y así en adelante. Dichos números son valores cada vez mas aproximadas del número π.

Observacion. Por un método análogo encontró Arquímedes para π el valor aproximado de $\frac{22}{7}$.

§ XXII. Area de un polígono regular. — Area de un círculo, de un sector circular.

228. Teorema. *El área de un polígono regular tiene por medida el producto de su perímetro por la mitad de su apotema.*

Sea ABCDEF un polígono regular (fig. 164). Le descomponemos por medio de rádios OA, OB, OC..... en triángulos, que tienen por bases los lados del polígono, y por altura las líneas iguales OG, OH, etc. Cada uno de estos triángulos tiene por medida el producto de su base por la mitad de la apotema. La suma de todos los triángulos ó el polígono entero tiene por medida la suma de las bases multiplicada por la mitad de la apotema, es decir el producto del perímetro por la mitad de la apotema. Q. E. L. D.

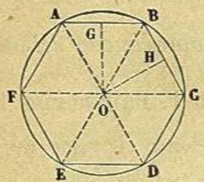

Fig. 164.

229. Teorema. *El área del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del rádio.*

Supongamos que en el círculo dado se inscribe un polígono regular de gran número de lados. El área de este polígono diferirá muy poco de la del círculo, el perímetro del polígono tambien se diferenciará muy poco de la circunferencia y la apotema será próximanente el rádio. Aumentando cada vez mas el número de lados del polígono regular, su área se aproximará indefinidamente de la del círculo, su perímetro tenderá á confundirse con la circunferencia y la apotema llegará á diferenciarse del rádio en una cantidad insignificante. Podremos, segun esto considerar el círculo como un polígono regular de un número ilimitado de lados, que tiene por perímetro la circunferencia y por apotema el rádio, y que en virtud de lo dicho en el teorema anterior, tiene por medida el producto de su circunferencia por la mitad del rádio Q. E. L. D.

230. Observacion. Como anteriormente, llamemos R al rádio del círculo, C á la longitud de la circunferencia, S el área de este mismo círculo, y por el teorema anterior tendrémos :

$$S=\frac{C\times R}{2};$$

pero sabemos por otra parte (**232**) que :

$$C=2\pi R.$$

Podemos, pues, sustituir C por este valor en la primera fórmula y resultará :

$$S=\frac{2\pi R\times R}{2}=\pi R^2, \qquad [1]$$

fórmula que se enuncia en estos términos :

El área del círculo es igual al cuadrado de su rádio multiplicado por el número π.

En vez de sustituir, en la expresion de S, la circunferencia por su valor en funcion del rádio podria por el contrario reemplazarse R por el valor $R=\frac{C}{2\pi}$ (**225**) y tendriamos en este caso :

$$S=\frac{C}{2}\times\frac{C}{2\pi}=\frac{C^2}{4\pi}=\left(\frac{C}{2}\right)^2\times\frac{1}{\pi}. \qquad [2]$$

Esta fórmula, de uso menos frecuente que la anterior, se enuncia así :

El área del círculo es igual al cuadrado de la semi-circunferencia multiplicado por $\frac{1}{\pi}$.

Aplicaciones. I. El diámetro de una pieza de cinco francos en plata es de 37 milímetros, y se desea saber la superficie de esta pieza.

El rádio es igual á $\frac{37^{mm}}{2}=18^{mm},5$; y en este caso la fórmula [1] dará :

$$S=18,5^2\times\pi=1075^{mmc},21,$$

con menos error de una centésima de milímetro cuadrado.

II. La circunferencia de un círculo máximo del globo terrestre es igual á 40 000 kilómetros, y se desea saber la superficie de dicho círculo.

La formula [2] nos dará

$$S=20000^2\times\frac{1}{\pi}=127323954^{kc},$$

con menos de un kilómetro cuadrado de diferencia.

III. Calcular el rádio de un círculo que tuviese la superficie de una hectárea. De la formula [1] se deduce inmediatamente

$$R^2=\frac{S}{\pi};$$

que nos dará en el ejemplo propuesto, tomando el metro por unidad de longitud

$$R^2=10000\times\frac{1}{\pi}=3183,0988;$$

y estrayendo la raiz cuadrada de los dos números

$$R=\sqrt{3183,0998}=56^m,42,$$

con menos de un centímetro de error.

231. Definicion. Se llama *sector de círculo* ó simplemente *sector* la porcion de círculo comprendido entre dos rádios.

232. Teorema. *El área de un sector es igual á la longitud del arco que le sirve de base multiplicada por la mitad de su rádio* (fig. 165).

Sea AOB el sector dado. Inscribamos en el arco AB una línea quebrada que tenga todos sus lados iguales, ACDB, y supongamos que aumenta indefinidamente el número de lados. El área comprendida entre esta línea quebrada y los dos rádios OA y OB se acercará cada vez más al área del sector, á medida que la longitud de la línea quebrada inscrita en el arco AB se aproxime á la del arco mismo. En este caso, haremos ver, como en el número (**228**), que el área del polígono formado por los rádios OA y OB y la línea quebrada inscrita tiene por medida la longitud de esta línea quebrada multiplicada por la mitad de su apotema OG; de donde concluiremos, como hicimos respecto al círculo, que el área del sector es igual á la longitud del arco AB multiplicada por la mitad de OA. Q. E. L. D.

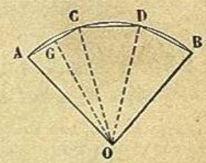

Fig. 165.

233. Observacion. Llamenos R el rádio del sector, l la longitud del arco AB y S el área del sector, y tendrémos segun el teorema precedente,

$$S=\frac{l\times R}{2};$$

y si reemplazamos l por su valor dado en el nº **224**, tendrémos :

$$S=\frac{\pi Rn}{180}\times\frac{R}{2}=\frac{\pi R^2 n}{360},$$

fórmula ordinariamente empleada para calcular el área del sector y que puede servir para resolver muchas cuestiones relativas al sector circular : no nos detenemos en ello.

234. Corolario. *La relacion del área del sector con la del círculo es igual á la relacion del arco del sector con la circunferencia.*

Porque estas dos áreas se obtienen multiplicando por una misma cantidad, que es la mitad del radio, de una parte el arco del sector y de otra la circunferencia; luego su relacion es igual á la del arco con la circunferencia.

§ XXIII. Relacion de las áreas de dos figuras semejantes.

235. Teorema. *La relacion de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la relacion de los lados homólogos.*

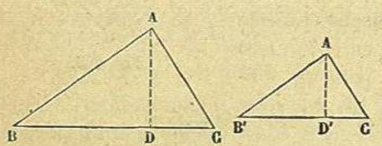

Fig. 166.

1.° Demostraremos en primer término el teorema relativamente á dos triángulos semejantes ABC, A'B'C' (figura 166). Desde los vértices homólogos A y A' trazamos las alturas AD y A'D', y los dos triángulos ABD, A'B'D' tienen los ángulos D y D' iguales como rectos; los ángulos B y B' iguales como homólogos de dos triángulos semejantes; los dos triángulos son pues semejantes (**187**) y dan la proporcion

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'};$$

lo cual vale tanto como decir que en dos triángulos semejantes, la relacion de dos alturas homólogas es igual á la relacion de los dos lados homólogos. Esto dicho, el área del triángulo ABC tiene por medida el producto $\frac{1}{2}BC\times AD$ y la del triángulo A'B'C' es igual á $\frac{1}{2}B'C'\times A'D'$. La relacion de estas dos áreas es, pues, $\frac{BC\times AD}{B'C'\times A'D'}$ que puede escribirse $\frac{BC}{B'C'}\times\frac{AD}{A'D'}$. Pero acabamos de ver que la relacion $\frac{AD}{A'D'}$ es igual á $\frac{AB}{A'B'}$; $\frac{BC}{B'C'}$ es tambien igual á $\frac{AB}{A'B'}$ á consecuencia de la semejanza de los triángulos; luego

la relacion de los triángulos es igual á

$$\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AB}{A'B'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Puede tambien demostrarse este teorema mediante consideraciones por extremo fáciles. Cuando se duplican los lados de un triángulo, las alturas son dobles al mismo tiempo. Si se doblara solamente la base sin cambiar la altura, el área del triángulo doblaria. Si se dobla despues la altura, el área doblaria todavia; luego seria cuatro veces mayor. De igual modo es evidente que triplicando todos los lados de un triángulo, el área será nueve veces mayor y así en adelante; luego las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos.

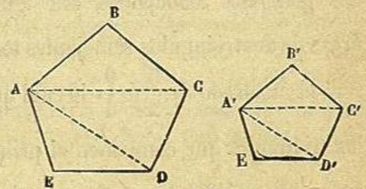

Fig. 167.

2.° Consideramos en segundo lugar, dos polígonos semejantes cualesquiera ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 167); los descomponemos en triángulos semejantes uno á uno, y tendrémos segun lo dicho anteriormente

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}; \qquad \frac{ACD}{A'D'E'}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}; \text{ etc.}$$

De otro lado, siendo semejantes los polígonos, tenemos :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'};$$

y por consecuencia,

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

De todas estas igualdades de relaciones se desprende :

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{ACD}{A'C'D'}=\frac{ADE}{A'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

y finalmente

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{A'B'C'+A'C'D+A'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

Puede darse á esta demostracion otra forma. Supongamos para fijar las ideas que la relacion de los lados homólogos de dos polígonos semejantes sea igual á $\frac{3}{2}$; la relacion de las áreas de dos triángulos semejantes tomados en los dos polígonos será el cuadrado de $\frac{3}{2}$ ó $\frac{9}{4}$, lo cual quiere decir que cada uno de los triángulos que componen el primer polígono es $\frac{4}{9}$ del triángulo correspondiente en el segundo polígono. El primer polígono vale por consiguiente los $\frac{9}{4}$ del segundo, ó en otros términos la relacion de las áreas de estos polígonos es igual á la relacion de los cuadrados de los lados homólogos. Q. E. L. D.

236. Corolario. I. Dos figuras semejantes cualesquiera pueden siempre asimilarse á dos polígonos semejantes reemplazando las líneas curvas por líneas quebradas que difieran poco de las primeras; luego *las áreas de dos figuras semejantes cualesquiera son proporcionales á los cuadrados de las líneas homólogas de estas figuras.*

En particular, *las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.* Puede, por lo demás, demostrarse esto directamente mediante la fórmula que da el área del círculo, cuando se conoce el rádio (**230**). Sean en efecto R y R′ los rádios de los dos círculos, S y S′ las superficies y tendrémos :

$$S=\pi R^2; \qquad S'=\pi R'^2;$$

dividiendo estas dos igualdades miembro á miembro, tendrémos:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\pi R^2}{\pi R'^2};$$

y dividiendo por π los dos términos de la segunda relacion,

cosa que no altera el valor, resultará

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

237. Corolario. II. *Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes, el polígono construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los polígonos construidos sobre los dos lados del ángulo recto.*

Llamemos a á la hipotenusa, b y c los dos lados del ángulo recto del triángulo rectángulo, S, S′ y S″ las áreas de los polígonos semejantes construidos sobre estos tres lados, y tendrémos :

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'}{b^2}=\frac{S''}{c^2};$$

de donde se deduce

$$\frac{S}{a^2}=\frac{S'+S''}{b^2+c^2}.$$

Los denominadores de estas dos relaciones son iguales (**198**); luego lo son tambien los numeradores, y resulta :

$$S=S'+S''. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

EJERCICIOS SOBRE EL LIBRO V

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR

1. Si se divide una circunferencia en partes iguales y por los puntos de division se trazan tangentes á dicha circunferencia, formarán un polígono regular.

2. Si se prolongan de dos en dos los lados de un exágono regular, se obtiene un triángulo equilátero cuyo lado es triple del del exágono. Hallar la relacion de las áreas de estos dos polígonos.

3. El lado del triángulo equilátero circunscrito á un círculo es doble del del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.

4. Si dos arcos de la misma longitud tienen los rádios diferentes, la relacion de los ángulos centrales correspondientes á estos arcos es inversa de la relacion de los rádios.

5. Se obtiene un valor aproximado de la semi-circunferencia tomando la suma de los lados del triángulo equilátero y del cuadrado inscrito en el círculo — Error cometido.

6. Si al triplo del diámetro de una circunferencia se agrega la quinta parte del lado del cuadrado inscrito, se obtiene un valor aproximado de la circunferencia. — Error que se ha cometido.

7. Los lados de los polígonos regulares de 4, 8, 16, 64, etc. lados, inscritos en un círculo cuyo rádio sea 1 tienen por expresion :

4 lados	. . .	$\sqrt{2}$
8	» . . .	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
16	» . . .	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
32	» . . .	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
64	» . . .	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

y así en adelante.

8. El dodecágono regular inscrito en un círculo es equivalente al cuadrado que tiene por lado el lado del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.

9. El área del exágono regular inscrito en un círculo es media proporcional entre las áreas de los triángulos inscritos y circunscritos al mismo círculo.

10. Llamando A y B las áreas de dos polígonos regulares semejantes, el uno inscrito y el otro circunscrito á un mismo círculo, y A′ el área de un polígono regular inscrito de un número doble de lados, A′ es media proporcional entre A y B.

11. Se trazan en un círculo dos cuerdas paralelas, la una igual al lado de un exágono regular, la otra al de un triángulo equilátero : el área de la porcion de círculo comprendida entre estas dos cuerdas es igual á la sesta parte del círculo entero.

12. El área de una corona circular comprendida entre dos circunferencias concentricas tiene por medida la longitud de la circunferencia trazada á igual distancia de las dos primeras multiplicada por la semi-diferencia de los radios.

13. Si se marca un punto C sobre un diámetro AB de una semi-circunferencia, y se describen dos semi-circunferencias sobre los segmentos AC y BC, el área comprendida entre estas tres semi-circunferencias es equivalente al círculo que tenga por diámetro la media proporcional entre AC y BC.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. Inscribir un triángulo equilátero en un cuadrado dado, colocando uno de los vértices del triángulo ora en uno de los vértices del cuadrado, ora en medio de uno de sus lados.

2. Dado un cuadrado sacar de el cuatro triángulos rectángulos isosceles iguales, y de tal condicion que el octógono así obtenido sea regular.

3. Calcular los rádios de los círculos inscritos y circunscritos al triángulo equilátero, al cuadrado y al exágono regular, conociendo la longitud del lado de cada uno de estos polígonos.

4. Dado el rádio R de un círculo, hallar las áreas del triángulo equilátero, del cuadrado, del exágono regular, del octógono regular y del dodecágono regular inscritos en el círculo.

Aplicacion al caso en que R es igual á 1000 metros.

5. Dados tres círculos cuyos rádios son R, R′, R″; construir un círculo equivalente á la suma de estos tres círculos. Si los rádios se expresan en números y se nos da, por ejemplo :

$$R=4^{m},\quad R'=7^{m},\quad R''=12^{m},$$

calcular el rádio del círculo equivalente á la suma de los tres círculos dados.

6. Dada la apotema de un octógono regular igual á $7^m,162$, calcular su superficie.

7. Se inscriben en un círculo dado dos cuerdas paralelas, de las cuales, la una AB es el lado del exágono regular inscrito, y la otra, CD, el del triángulo equilátero inscrito. Se prolongan los rádios OC y OD hasta encontrar á AB prolongada tambien hasta los puntos E y F. Hallar la superficie del círculo que tiene por rádio OE y demostrar que el triángulo OEF tiene una superficie equivalente á la mitad del exágono regular inscrito en el círculo dado. (Concurso académico de Dijon, clase de segunda, 1866.)

8. La superficie de una corona circular es igual á cuatro metros cuadrados, y el espesor de la dicha corona, es decir, la diferencia de los rádios de las dos circunferencias es igual á $3^m,1416$. Calcular los rádios de las dos circunferencias.

9. Calcular las áreas de los segmentos de círculo cuyos arcos son de 90°, de 60°, de 120°; siendo el rádio del círculo igual á $4^m,84$.

10. Sean A y B dos puntos cuya distancia es un metro. Desde cada uno de estos puntos como centro, con un rádio igual á un metro, se describe un círculo. Calcular con un centímetro cuadrado de diferencia el área de la parte comum á los dos círculos. (Concurso general de la clase de filosofía, 1864.)

11. Dado un rectángulo ABCD en el cual la altura AD es la mitad de la base AB (fig. 168), desde los puntos A y B como centros con AD por rádio, describimos dos arcos de círculo DE y CE, y sobre AB como diámetro describimos la semi-circunferencia AKB que corta los arcos precedentes en G y en H. Se pide 1.° calcular la superficie EGKH comprendida entre los dos círculos : 2.° calcular la del cuadrilátero DGHC resultado de unir DG, GH, y HC. Se da como antecedente que $AD = 15^m,35$.

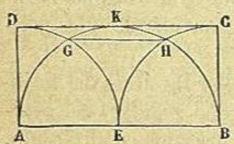

Fig. 168.

12. Dado un paralelógramo ABCD y un punto P en su plano, trazar por este punto P una línea que forme con las rectas AB y AC, prolongadas suficientemente, un triángulo equivalente al paralelogramo.

13. Construir un polígono semejante á otro polígono dado y cuya área esté con respecto á la del polígono dado en la relacion de dos líneas dadas.

14. Dividir un triángulo en partes equivalentes ó proporcionales á líneas dadas por paralelas á la base.

15. Dividir un círculo mediante circunferencias concéntricas en partes equivalentes.

16. Sea un círculo O. Determinar con la regla y el compás un punto exterior S tal que si se traza una tangente SA á la circunferencia y si desde el punto de contacto se baja una perpendicular AP sobre OS, la relacion de los triángulos SAO, PAO sea igual á la de 3 á 2. (Concurso académico de Dijon, clase de tercera, 1865.)

17. Construir un polígono semejante á un polígono dado y equivalente á otro polígono dado tambien.