejantes (**187**), y resulta la siguiente proporcion:

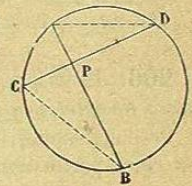

Fig. 146.

$$\frac{PB}{PD}=\frac{PC}{PA},\ \text{ó}\ PB\times PA=PC\times PD.\ \text{Q. E. L. D.}$$

2.° El punto P es exterior á la circunferencia (fig. 147). Desde dicho punto se trazan dos secantes cualesquiera PBA, PDC, y se unen BC y AD. Los triángulos PAD, PCB tienen el ángulo P comun y el ángulo A=C como inscritos en el mismo segmento (**116**) y por consiguiente son semejantes (**187**), y dan la proporcion siguiente :

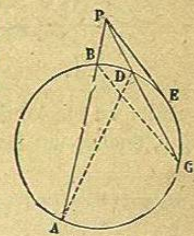

Fig. 147.

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB},\ \text{ó}\ PA\times PB=PC\times PD.\ \text{Q. E. L. D.}$$

205. Corolario. *Si desde un punto* P *tomado fuera de un círculo se le traza una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte exterior* (fig. 147).

Sea PBA la secante y PE la tangente; tracemos por el punto P otra secante PDC, y resultará, pues :

$$PD\times PC=PA\times PB.$$

Si consideramos ahora que la secante PDC gira sobre el punto P aproximándose á PE, los puntos D y C tienden á confundirse en uno solo, en el punto E, y entonces la relacion precedente se convierte en esta otra :

$$\overline{PE}^2=PA\times PB.\quad \text{Q. E. L. D.}$$

§ XIX. Problemas : dividir una recta dada en partes iguales, en partes proporcionales á longitudes dadas. — Hallar una cuarta proporcional á tres líneas dadas, y una media proporcional á dos líneas dadas. — Construir sobre una recta dada un polígono semejante á un polígono dado.

206. Problema. *Dividir una recta en un cierto número de partes iguales.*

Propongámonos, por ejemplo, dividir la recta AB (fig. 148) en cinco partes iguales. Por uno de los extremos A de la recta dada trazamos una línea cualquiera indefinida AG, sobre la cual tomamos, á partir del punto A y una tras otra, cinco longitudes AC, CD, DE, EF, FG iguales entre sí. Despues unimos BG, y por los puntos C, D, E, y F trazamos paralelas á BG. Dichas líneas dividen á AB en cinco partes iguales; porque resulta en efecto, de la demostracion del teorema del nº **180** que, cuando un lado AG de un triángulo se divide en partes iguales, las paralelas al lado BG, trazadas por los puntos de division, dividen al otro lado AB en un mismo número de partes iguales.

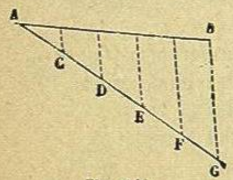

Fig. 148.

207. *Dividir una recta dada* AB *en partes proporcionales á las longitudes dadas* M, N, P (fig. 149).

Por el punto A se traza una recta indefinida cualquiera, sobre la cual tomamos á continuacion una de otra tres longitudes AC, CD, DE respectivamente iguales á las líneas M, N, P. Unimos BE y por los puntos C y D trazamos paralelas á BE, cuyas líneas dividen la línea AB en segmentos proporcionales á las longitudes M, N, P (**182**).

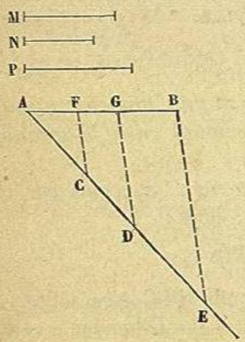

Fig. 149.

Observacion. Si quisiera dividirse la línea AB en partes proporcionales á números dados, como 4, 3 y 5, por ejemplo, tomaríamos una longitud arbitraria como unidad y se construirian tres líneas M, N, P respectivamente iguales á cuatro veces, 3 veces y 5 veces la unidad de longitud, con lo cual, este problema quedaria asimilado al anterior.

208. Problema. Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas M, N, P (fig. 150).

Se llama *cuarta proporcional* á tres líneas dadas el cuarto término de una proporcion en la que figuran como los tres primeros términos las tres líneas dadas. Para construir, pues, la cuarta proporcional á las líneas M, N, P, formo un ángulo cualquiera O y sobre uno de los lados tomo, á partir del punto O dos longitudes OA, OB respectivamente iguales á M y á N, y sobre el otro lado una OC = P. Despues uno AC y trazo BD paralela á AC y OD es la cuarta proporcional pedida; porque los triángulos semejantes OAC, OBD (**183**) dan :

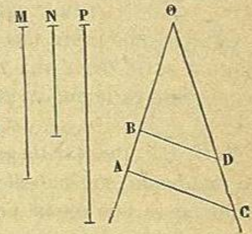

Fig. 150.

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \quad ó \quad \frac{M}{N}=\frac{P}{OD}.$$

209. Problema. *Construir una media proporcional á dos rectas dadas* a *y* b (fig. 151).

Primera solucion. Sobre una recta indefinida tomamos á continuacion una de otra dos longitudes AB, BC respectivamente iguales á a y b. Sobre AC como diámetro describimos una semicircunferencia, y trazamos BD perpendicular á AC, la cual es media proporcional entre AB y BC (**186**, 2.º).

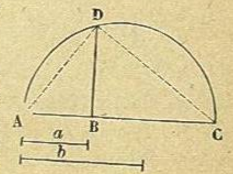

Fig. 151.

Segunda solucion (fig. 152). Sobre una línea indefinida tomamos á partir de un punto A dos longitudes AB y AC respectivamentes iguales á *a* y á *b*. Sobre AC, como diámetro, describimos una semicircunferencia y elevamos BD perpendicular al diámetro, uniendo luego AD. Esta es la media proporcional pedida (**196**, 1.º).

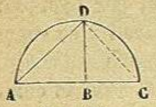

Fig. 152

Tercera solucion (fig. 153). Sobre una línea indefinida tomamos á partir del mismo punto A dos longitudes AC y AB respectivamente iguales á *a* y á *b*. Luego por los puntos B y C haremos pasar una circunferencia cualquiera, desde el punto A se le traza una tangente AD á dicha circunferencia; la tangente es la media proporcional pedida (**205**).

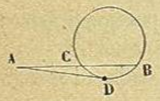

Fig. 153.

210. Corolario. Este problema puede servir para *construir un cuadrado equivalente á un rectángulo;* el lado de este cuadrado es una media proporcional entre la base y la altura del rectángulo. Del mismo modo podria obtenerse el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo buscando una media proporcional entre la base y la mitad de la altura del triángulo. Como además sabemos trasformar un polígono en triángulo equivalente, podria tambien construirse un cuadrado equivalente á un polígono dado.

211. Problema. *Construir sobre una recta dada un polígono semejante á otro polígono dado* (fig. 154).

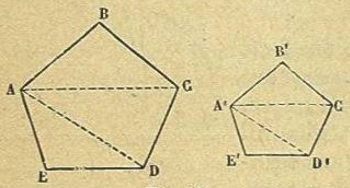

Fig. 154.

Sea ABCDE el polígono dado A'B' el lado dado que debe ser homólogo de AB.

Desde el punto A trazamos en el polígono ABCDE todas las diagonales posibles.

Luego en el punto A' formo con A'B' un ángulo igual á BAC,

y en el punto B', con la misma recta, un ángulo igual á ABC, con la cual resulta un triángulo A'B'C' semejante á ABC (**187**). Formanos por el mismo procedimiento sobre A'C' un triángulo semejante á ACD y así de los demás. El nuevo polígono A'B'C'D'E' será semejante al primero (**191**).

Puede además determinarse cada uno de los vértices del polígono A'B'C'D'E' por la interseccion de rectas que partan todas de los puntos A'B' (fig. 155). Para ello, en el polígono dado se trazarán todas las diagonales posibles por el punto A y por el punto B. Despues se formarán en el punto A' los ángulos B'A'C', C'A'D', D'A'E' respectivamente iguales á los ángulos BAC, CAD, DAE. Lo mismo se hará en el punto B': los ángulos A'B'E', E'B'D', D'B'C' respectivamente iguales á los ángulos ABE, EBD, DBC. Entonces el punto C' se determinará por la interseccion de las rectas A'C' y B'C'; el puuto D' por la de las rectas A'D' y B'D'; y así los demás.

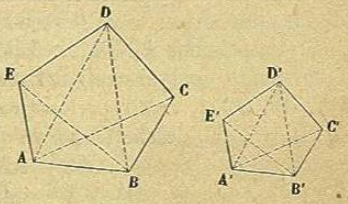

Fig. 155.

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO IV

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Sobre una recta AB se marcan dos puntos M y P tales que $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$. Se toma el medio O de la distancia MP. Hay que demostrar que OM es media proporcional entre OA y OB.

2. La bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes.

3. La línea que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio pasa por los puntos medios de las diagonales, y la porcion de este línea comprendida entre las diagonales es igual á la semidiferencia de las bases del trapecio.

4. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto que está situado á los dos tercios de la longitud de cada mediana á partir desde el vértice.

5. Si desde los tres vértices de un triángulo y desde el punto de reunion de sus medianas se bajan perpendiculares sobre una recta cualquiera del plano exterior al triángulo, la cuarta de estas perpendiculares es igual al tercio de la suma de las otras tres.

6. Un polígono ABCDE.... dado, se unen todos sus vértices á un punto cualquiera O del plano, y se dividen las rectas OA, OB, OC,...... en partes proporcionales en los puntos A′, B′, C′...... de suerte que resulte :

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\cdots$$

y se trata de demostrar que el polígono A′B′C′D′.... es semejante al polígono ABCD.....

7. Dadas dos circunferencias O y O′ se trazan en ellas rádios paralelos y en el mismo sentido : se juntan sus extremos. Todas las líneas obtenidas de este modo encuentran la línea de los centros prolongada en un mismo punto, que se llama *el centro de semejanza externa* de las dos circunferencias.

8. Si en dos circunferencias se trazan rádios paralelos y en sentido contrario, las líneas que unen sus extremos encuentran todas la línea de los centros en un mismo punto que se llama el *centro* de *semejanza interna* de las dos circunferencias.

9. Las tangentes comunes exteriores á dos circunferencias pasan por el centro de semejanza externa, y las tangentes comunes interiores, por el centro de semejanza interna.

10. En un triángulo rectángulo la inversa del cuadrado de la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa es igual á la suma de las inversas de los cuadrados de los lados del ángulo recto.

11. Si desde el punto medio de un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, la diferencia de los cuadrados de los segmentos

determinados sobre la hipotenusa es igual al cuadrado del otro lado.

12. La distancia de un punto de una circunferencia á una cuerda cualquiera es media proporcional entre las distancias de este mismo punto á las tangentes trazadas por los extremos de la cuerda.

13. Si por los extremos de un diámetro de un círculo se le trazan dos tangentes paralelas, la parte de una tercera tangente cualquiera comprendida entre las dos primeras está dividida por el punto de contacto en dos segmentos, cuyo producto es igual al cuadrado del rádio.

14. Cuando dos circunferencias son tangentes exteriormente, la porcion de la tangente comun exterior comprendida entre los puntos de contacto es media proporcional entre los diámetros de las dos circunferencias.

15. La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual á dos veces el cuadrado de la mitad del tercer lado mas dos veces el cuadrado de la mediana que cae sobre este tercer lado.

16. La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual á la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

17. La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la línea que une los puntos medios de las diagonales.

18. El lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos A y B sea constante, es un círculo cuyo centro está en medio de la línea AB.

19. Si se junta un punto M cualquiera tomado en el plano de un triángulo ABC á los tres vértices y al punto de reunion G de las medianas resultará :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{MG}^2.$$

20. La diferencia de los cuadrados de dos lados de un trián-

gulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyeccion sobre este lado de la mediana correspondiente.

21. El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos sea constante, es una línea recta perpendicular á la que une los dos puntos fijos.

22. El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura que cae sobre el tercer lado por el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

23. Si desde un punto P tomado fuera de un círculo O se le trazan dos tangentes, la cuerda que pasa por los puntos de contacto corta el diámetro que pasa por el punto P en un punto Q tal que el producto $OP \times OQ$ es igual al cuadrado del radio.

24. Si desde todos los puntos de una línea recta situada en el plano de un círculo se trazan á este círculo dos pares de tangentes, las cuerdas que pasen por los puntos de contacto de cada uno de los pares de tangentes encuentran en un punto fijo el diámetro perpendicular á la recta dada. Este punto se llama el *polo* de la recta. — Recíprocamente.

25. Cuando tres circunferencias son secantes dos á dos, las tres cuerdas comunes concurren á un mismo punto.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Inscribir en un triángulo un rectángulo semejante á un rectángulo dado.

2. Hallar el lugar de los puntos tales, que la relacion de sus distancias á dos rectas fijas sea igual á una relacion dada.

3. Dado un cuadrilátero ABCD hallar en el interior un punto S tal, que si se le une con todos los vértices, las áreas de los cuatro triángulos formados de este modo sean iguales dos á dos, es decir, que tengamos $ASB = CSD$ y $ASC = BSD$ Concurso general de la clase de filosofía, 1867).

4 Se nos da un triángulo ABC rectángulo en A. A la hipotenusa BC se le traza una perpendicular que corta en D el lado AB y en E el lado AC. Se une BE y CD. Se trata ahora de encontrar el lugar descrito por el punto de interseccion de estas dos rectas, cuando la perpendicular á la hipotenusa se mueve.

5. Unimos un punto fijo tomado en el plano del círculo á todos los puntos de la circunferencia, y dividimos las líneas así obtenidas en segmentos proporcionales. Esto hecho, se desea hallar el lugar geométrico de los puntos de division.

6. Hallar el lugar en que se juntan las medianas de los triángulos inscritos en un mismo segmento de círculo.

7. Desde un punto dado fuera de un círculo, trazarle una secante tal que la cuerda comprendida sea media proporcional entre la secante entera y su parte exterior.

8. Determinar sobre una recta AB dos puntos que sean tales que la relacion de sus distancias á dos puntos A y B sea igual á la relacion de dos líneas dadas M y N.

9. Construir un triángulo rectángulo, conociendo uno de los lados del ángulo recto y la suma ó la diferencia de la hipotenusa y del otro lado.

10. Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados y que sea tangente á una recta ó á una circunferencia dada.

11. Describir una circunferencia que pase por un punto dado y que sea tangente á dos rectas dadas.

12. Por un punto dado en un ángulo trazar una secante que corte en los lados longitudes proporcionales á dos líneas dadas.

13. Hallar el área de un trapecio del cual se conocen los cuatro lados.

14. Dados dos círculos hallar el lugar geométrico de los puntos desde donde se le pueden trazar tangentes iguales.

15. Hallar en el interior de un triángulo un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias á los tres vértices sea la mas pequeña posible.

16. Hallar el lugar geométrico de los puntos tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias á los tres vértices de un triángulo sea constante.

17. Dadas dos circunferencias que se tocan exteriormente, se trazan por el punto de contacto A, en las dos circunferencias, las cuerdas AB y AC perpendiculares entre sí. Se juntan por una recta BC los extremos de estas cuerdas y se divide esta recta en dos partes que estén en una relacion dada. Hallar el lugar de los puntos de division. (Concurso general de la clase de tercera, 1870.)

18. Un ángulo recto gira alrededor de su vértice situado en el interior de una circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas comprendidas sobre la circunferencia por los lados de este ángulo y el lugar de las proyecciones de los vértices del ángulo recto sobre estas mismas cuerdas.

19. Un rectángulo ABCD tiene un vértice A fijo : los dos vértices B y D, se mueven sobre una circunferencia dada : ¿cuál es el lugar descrito por el vértice C opuesto al vertice A?

20. Dado un punto fijo P en el plano de un círculo O, se junta este punto P á un punto cualquiera A de la circunferencia y se determina sobre esta recta un punto M tal que el producto $PA \times AM$ sea una constante. Hallar el lugar que describe el punto M cuando el punto A recorre la circunferencia O.

21. Por dos puntos A y B dados en una circunferencia trazar dos cuerdas paralelas cuya suma sea igual á una longitud dada. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1867.)

22. Un ángulo dado gira alrededor de su vértice fijo. Sobre los lados de este ángulo tomamos, á partir del vértice, longitudes variables, pero cuya relacion es invariable y dada. Si los extremos de una de estas longitudes describen una recta de posicion dada, ¿qué línea describirian los extremos de la otra longitud variable? (Concurso académico de Dijon, clase de segunda, 1868.)

23. Dados una circunferencia y dos puntos A y B sobre un mismo diámetro, se unen respectivamente á los puntos A y B los extremos P y Q de un diámetro móvil PQ. Dos rectas PA y QB obtenidas se cortan en un punto M. Se desea hallar el lugar geométrico descrito por este punto M, cuando se hace mover el diámetro PQ. (Concurso general de la clase de tercera, 1866.)

24. Dadas dos circunferencias C y C′ y una recta D perpendicular á la línea de los centros, por cada punto P de la recta se trazan tangentes á una y otra circunferencia, y en cada una de ellas se unen los puntos de contacto. Las dos cuerdas de contacto así obtenidas se cortan en un punto M cuyo lugar geométrico se pide. (Concurso general de la clase de filosofía, 1866.)

25. Dados tres puntos A, C, B en línea recta, se hace pasar por los puntos A y B una circunferencia, se junta el punto C con el medio I del arco AB. Se busca el lugar del punto M donde la línea IC encuentra la circunferencia, cuando el rádio de esta circunferencia varia. (Concurso general de la clase de tercera, 1867.)

26. Dado un punto fijo P en el plano de un círculo O, se trazan por este punto rectas cualesquiera y sobre cada una de ellas se toma un punto M tal que la línea PM sea igual á la longitud de la tangente trazada desde el punto M al círculo. El problema es hallar el lugar del punto M.

27. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno de los lados del ángulo recto es igual á 21 metros, y que la suma de la hipotenusa y del otro lado es doble de esta longitud.

28. Dos móbiles parten al mismo tiempo del vértice de un ángulo recto y recorren los dos lados, el primero con una velocidad uniforme de 12 metros por segundo, y el segundo con una velocidad uniforme ds 16 metros por segundo. ¿Cuánto tiempo necesitarán para alejarse 90 kilómetros?

29. Dos círculos cuyos rádios tienen respectivamente $2^m,5$ y $1^m,2$ de longitud, se cortan de tal manera que las tangentes trazadas por uno de los puntos de interseccion son perpendiculares entre sí, y se pregunta cuál es la distancia de los centros de estos círculos.

30. Dado un círculo cuyo rádio sea de $3^m,19$ de longitud, se le traza una tangente. Se busca sobre esta recta un punto tal que si se une con el centro, la parte exterior de esta secante sea igual al diámetro del círculo. El problema consiste en calcular la distancia de este punto al punto de contacto de la tangente.

31. Dado un círculo cuyo rádio es igual á $4^m,89$ y un punto distante del centro $7^m,28$, calcular la longitud de la tangente trazada desde este punto al círculo.

32. Dos circunferencias se cortan y por uno de los puntos de interseccion se les traza une secante paralela á la línea de los centros. Las longitudes de las cuerdas interceptadas sobre esta secante por las dos circunferencias son 14 metros y 9 metros; la de la cuerda comun 8 metros. El problema es hallar los diámetros de las dos circunferencias.

33. En un triángulo ABC se nos da la base BC igual á 72 metros, la altura que cae sobre el lado BC igual á 45 metros, y la mediana que cae sobre el mismo lado igual á 60 metros. Hallar las longitudes de los lados AB y AC.

34. Dos cuerdas paralelas de un círculo están distantes un metro y sus longitudes respectivas son 6 metros y 8 metros. Hallar el rádio del círculo.

35. Dos circunferencias son tangentes exteriormente; una tiene un rádio de $12^m,45$; la otra, doble. Se les traza una tangente comun exterior y se pide calcular la distancia de los puntos de contacto de esta tangente.

36. Dos circunferencias cuyos rádios son respectivamente iguales á $6^m,80$ y $9^m,75$ se cortan y la distancia de sus centros es igual á $9^m,60$. Calcular la longitud de la cuerda comun.

37. Se nos dan dos lados de un tirángulo ABC, $AB = 16$ metros, $AC = 24$ metros, el ángulo $A = 60^o$. El problema es calcular la altura que cae sobre AC, el área del triángulo, el lado BC y la altura que cae sobre este lado.

38. En un círculo cuyo rádio tiene una longitud de $3^m,49$ se inscribe un trapecio cuya gran base es un diámetro y uno de los lados no paralelos igual al rádio. Calcular el área del trapecio.

39. Dos circunferencias cuyos rádios tienen respectivamente 9 metros y 6^m, 50 de longitud son tangentes interiormente. El problema es hallar el área del trapecio que tiene por bases el rádio de la circunferencia mayor que va á parar al punto de contacto, y una cuerda de esta misma circunferencia paralela á la línea de los centros y tangente á la circunferencia menor.

40. Se nos da un círculo cuyo rádio tiene 10 metros, y un punto que dista 3 metros del centro. Por este punto, se trazan dos cuerdas inclinadas 45^o sobre el diámetro que pasa por este punto y á cada lado del diámetro. Hallar el área del cuadrilátero inscrito que tiene por vértices los extremos de estas cuerdas.

41. Los dos lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo tienen 17 metros y 24 respectivamente. Hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto.