SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

LIBRO VI

EL PLANO Y LA LÍNEA RECTA

§. XXIV. Del plano y de la línea recta en el espacio. — Perpendiculares y oblícuas al plano.

238. Definiciones. Ya hemos dicho que se llama *plano* la superficie en que la línea recta que une dos puntos cualesquiera de dicha superficie, está toda ella en la misma superficie. Resulta de esta definicion que una línea recta no puede cortar un plano mas que en un solo punto, que se llama *pié* de la recta en el plano.

Una recta que encuentra á un plano se llama *perpendicular* con relacion al mismo, cuando es perpendicular á todas las rectas trazadas por su pié en el plano. Siempre que una recta es perpendicular al plano, reciprocamente este es perpendicular á la recta.

Una recta que encuentra un plano y no es perpendicular á este, es *oblícua* al mismo. Un plano es una superficie indefinida, pero para mayor claridad en las figuras le representarémos siempre limitado dándole la forma de un paralelógramo, forma aproximada de un rectángulo cuando se le mira oblícuamente desde un punto de vista muy lejano.

239. Teorema. *Por dos rectas* AB y AC, *que se cortan puede pasar un plano, pero no mas que uno* (fig. 169).

Representémonos un plano cualquiera trazado por AB y hagámosle girar al rededor de AB hasta que contenga un punto C de la segunda recta. Conteniendo dos puntos A y C de esta recta, contendrá la recta entera, y por tanto contendrá las dos rectas AB y AC.

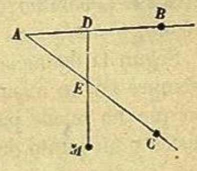

Fig. 169.

Decimos además que por AB y AC no puede pasar mas que un plano. En efecto : supongamos dos planos P y Q que pasan por estas dos líneas, y sea M un punto cualquiera del plano P. Por este punto trazamos en el plano P una recta que encuentre las otras dos AB y AC en los puntos D y E. Estos puntos estarán tambien situados en el plano Q; luego la línea DE y por tanto el punto M estaran contenidos en el plano Q. Todos los puntos del plano P pertenecen, pues, al plano Q, ó en otros términos, los planos P y Q coinciden. Q. E. L. D.

240. Corolario. I. *Por tres puntos* A, B, C, *que no están en línea recta puede pasar un plano, y no puede pasar mas de uno* (fig. 169).

Unamos AB y AC. El plano trazado por estas dos rectas contiene los tres puntos A, B, C, y todo plano trazado por los tres puntos contiene tambien las dos rectas. Por las dos rectas no puede hacerse pasar mas que un plano; luego tampoco puede hacerse pasar mas que uno por los tres puntos, A, B, C. Q. E. L. D.

241. Corolario. II. *Por una recta y un punto exterior á dicha recta puede pasar un plano, pero no mas que uno.*

Si unimos el punto dado á un punto cualquiera de la recta dada, tendrémos dos rectas que se cortan. El plano de estas contiene la recta y el punto dado, y recíprocamente, todo plano que pasa por la recta y el punto dado contiene las dos rectas que se cortan. Estas dos últimas no determinan, segun lo dicho, mas que un plano, y lo mismo debe decirse de la recta y el punto dados.

242. Corolario. IV. *Dos rectas paralelas determinan un plano, y nada mas que uno.*

Segun la definicion misma (**93**) dos rectas paralelas están siempre en un mismo plano y no determinan mas que uno, porque no puede pasar mas que uno solo por una de estas rectas y un punto de la otra (**241**).

243. Observacion. Pueden deducirse de los teoremas que preceden diversos modos de engendrar un plano.

Supongamos que una recta móvil indefinida gira al rededor de uno de sus puntos y se apoya constantemente sobre una recta fija que no pasa por el punto fijo : la recta móvil engendrará el plano determinado por la recta y el punto fijo.

De igual manera, una recta móvil que se mueve paralelamente á ella misma apoyándose constantemente en una recta fija describe un plano.

Lo mismo acontece con una recta que se mueve, apoyándose constantemente sobre dos rectas que se cortan.

244. Teorema. *La interseccion de dos planos es una línea recta* (fig. 170).

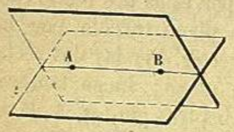

Fig. 170.

Tomemos dos puntos cualquiera A y B sobre la línea de interseccion. Siendo estos dos puntos comunes á los dos planos, la línea recta AB está contenida en cada uno de ellos, y es segun esto la línea de interseccion de los dos planos. Estos no pueden además tener ningun punto comun fuera de esta línea, porque si tuvieran uno solo, coincidirian (**241**), lo cual es contrario al supuesto.

245. Teorema. *Si una recta* AP *es perpendicular á dos rectas* PB, PC *que pasan por su pié en un plano* M, *es perpendicular á este plano* (fig. 171).

Por el punto P trazamos en el plano M una recta cualquiera PD, y decimos que AP es perpendicular á PD. En efecto : cortamos las rectas PB, PC, PD por una misma recta BC y prolongamos la línea AP mas abajo del plano una longitud PA′ = PA. Despues unimos AB, AC, AD, A′D, A′B, A′C. En el plano ABA′, PB es perpendicular en el punto medio de AA′, y por tanto (**48**) BA = BA′. De igual manera CA = CA′; luego los triángulos ABC, A′BC tienen los tres lados iguales y son iguales. Si hacemos girar el triángulo A′BC sobre BC como charnela para aplicarlo sobre su igual ABC, el punto A′ caerá en el punto A, y como el punto D permanece fijo, DA′ coincidirá con DA. Dichas dos líneas son iguales por consiguiente y el triángulo ADA′ es isósceles. La línea DP que junta el vértice de este triángulo con el medio de la base es perpendicular á AP (**39**). Segun esto la línea AP es perpendicular á toda recta que pase por su pié en plano M, y es por ello perpendicular á este plano. Q. E. L. D.

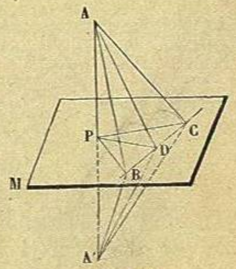

Fig. 171.

246. Teorema. *Por un punto* P *dado en un plano* M *puede siempre trazarse una perpendicular á este plano y no puede trazarse mas que una.*

1.° Trazamos una recta cualquiera BC en el plano M (fig. 172) y desde el punto P bajamos una perpendicular PB sobre esta recta. En un plano cualquiera trazado por BC trazo BA perpendicular á BC y en el plano de las dos rectas PB, BA elevo PA perpendicular á PB. Esta línea PA es perpendicular al plano M.

En efecto : sea PC una recta cualquiera trazada en este plano por el punto P. Prolongamos PA mas abajo del plano otro tanto PA′ = PA, y unimos luego AC, A′B, A′C. La recta CB perpendicular á la vez á las dos rectas PB, BA es perpendicular á su plano PBA (**245**) y por consecuencia á la recta BA′

que pasa por su pié en este plano. Los ángulos CBA, CBA′ son iguales como rectos. En el plano ABA′, BP es perpendicular en el punto medio de AA′; luego (**48**) BA = BA′. Segun esto los dos triángulos ABC, A′BC tienen el lado BC comun, BA = BA′ y el ángulo CBA = CBA′; son por consiguiente iguales y CA = CA′. El triángulo ACA′ es isósceles y por consecuencia la recta CP que junta el vértice con el medio de la base es perpendicular á AP. La recta AP, segun esto, perpendicular á las dos rectas PB y PC que pasan por su pié en el plano M, es perpendicular al mismo (**245**). Q. E. L. D.

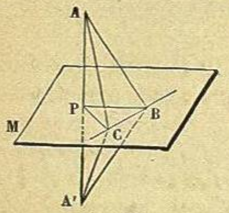

Fig. 172.

2.° Sea PA perpendicular al plano M (fig. 173) PD otra línea cualquiera, y decimos que esta es necesariamente oblícua al plano. Porque, en efecto, por las dos rectas AP, PD hacemos pasar un plano que corte al plano M segun PE. En este plano no puede trazarse á PE mas que una perpendicular (**17**) y esta perpendicular es PA. Luego PD es oblícua á PE y por consiguiente al plano M.

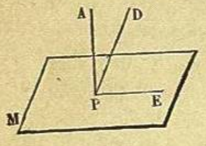

Fig. 173.

247. Teorema. *Por un punto* A *dado fuera de un plano* M *se le puede trazar una perpendicular, y no se puede trazar mas de una* (fig. 174).

1.° En el plano M trazamos una recta cualquiera BC y desde el punto A bajamos sobre BC la perpendicular AB. Por el punto B en el plano M trazamos BP perpendicular á BC, y en el plano ABP bajamos la línea AP perpendicular á BP; AP es perpendicular al plano M (la misma demostracion que la del n.° **246**).

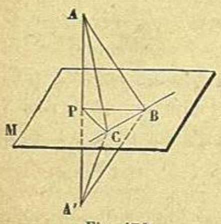

Fig. 174.

2.° Toda otra recta AB trazada por el punto A es oblícua al

plano M. Porque en el plano APB, AP es perpendicular á PB, luego AB es oblícua á esta línea (**42**) y por consiguiente al plano.

248. Teorema. *Por un punto* P *tomado sobre una recta puede siempre trazarse un plano perpendicular á esta recta, pero no puede trazarse mas que uno* (fig. 175).

1.° Por el punto P, en dos planos diferentes colocados siguiendo AB, trazamos á esta recta las perpendiculares PC y PD, y trazamos además el plano M determinado por estas dos líneas; AP, perpendicular á las dos rectas PD, PC, será perpendicular á este plano (**245**); luego este plano M es perpendicular á AB.

2.° Imaginemos otro plano R cualquiera pasando por el punto P y cortemos los planos M y R por otro plano cualquiera APC trazado por AB. Este plano cortará al plano R siguiendo una línea oblícua á AB, y por tanto AB es oblícua al plano R.

249. Corolario. *Si por un punto de una recta* AB *se le trazan cuantas perpendiculares se quiera, el lugar de todas estas perpendiculares es un plano perpendicular á la recta* (fig. 175).

En efecto: no puede trazarse por el punto P mas que un plano perpendicular á la recta AB, y ese plano está determinado por dos cualesquiera de las perpendiculares trazadas á AB por el punto P, y por consiguiente las contiene todas. Q. E. L. D.

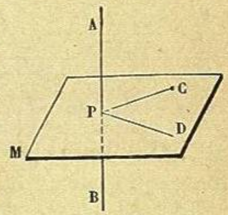

Fig. 175.

250. Teorema. *Por un punto* C *tomado fuera de una recta* AB *puede siempre trazarse un plano perpendicular á dicha recta, pero no mas de uno* (fig. 175).

1.° Desde el punto C bajamos sobre AB la perpendicular CP y en el punto P trazamos á AB otra perpendicular PD. El plano de estas dos rectas CP, PD es perpendicular á AB.

2.° Sea M un plano perpendicular á AB trazado por el punto

C. Le cortamos por el plano ABC y la recta de interseccion deberá ser perpendicular á AB y coincidirá con CP. Luego todo plano perpendicular á AB trazado por el punto C debe pasar por el punto P; por este no puede trazarse mas que un plano perpendicular á AB (**248**); luego tambien no puede trazarse por el punto C mas que un plano perpendicular á la línea AB. Q. E. L. D.

251. Teorema. *Si desde un punto exterior á un plano se le traza una perpendicular* AP *y diversas oblícuas ;*

1.° *La perpendicular es mas corta que todas las oblícuas;*

2.° *Dos oblícuas igualmente distantes del pié de la perpendicular son iguales ;*

3.° *De dos oblícuas desigualmente distantes del pié de la perpendicular, la que mas se separa es la mayor* (fig. 176).

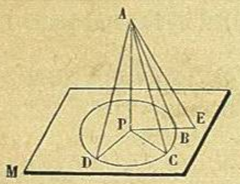

Fig. 176.

1.° Sea AP la perpendicular y AB una oblícua al plano M. En el plano APB, AP es perpendicular y AB oblícua á la recta PB; luego AP < PB (**43**).

2.° Sean AC, AD dos oblícuas igualmente distantes del pié P de la perpendicular.

Los dos triángulos rectángulos APC, APD tienen el lado AP comun, PC = PD por el supuesto, luego son iguales y AC = AD. Q. E. L. D.

3.° Sean AC, AE dos oblícuas tales que resulte PE > PC. Sobre PE tomamos una longitud PB = PC y unimos AB. En el plano APE, AB y AE son oblícuas á PE, y además PE > AB; luego (**43**) AE > AB. Como AB = AC (2°), resulta en definitiva que AE > AC. Q. E. L. D.

252. Corolario. *Si desde un punto exterior á un plano* M *se trazan oblícuas iguales,* AB, AC, AD, etc., *el lugar de los piés de todas estas oblícuas es una circunferencia que tiene por centro el pié de la perpendicular bajada desde el punto* A *sobre el plano.*

La razon es que los piés de todas estas oblícuas están igualmente distantes del pié P de la perpendicular, porque son iguales.

253. Observacion. La perpendicular bajada desde un punto sobre un plano, siendo la línea mas corta que puede trazarse desde el punto al plano, se toma como la medida de la *distancia* que hay desde el punto al plano.

254. Teorema. *Si desde el pié* P *de una perpendicular* AP *al plano* M *se traza una perpendicular* PD *á una recta cualquiera* BC, *trazada en el plano, la recta* DA *que une el punto* D *con un punto cualquiera* A *de la perpendicular al plano, es perpendicular á* BC (fig. 177).

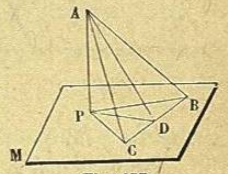

Fig. 177.

Partiendo del punto D tomamos sobre BC dos longitudes iguales DB, DC y unimos PB, PC, AB, AC. En el plano M las dos oblícuas PB, PC á la línea BC se apartan igualmente del pié de la perpendicular; luego son iguales y por tanto, PB = PC. Segun esto AB = AC (**251**, 2.°) y por tanto el triángulo ABC es isósceles, y la línea AD que une el vértice con el medio de la base BC, es perpendicular á dicha base. Q. E. L. D.

255. Corolario. La recta BC, perpendicular á la vez á las rectas PD y AD, es perpendicular al plano PAD, que pasa por estas dos rectas.

Observacion. El teorema precedente se denomina *de las tres perpendiculares.*

§ XXV. Paralelismo de las rectas y de los planos.

256. Definiciones. Una recta y un plano son *paralelos* cuando no se encuentran por mucha que sea la distancia hasta donde se prolonguen.

Dos planos son *paralelos* cuando no se cortan aunque se prolonguen indefinidamente.

257. Teorema. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* M, *toda paralela* CD *á esta recta es tambien perpendicular al plano* (fig. 178).

El plano de las paralelas AB y CD corta el plano M siguiendo la línea BD. La recta AB perpendicular al plano M, lo es tambien á BD. En el plano ABDC, CD paralela á AB es tambien perpendicular á BD (**57**). En el plano M trazamos EF perpendicular á BD y unimos el punto D con un punto cualquiera A de la perpendicular AB; EF será perpendicular al plano ABD (**255**), y por consecuencia será perpendicular á DC que pasa por su pié en el plano este. La línea CD perpendicular á la vez á las dos rectas BD y EF que pasan par su pié en el plano M, es perpendicular á este plano. Q. E. L. D.

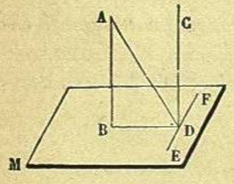

Fig. 178.

258. Corolario. *Desde un punto* D *no puede trazarse á una recta* AB *mas que una paralela* (fig. 179).

Desde el punto D trazo un plano M perpendicular á AB. Toda paralela á AB trazada por el punto D será perpendicular al plano M. Desde el punto D no puede trazarse mas que una perpendicular al plano M, luego, etc.

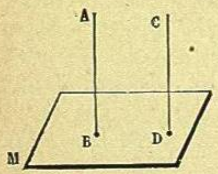

Fig. 179.

259. Teorema. Recíprocamente, *dos rectas* AB, CD *perpendiculares á un mismo plano son paralelas* (fig. 179).

Si, por el punto D, se traza una paralela á AB, será perpendicular al plano M; luego coincidirá con CD (**246**, 2.º); luego CD es paralela á AB. Q. E. L. D.

260. Corolario. *Dos rectas* AB, CD *paralelas á una tercera* EF *son paralelas entre sí* (fig. 180).

Trazamos un plano M perpendicular á EF. Las dos rectas AB, CD paralelas á EF son perpendiculares al plano M (**257**); luego son paralelas (**259**).

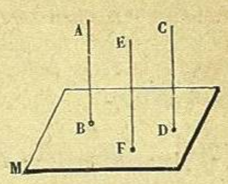

Fig. 180.

261. Teorema. *Si una recta* AB *no situada en un plano* M, *es paralela á una recta* CD, *contenida en este plano, es paralela á dicho plano* (fig. 181).

Se traza el plano de las dos pararelas AB, CD. Una recta contenida en este plano no puede encontrar al plano M mas que en un punto de CD; mas AB no puede encontrar á CD, y por consiguiente es paralela al plano M.

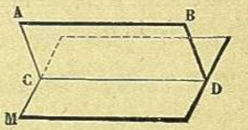

Fig. 181.

262. Teorema. *Si una recta es paralela á un plano* M, *todo plano trazado por la línea* AB *y un punto* C *del plano* M *corta este último segun la recta* CD *paralela á* AB (fig. 182).

En efecto: AB y CD están en un mismo plano; y no pueden encontrarse puesto que CD está enteramente contenida en el plano M, que es paralelo á AB; luego las dos rectas son paralelas.

263. Corolario. I. *Cuando una recta* AB *es paralela á un plano* M, *si por un punto* C *de este plano se traza una paralela á* AB, *está dicha paralela contenida en el plano* M (fig. 182).

En efecto: el plano trazado por la recta AB y el punto C corta al plano M segun la recta CD, parelela á AB. Por el punto C no puede trazarse mas que una paralela á AB (**258**); luego está contenida en el plano M.

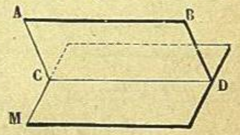

Fig. 182.

264. Corolario. II. *Si una recta es paralela á dos planos, es paralela á la interseccion de dichos planos.*

Porque si por un punto de esta interseccion se traza la paralela á la recta dada, está contenida á la vez en los dos planos (**265**).

265. Teorema. *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

Desde un mismo punto no puede trazarse mas que un plano perpendicular á una recta; luego dos planos perpendiculares á una misma recta no tiene ningun punto comun, y por tanto son paralelos.

266. Teorema. *Las intersecciones* AB, CD *de dos planos paralelos* M *y* P *con un tercer plano son paralelos* (fig. 183).

Las rectas AB y CD contenidas en los planos paralelos M y P no pueden encontrarse, y estando además en un mismo plano, son paralelas.

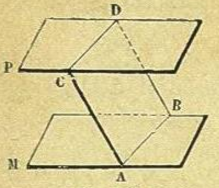

Fig. 183.

267. Teorema. *Si dos planos* M *y* P *son paralelos, toda recta perpendicular á uno es perpendicular al otro* (fig. 184).

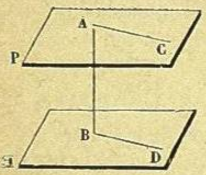

Fig. 184.

Suponemos AB perpendicular al plano M y decimos que es perpendicular al plano P. Por el punto A trazo en el plano P una recta cualquiera AC, y por la rectas AB y AC trazo un plano que corte al plano M segun la recta BD, paralela á AC (**266**). La recta AB perpendicular al plano M es perpendicular, á BD, y á la línea AC paralela á BD. La línea AB, siendo perpendicular á toda recta que pase por su pié en el plano P, es tambien perpendicular al plano P.

268. Corolario. I. *Por un punto* A *tomado fuera de un plano* M, *puede trazarse un plano paralelo al plano* M, *pero no más que uno* (fig. 184).

Desde el punto A bajamos la perpendicular AB al plano M, y trazamos un plano P perpendicular á AB en el punto A: este plano es paralelo al plano M (**269**). Recíprocamente: un plano paralelo al plano M, trazado por el punto A, debe ser perpendicular á AB; luego (**248**, 2.º) no puede existir paralelo al M por el punto A más que el plano P.

269. Corolario. II. *Dos planos paralelos á un tercero son paralelos.*

Porque dos planos paralelos á un plano dado no pueden tener ningun punto comun (**268**).

270. Teorema. *Las paralelas* AB, CD, *comprendidas entre dos planos paralelos* M *y* P, *son iguales* (fig. 185).

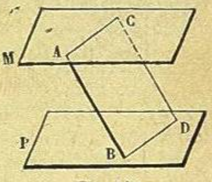

Fig. 185.

El plano de las dos paralelas corta á los planos M y P segun las paralelas AC y BD (**266**); luego la figura ACDB es un paralelógramo, y AB = CD.

271. Corolario. Si las rectas AB y CD son perpendiculares al plano M, son paralelas (**259**) y perpendiculares al plano P (**267**); luego son iguales. Segun esto: *dos planos paralelos están á igual distancia en toda su extension.*

272. Teorema. *Cuando dos ángulos* BAC, EDF *tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido,* 1.º *estos ángulos son iguales;* 2.º *sus planos son paralelos* (fig. 186).

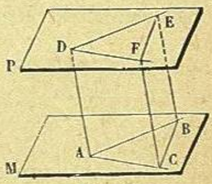

Fig. 186.

1.º Tomamos á partir de los vértices A y D sobre los lados paralelos de los ángulos las longitudes iguales AB = DE y AC = DF; unimos BC, EF, AD, BE, CF.

Siendo iguales y paralelas las línea AB, DE, la figura ABDE es un paralelógramo, y la línea BE es igual y paralela á AD. Del mismo modo CF es igual y paralela á AD, y por esta razon BE y CF son iguales y paralelas entre sí y la figura BCFE es tambien un paralelógramo. De lo dicho se deduce que BC = EF, en cuyo caso los dos triángulos ABC, DEF tienen los tres lados iguales, y los ángulos BAC, EDF son iguales. Q. E. L. D.

2.º Sea M el plano del ángulo BAC. Si por el punto D trazamos un plano P paralelo al plano M interceptará en las tres paralelas AD, BE, CF longitudes iguales (**270**); luego pasará por los puntos E y F y será el plano del ángulo EDF Q. E. L. D.

273. Teorema. *Tres planos paralelos* M, P, Q, *interceptan en dos rectas* AB *y* CD *segmentos proporcionales* (fig. 187).

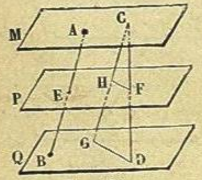

Fig. 187.

Sean A, E, B y C, F, D los puntos en que las rectas AB y CD cortan los planos M, P y Q. Por el punto C trazamos una paralela á AB que corta los planos P y Q en los puntos H y G. Unimos HF y GD, cuyas rectas son paralelas como intersecciones del plano CGD con los planos paralelos P y Q: de donde resulta (**180**):

$$\frac{CH}{HG}=\frac{CF}{FD};$$

pero CH = AE y HG = EB, como paralelas comprendidas entre planos paralelos; luego:

$$\frac{EA}{EB}=\frac{CF}{FD}. \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

§ XXVI. Angulos diedros. — Planos perpendiculares.

274. Definiciones. Se llama *ángulo diedro* la figura formada por dos planos que se encuentran y terminan en su in-

terseccion comun. Los dos planos se llaman *caras* del ángulo diedro, y su interseccion *arista* del ángulo. El ángulo diedro suele nombrarse por las dos letras de su arista, ó bien con cuatro letras una en cada cara y dos sobre la arista, las cuales se leen en medio de las de las caras.

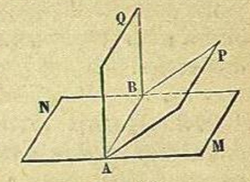

Fig. 188.

Dos ángulos diedros son adyacentes cuando tienen una misma arista, una cara comun, y están colocados uno á un lado y otro á otro de esta cara. Se suman dos ángulos justaponiéndolos de modo que sean adyacentes: el ángulo diedro formado por las caras exteriores constituye la suma de los dos que se han reunido ó sumado.

Podemos formarnos una idea clara de la magnitud de un ángulo diedro suponiendo que una de las caras P (fig. 188), aplicada primero sobre la cara M gira al rededor de la arista AB siempre en el mismo sentido, en cuya rotacion el plano móvil P forma con el plano fijo un ángulo diedro cada vez mayor.

275. Un plano Q se llama *perpendicular* con relacion á otro plano MN (fig. 189), cuando forma con este dos ángulos diedros adyacentes iguales MABQ, NABQ.

Se llama *ángulo diedro recto* aquel cuyas dos caras son perpendiculares.

Dos ángulos diedros son *opuestos por la arista* cuando las caras del uno son prolongacion de las del otro.

276. Teorema. *Por una recta* AB, *situada en un plano* MN *puede siempre trazarse un plano perpendicular al plano* MN; *pero no más de uno* (fig. 188).

277. Corolario. *Todos los ángulos diedros rectos son iguales.*

La demostracion de este teorema y su corolario son idénticas á las de los n.ºs **17** y **18**.

Observacion. Un diedro es *agudo ú obtuso* segun sea mayor ó menor que un diedro recto.

Dos diedros son *complementarios* cuando sumados valen un diedro recto; *suplementarios*, cuando dicha suma vale dos diedros rectos.

278. Teorema. *Todo plano que encuentra otro, forma con él dos diedros adyacentes suplementarios;* y recíprocamente, *si dos diedros adyacentes son suplementarios sus caras exteriores son prolongacion una de otra.*

(Demostraciones idénticas á las de los n.os **21** y **24**).

279. Definicion. Si por un punto A de la arista de un diedro (fig. 189) se trazan las perpendiculares AC y AB á esta arista en las dos caras del diedro, el ángulo BAC que forman se llama *ángulo plano ó rectilíneo* del diedro. — Si el punto A se mueve sobre la arista, las líneas AB y AC permanecen paralelas á ellas mismas y no cambia el valor de su ángulo (**272**).

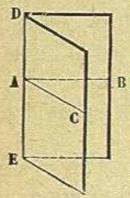

Fig. 189.

El plano del ángulo rectilíneo BAC es perpendicular á la arista (**245**); luego para construir el ángulo plano de un diedro puede cortarse este diedro por un plano perpendicular á la arista.

280. Teorema. *Dos ángulos diedros iguales tienen los ángulos planos iguales,* y recíprocamente, *dos ángulos diedros que tienen los ángulos planos iguales son iguales.*

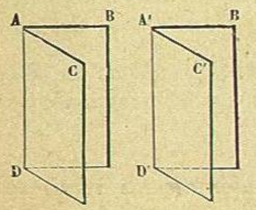

Fig. 190.

1.º Si los dos diedros AD y A'D' son iguales (fig. 190), pueden superponerse de manera que coincidan y entonces tienen el mismo ángulo rectilíneo (**279**).

2.º Supongamos que los ángulos rectilíneos BAC, B'A'C' (fig. 190) de los dos ángulos diedros AD y A'D' sean iguales, decimos que los diedros lo son tambien. En efecto : trasportemos el segundo diedro sobre el primero de modo que el ángulo plano B'A'C' coincida con su igual BAC : la arista A'D' perpendicular al plano B'A'C' tomará la direccion de la arista AD perpendicular al plano BAC (**246**, 2.º), y los dos diedros coincidirán. Q. E. L. D.

281. Corolario. *A un ángulo diedro recto corresponde un ángulo plano recto* (fig. 191). Suponemos el plano ABF perpendicular al MN. Por el punto C trazamos en el plano MN, DE perpendicular á AB, y en el plano ABF, CF perpendicular á AB. Los diedros MABF, NABF, al ser iguales (**275**) tienen los ángulos rectilíneos iguales; luego el ángulo DCF es igual á ECF. La línea CF es perpendicular á DE y por consiguiente el ángulo DCF es recto. Q. E. L. D.

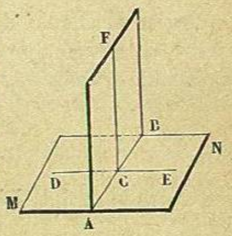

Fig. 191.

282. Teorema. — *La relacion de dos ángulos diedros es igual á la de sus ángulos planos.*

Sean AP y DQ (fig. 192) dos ángulos diedros cuyos ángulos planos son BAC y EDF. Suponemos que los ángulos planos tienen una medida comun que se contiene 5 veces en BAC y 3 en EDF. La relacion de los ángulos planos será, pues, igual á $\frac{5}{3}$. Por la arista AP y por las líneas de division AG, AH, AK, AI del ángulo BAC, trazamos planos y hacemos además la misma construccion en el otro diedro. Los dos diedros resultarán divididos en pequeños diedros todos iguales entre sí, puesto que sus ángulos planos son iguales (**208**, 2.º), El diedro

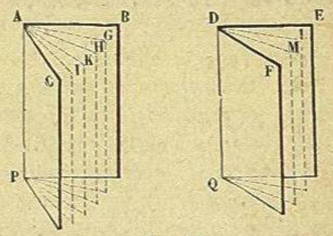

Fig. 192.