LIBRO V

LOS POLÍGONOS REGULARES Y EL CIRCULO

§ XX. Polígonos regulares. — Su inscripcion en el círculo : cuadrado, exágono.

212. Definiciones. Un polígono es *regular* cuando tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales.

Un polígono está *inscrito* en un círculo cuando sus vértices están sobre la circunferencia y recíprocamente, se dice que la circunferencia está en tal caso *circunscrita* al polígono.

Un polígono, está *circunscrito* á una circunferencia cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia, y entonces la circunferencia está *inscrita* en el polígono.

213. Teorema. *Si se divide una circunferencia en partes iguales por los puntos* A, B, C..., *y se reunen los puntos de division, el polígono así formado es regular* (fig. 156).

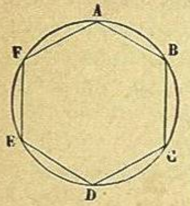

Fig. 156.

En efecto : los lados AB, BC, CD.... son iguales como cuerdas que subtienden arcos iguales, y los ángulos A, B, C.... son iguales como inscritos en los segmentos iguales, formado cada uno por dos de las partes iguales de la circunferencia.

214. Teorema. *Todo polígono regular* ABCDEFGH *puede inscribirse en un círculo y circunscribirse á otro círculo* (fig. 157).

Por los tres vértices A, B, C, haremos pasar una circunferencia, cuyo centro es O, y decimos que pasa tambien por el vértice siguiente D. En efecto : unimos OA, OD, y bajamos OI perpendicular sobre la cuerda BC. En este caso CI será igual á BI (**92**). Hagamos despues girar el cuadrilátero OICD sobre OI para rebatirle sobre OIBA. Los ángulos CIO y OIB son iguales como rectos y la línea IC tomará la direccion IB, y como dichas líneas son iguales, el punto C caerá en el punto B. El ángulo ICD = IBA, supuesto que el polígono es regular. La línea CD tomará la direccion BA y como además CD = BA el punto D caerá sobre A, y por ello OD = OA, y por consiguiente la circunferencia descrita desde el punto O como centro con el rádio OA pasa por el punto D. De igual manera se podria probar que pasa por los otros vértices del polígono, y por tanto este puede ser inscrito en el círculo.

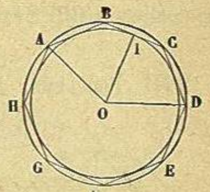

Fig. 157.

Probemos ahora que este mismo polígono puede circunscribirse á otro círculo. En efecto : los lados AB, BC, CD, etc., son cuerdas iguales de la circunferencia circunscrita al polígono; están por esta razon igualmente distantes del centro (**94**) y por consiguiente, si desde el centro O bajamos perpendiculares como OI á todos los lados del polígono, dichas perpendiculares son iguales. La circunferencia descrita desde el punto O como centro con un rádio OI toca todos los lados del polígono en su punto medio y está por consiguiente scrita en el polígono.

215. Corolario. Se llama *centro* de un polígono regular el centro comun de las circunferencias inscrita y circunscrita á dicho polígono. *Rádio* del polígono es el del círculo circunscrito. Al rádio del círculo inscrito se le da el nombre de *apotema*.

Se llama *ángulo central* de un polígono regular el que forman dos rádios consecutivos. Llamando *n* el número de lados del polígono, su ángulo central vale $\frac{4 \text{ rect.}}{n}$, y el ángulo del polígono mismo (**68**) $2 \text{r.} - \frac{4 \text{ rect.}}{n}$.

216. Problema. *Inscribir un cuadrado en un circulo* (fig. 158).

Trazamos dos diámetros perpendiculares AC, BD; unimos sus extremos, con lo cual la figura ABCD es un cuadrado; porque los diámetros perpendiculares dividen la circunferencia en cuatro partes iguales y por consiguiente el polígono ABCD es regular (**215**).

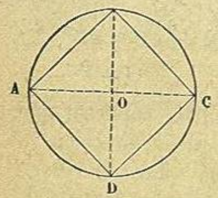
Fig. 158.

217. Corolario. En el triángulo rectángulo AOB tenemos (**198**) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2;$$

de donde se deduce :

$$AB = OA\sqrt{2}, \quad ó \quad \frac{AB}{OA} = \sqrt{2};$$

y por consiguiente la *relacion del lado de un cuadrado inscrito en un círculo con el rádio de este círculo es igual á* $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ es incomensurable, es decir que dicha cantidad no puede expresarse exactamente ni por un número entero ni por un número fraccionario, en lo cual vemos un ejemplo de dos cantidades que no tienen una medida comum.

Observacion. Dividiendo en dos partes iguales los arcos AB, BC, etc., resultaria inscrito un octógono regular, y continuando el procedimiento, se inscribirian polígonos regulares de 16, 32, 64, etc., lados.

218. Problema. *Inscribir en un círculo un exágono regular y un triángulo equilátero* (fig. 159).

Sea AB el lado del exágono regular inscrito en el círculo O. El ángulo central AOB es igual á $\frac{4}{6}$ ó $\frac{2}{3}$ de recto (**215**). La suma de los ángulos OAB, OBA valdrá 2 rect. $- \frac{2}{3}$ rect. $= \frac{4}{3}$ rect. Dichos dos ángulos son iguales puesto que OA = OB : cada uno vale, pues, $\frac{2}{3}$ rect., y el triángulo OAB tiene los tres ángulos iguales; luego es equilátero (**41**) y AB es igual al rádio.

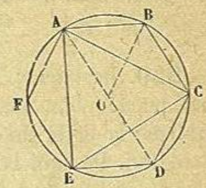
Fig. 159.

Para inscribir, segun esto, un exágono regular en un círculo, basta inscribir una tras otras seis cuerdas iguales al rádio. Uniendo despues de dos en dos los vértices del exágono regular ABCDEF se obtendrá el triángulo equilátero inscrito ACE.

219. Corolario. Tracemos el diámetro AD : el triángulo rectángulo ACD da :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2;$$

ó, llamando R el rádio del círculo

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

y

$$AC = R\sqrt{3};$$

el lado de un triángulo equilátero inscrito es igual al rádio multiplicado por $\sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ es incomensurable; y por tanto el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo y el rádio del círculo no tienen medida comum.

Observacion. Dividiendo sucesivamente en 2, 4, 8, 16...., partes iguales cada uno de los arcos subtendidos por los lados del exágono se inscribirán polígonos regulares de 12, 24, 48, 96.... lados.

§ XXI. Medio de valuar la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro. — Aplicaciones.

220. Definicion. Siendo la circunferencia una línea curva no puede obtenerse inmediatamente su longitud, como se obtiene la de la línea recta, al compararla con la unidad de longitud. De aquí la necesidad de definir lo que debe entenderse por *longitud de una circunferencia.*

Para ello imaginemos que se inscribe un polígono regular en la circunferencia (fig. 160), y que se duplican indefinidamente el número de lados de dicho polígono : se obtendrá de esta manera una serie de polígonos cuyos perímetros irán siempre en aumento pero que no crecerán sin límite, porque cada uno de ellos es mas pequeño que el perímetro de un polígono regular circunscrito, como es fácil comprobarlo. Resulta de aquí que los perimetros de los polígonos regulares inscritos tienden hácia un límite fijo que no pueden jamás alcanzar, pero al cual pueden aproximarse tanto como se quiera : este límite es lo que llamamos longitud de la circunferencia.

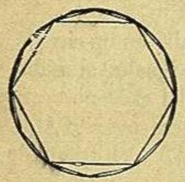
Fig. 160.

La longitud de una circunferencia es el límite hácia el cual tiende el perimetro de un polígono regular inscrito, cuando el número de lados de este polígono aumenta indefinidamente.

Lo mismo se definiria la longitud de un arco cualquiera.

221. Teorema. *Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes, y la relacion de los perímetros es igual á la relacion de los rádios.*

El ángulo de un polígono regular de n lados es igual á

$$2 \text{ r.} - \frac{4 \text{ rect.}}{n};$$

luego dos polígonos regulares de n lados son equiángulos.

Los lados de dichos polígonos son proporcionales, puesto que en cada polígono son todos iguales; luego los polígonos son semejantes.

Sean de otra parte, AB y A'B' los lados de los dos polígonos regulares semejantes; O y O' sus centros (fig. 161); los ángulos AOB y A'O'B' son cada uno igual á $\frac{4 \text{ rect.}}{n}$, y los lados que abrazan estos ángulos proporcionales. Los triángulos AOB, A'O'B' son pues semejantes, y resulta :

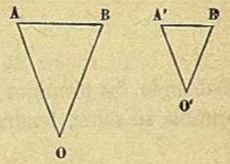

Fig. 161.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

Como la relacion de los perímetros de los dos polígonos es igual á $\frac{AB}{A'B'}$ (**193**), es por ello igual tambien á la relacion de los rádios.

222. Teorema. *La relacion de dos circunferencias es igual á la relacion de sus rádios.*

Si en las dos circunferencias O y O' (fig. 162) inscribimos dos polígonos regulares de un mismo número de lados, la relacion de sus perímetros será igual á la relacion de sus rádios OA y O'A', y esto será verdad por muy grande que sea el número de lados. Cuando se aumenta indefinidamente el número de lados de los dos polígonos, sus perímetros tienen por límites respectivos las longitudes de las dos circunferencias. Luego la relacion de estas es igual á la relacion de los rádios.

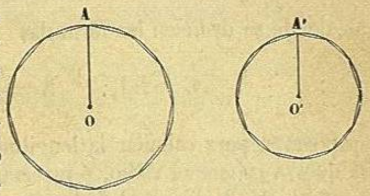

Fig. 162.

223. Corolario. I. *La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante.*

Llamemos C y C′ las longitudes de dos circumferencias cuyos rádios son R y R′, y tendrémos segun el teorema precedente

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}.$$

Doblando los términos de la segunda relacion, con lo cual no cambia su valor, tendrémos

$$\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'};$$

cambiando de lugar el término medio resulta

$$\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'};$$

lo cual significa que la relacion de una circunferencia á su diámetro es igual á la relacion de otra circunferencia con el suyo, ó en otros términos, que la relacion de una circunferencia con su diámetro es un número constante, cualquiera que sea la circunferencia. Q. E. L. D.

Llamando π esta relacion constante, tendrémos

$$\frac{C}{2R}=\pi;$$

de donde se deducen las fórmulas

$$C=2\pi R; \qquad R=\frac{C}{2\pi}=\frac{C}{2}\times\frac{1}{\pi}$$

que sirven para calcular la longitud de una circunferencia de la que se conoce el rádio, é inversamente, el rádio de una circunferencia de longitud dada. Para ello es menester el número π; se demuestra que π es inconmensurable y que su valor aproximado en decimales es

$$\pi=3,14159265358979323846......$$

Pueden tambien tomarse los valores aproximados mas sencillos $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$: en la mayor parte de las aplicaciones se toma

$\pi=3,1416$ valor aproximado en menos de una centésima de milésimo. Tambien es útil conocer el vator de $\frac{1}{\pi}$, que es :

$$\frac{1}{\pi}=0,318309886183790.....$$

Aplicaciones. I. Calcular la longitud de una circufenrencia cuyo rádio es igual á $56^{m},45$.

Tenenos :

$$C=56^{m},45\times2\times\pi=112^{m},90\times\pi=354^{m},686$$

con un milimetro de aproximacion.

II. La circunferencia de una cuenca circular, medida con una cuerda es de $34^{m},62$; ¿cúal es el rádio de esta cuenca?

Tenenos :

$$R=\frac{C}{2}\times\frac{1}{\pi}=17^{m},31\times\frac{1}{\pi}$$
$$=17^{m},31\times0,31830988.....=5^{m},510$$

con un milimetro de aproximacion.

III. Calcular el rádio de un meridiano terrestre suponiendo que la circunferencia de este meridiano sea igual á 40 000 000 metros.

La semi-circunferencia valdrá 20 000 000 metros y por consiguiente el rádio estará dado por la fórmula

$$R=20\,000\,000^{m}\times\frac{1}{\pi}=6366198^{m}$$

con menos de un metro de esceso.

224. Corolario. II. La longitud de un arco de circulo se deduce fácilmente de la longitud de la circunferencia. Sea R el rádio del arco, *n* el n.° de grados de este arco, C su longitud, *l* la longitud de la circunferencia entera, en cuyo caso es evidente que la relacion del arco á la circunferencia es igual á la relacion de n á 360°, y tendrémos :

$$\frac{l}{C}=\frac{n}{360};$$

sustituyendo C por $2\pi R$, tendremos la fórmula

$$l=\frac{2\pi Rn}{360}=\frac{\pi Rn}{180}.$$

Aplicaciones. I. ¿Cuál será la longitud del arco de 48° en una circunferencia cuyo rádio es de 7^{m}?

Tenenos :

$$l=\frac{\pi\times7\times48}{180}=\frac{\pi\times7\times4}{15}=\frac{28\pi}{15}=5^{m},864$$

con un milímetro de diferencia.

II. La longitud del arco de $31^{\circ},17'$ en una circunferencia es de $145^{m},6$, ¿cuál es el rádio de esta circunferencia?

De la fórmula precedente se deduce

$$R=\frac{180l}{\pi n};$$

como en este ejemplo, el arco dado contiene minutos, lo convertimos en minutos así como el número 180 que representa el n.° de grados de la semi-circunferencia, y tendremos entonces :

$$R=\frac{10800\times145,6}{1877\times\pi}=\frac{1572480}{1877}\times\frac{1}{\pi}=266^{m},668,$$

con menos de un milímetro de diferencia.

III. En un círculo, hay un arco de longitud igual al rádio; ¿cuál es el n.° de grados, minutos y segundos de dicho arco?

De la fórmula $l=\frac{\pi Rn}{180}$ se deduce

$$n=\frac{180l}{\pi R}$$

y como en este caso l es igual á R, la fórmula se simplifica y será

$$n=\frac{180}{\pi}=180\times\frac{1}{\pi}=57^{\circ},29577951.....$$

Para valuar en minutos la fraccion decimal de grados, es necesario multiplicarla por 60, de lo cual resulta, trasformada aquella en $17'7467706$; y la fraccion decimal de minutos se convertirá á su vez en segundos multiplicándola tambien por 60, y dará $44''8062....$ Luego el arco pedido vale :

$$57^{\circ}, 17', 44'', 806,$$

con un milésimo de segundo de diferencia.

225. Observacion. *Dos arcos que contienen el mismo número de grados, minutos y segundos tienen longitudes proporcionales á sus rádios*, puesto que para obtener la longitud de un arco es necesario multiplicar su rádio por la cantidad $\frac{\pi n}{180}$, cantidad invariable si la medida del arco en grados, minutos y segundos permanece la misma. Luego si el rádio es doble, triple, cuadruplo, etc., la longitud del arco será al mismo tiempo doble, triple, cuadruplo, etc., es decir, que será proporcional al rádio.

226. Problema. *Dado el lado* c *de un polígono regular inscrito en un círculo que tenga por rádio* R, *calcular el lado* c′ *del polígono regular inscrito de un número doble de lados.*

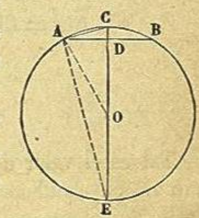

Fig. 163.

Sea AB el lado c dado (figura 163). Trazamos el diámetro CE perpendicular á AB, y AC será el lado c' buscado. Tenemos, pues, (**196**, **1**.°) :

$$\overline{AC}^2=CE\times CD=CE\times(CO-OD);$$

Además

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}};$$

luego

$$c'^2=2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}\right),$$

ó bien

$$c'=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-c^2})}.$$

Aplicaciones. I. Supongamos que el rádio de la circunferencia sea igual á 1, y que el polígono regular dado sea el cuadrado inscrito en el círculo : en este caso $AB=\sqrt{2}$ (**217**), y tendrémos :

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}};$$

y multiplicando por 2 los dos términos de la fraccion debajo el radical, resulta que

$$OD=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

de donde se deduce

$$CD=OC-OD=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

de aquí se sigue

$$\overline{AC}^2=CD\times CD=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times 2=2-\sqrt{2}$$

y

$$AC=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Tal es el valor del lado del octógono regular inscrito en el círculo cuyo rádio es igual á uno.

II. Supongamos, en segundo lugar, que el polígono dado sea el exágono regular, siendo el rádio en todo caso igual á 1.

Entonces $AB=1$ y tendrémos :

$$OD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

síguese de aquí que

$$CD=OC-OD=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

y

$$\overline{AC}^2=CD\times CE=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times 2=2-\sqrt{3},$$

de donde

$$AC=\sqrt{2-\sqrt{3}};$$

que es el valor del lado del dodecágono regular inscrito en el círculo de radio 1.

227. Problema. *Calcular un valor aproximado del número π.*

Tomamos una circunferencia de rádio 1. En este caso la fórmula $C=2\pi R$ nos da $\pi=\frac{C}{2}$ y para tener el valor de π basta calcular la longitud de la semi-circunferencia cuyo rádio es 1. Para ello calcularémos los perímetros de los polígonos regulares inscritos de 4, 8, 16, 32, etc., lados. Estos perímetros serán valores aproximados de C. El lado del cuadrado inscrito en el círculo cuyo rádio es 1 es $\sqrt{2}$ La fórmula del número precedente nos servirá para calcular el lado del octógono regular. Despues calcularemos el lado del polígono regular de 16 lados, y así en adelante. Conocidos los lados de estos polígonos, obtendremos facilmente el de los medios perímetros. He aquí sus valores :

4 lados.	2,82842
8 —	3,06146
16 —	3,12144
32 —	3,13654
64 —	3,14033
128 —	3,14127