AP contiene 5, y el diedro DQ contiene 3. Luego la relacion de estos dos diedros es $\frac{5}{3}$, es decir igual á la relacion de los ángulos planos correspondientes. Q. E. L. D.

283. Teorema. *La medida de un ángulo diedro es la misma que la de su ángulo plano, siempre que se tome por unidad de ángulo diedro la que corresponda á la unidad de ángulo plano.*

Sea D el ángulo diedro que se va á medir, A su ángulo plano, d la unidad de ángulo diedro, a el ángulo plano correspondiente y tendrémos:

$$\frac{D}{d}=\frac{A}{a};$$

pero $\frac{D}{d}$ es la medida del ángulo diedro, y $\frac{A}{a}$ la del ángulo plano; luego, etc.

284. Observacion. Si se toma el ángulo recto por unidad de ángulo rectilíneo, la unidad de ángulo diedro será el diedro recto (**281**). Podrán de este modo expresarse los ángulos diedros en grados, minutos y segundos, si llamamos ángulo diedro de 1°, 2°, 3°, etc., aquel cuyo ángulo plano vale 1°, 2°, 3°, etc.

285. Observacion. El teorema precedente permite deducir muchas propiedades de los ángulos diedros de las propiedades análogas de los ángulos planos. Ejemplos: *Los ángulosdiedros opuestos por el vértice son iguales. Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, los cuatro ángulos diedros agudos son iguales entre sí, así como los cuatro diedros obtusos.*

286. Teorema. *Cuando una recta* AP *es perpendicular á un plano* M, *todo plano* ABC *trazado por esta recta es perpendicular al plano* M (fig. 193).

Trazamos en el plano M la recta PD perpendicular á BC; AP es tambien perpendicular á BC. El ángulo APD es, segun esto el ángulo plano correspondiente al diedro ABCN. Además AP siendo perpendicular al plano M es perpendicular á PD; el ángulo APD es recto; luego lo es el diedro y los planos son perpendiculares. Q. E. L. D.

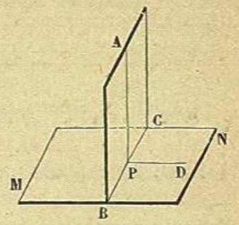

Fig. 193.

287. Teorema. *Cuando un plano* ABC *es perpendicular á otro* MN, *toda recta* AP *trazada en el primer plano perpendicularmente á la interseccion* BC, *es perpendicular al otro plano* (fig. 193).

Sea PD perpendicular á BC en el plano MN. Siendo recto el diedro ABCN, su ángulo rectilíneo APD es recto, y la línea AP es en este caso perpendicular á las dos rectas BC y PD que pasan por su pié en el plano MN, y por consiguiente es perpendicular al plano. Q. E. L. D.

288. Corolario. *Si dos planos* ABC *y* MN *son perpendiculares, y por un punto* A *del primero se traza una perpendicular al segundo, esta recta está enteramente contenida en el primero* (fig. 193).

Porque si se traza AP perpendicular á la interseccion BC de los dos planos, es perpendicular al plano MN, y como desde el punto A no puede trazarse más que una perpendicular al plano MN, esta es la línea AP contenida en el plano ABC.

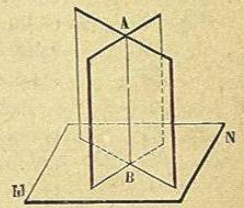

Fig. 194.

289. Teorema. *Si dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero* MN, *la interseccion de los dos primeros* AB *es perpendicular á dicho tercer plano* (fig. 194).

Porque si desde el punto A comun á los dos primeros planos se traza una perpendicular al plano MN, debe estar contenida en cada uno de los planos (**288**); luego habrá de ser su interseccion.

§ XXVII. Nociones sumarias sobre los ángulos triedros y poliedros.

290. Definiciones. Se llama *ángulo triedro* la figura formada por tres planos que se cortan en un mismo punto, llamado *vértice* del ángulo triedro y las intersecciones mútuas de los tres planos son las *aristas* de dicho ángulo. Los ángulos planos formados por estas aristas tomadas dos á dos se llaman las tres *caras* del ángulo triedro.

Se llama *ángulo poliedro* la figura formada por muchos planos que se cortan en un mismo punto. El ángulo poliedro se llama *convexo* cuando, prolongando indefinidamente el plano de cada una de sus caras, la figura se halla toda entera á un mismo lado de la cara prolongada.

291. Si se prolongan mas allá del vértice las aristas de un ángulo poliedro, se forma un nuevo ángulo poliedro, que se llama el *simétrico* del primero. Dos ángulos poliedros simétricos tienen sus caras respectivamente iguales, como opuestas por el vértice y sus diedros tambien iguales respectivamente como opuestos por la arista. Pero estos ángulos poliedros no son superponibles porque la disposicion de los elementos iguales es inversa en los dos, como es fácil notar, concibiendo dos observadores colocados de la misma manera en los dos ángulos poliedros.

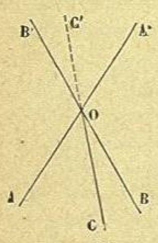

Fig. 195.

Para mostrar que no pueden superponerse dos ángulos poliedros simétricos, tomemos por ejemplo los dos triedros simétricos OABC, OA'B'C', y hagamos coincidir la cara A'OB' con su igual AOB (fig. 195). Puede hacerse esto de dos maneras : 1.° haciendo girar la figura OA'B'C' de 180° al rededor de una perpendicular al plano

AOB trazada por el punto O. En este caso la arista OC' permaneceria detrás del plano AOB y no podria coincidir con la arista OC que está delante; 2.° haciendo girar la figura OA'B'C', de 180° al rededor de la bisectriz del ángulo BOA'. Mas en este caso la arista OA' vendrá á caer sobre OB, y á menos que el ángulo diedro OA' no sea igual al diedro OB no coincidirán los dos triedros.

Si el diedro OA es igual al diedro OB, el triedro OABC podrá coincidir con su simétrico y la cara A'OC' con la BOC; luego, *si en un triedro dos diedros son iguales, las caras opuestas á estos diedros son iguales, y el triedro es igual á su simétrico.* Recíprocamente; *si dos caras de un triedro son iguales, el triedro es igual á su simétrico, y los diedros opuestos á las caras iguales son iguales.*

292. Teorema. *En un triedro, cada cara es menor que la suma de las otras dos* (fig. 196).

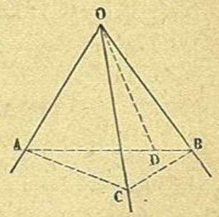

Fig. 196.

Sea OABC un triedro, AOB la cara mayor. En el plano de dicha cara trazamos la línea OD formando con OA un ángulo AOD igual á AOC. Trazamos además la línea AB que corta á OD en el punto D. Tomamos luego OC igual OD y unimos AC, BC. Los triángulos AOC, AOD tienen OA comun, OC = OD, y el ángulo AOC = AOD, y por tanto son iguales, y AC = AD. En el triángulo ABC tenemos :

$$AB < AC + BC;$$

restando de los dos miembros las longitudes iguales AD y AC, quedará

$$BD < BC.$$

Esto sentado, en los triángulos OBD, OBC tenemos : OB comun, OD = OC y BD < BC. De aquí resulta (**54**) que el ángulo BOD < BOC, y si se agrega á los dos miembros los ángulos iguales AOD y AOC resulta en definitiva

$$AOB < AOC + BOC. \quad \text{Q. E. L. D.}$$

293. Teorema. *La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos* (fig. 197).

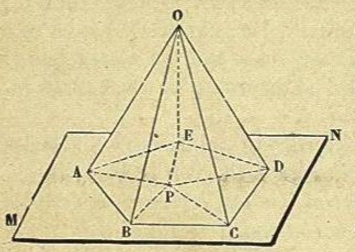

Fig. 197.

Sea O un ángulo poliedro convexo. Le cortamos por un plano MN, que encuentra todas las aristas de un mismo lado del vértice, y tenemos el polígono convexo ABCDE. Unimos todos los vértices de este polígono con el punto P tomado en su interior, resultando un número igual de triángulos de los cuales tienen por vértice comun, unos el punto O y los otros el punto P. En el ángulo triedro AOBE la cara BAE es menor que la suma de las otras dos

$$BAE < BAO + EAO.$$

De igual manera :

$$ABC < ABO + CBO$$
$$BCD < BCO + DCO, \text{ etc.};$$

si se suman todas estas desigualdades, resulta que la suma de los ángulos que están en la base de los triángulos formados al rededor del punto O es mayor que la suma de los ángulos en la base de los triángulos formados al rededor del punto P. Luego, por compensacion, la suma de los ángulos formados al rededor del punto O es menor que la de los ángulos formados al rededor del punto P, esto es, menor que cuatro rectos. Q. E. L. D.

APÉNDICE AL LIBRO VI

LEVANTAMIENTO DE PLANOS Y NIVELACION

§ XXVIII. Nociones sobre el levantamiento de planos. — Levantamiento con el metro, la escuadra, el grafómetro y la plancheta.

294. Definiciones y nociones preliminares. Se llama *proyeccion* de un punto sobre un plano, el pié de la perpendicular bajada desde este punto sobre el plano. El plano sobre que se proyecta se denomina *plano de proyeccion;* y la perpendicular bajada desde el punto sobre el plano de proyeccion se llama *línea proyectante* ó simplemente la *proyectante* del punto.

Se llama proyeccion de una línea sobre un plano, el lugar de las proyecciones de todos los puntos de esta línea sobre el plano.

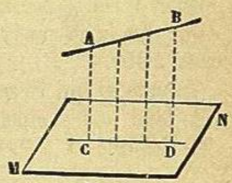

Fig. 198.

Es evidente que la proyeccion de una línea recta sobre un plano es una línea recta. En efecto : sea MN el plano de proyeccion (fig. 198), AB la recta que se proyecta. Las proyectantes de todos los puntos son paralelas (**259**), y están todas en el plano BAC determinado por una de ellas AC y la recta dada AB, y por consecuencia el lugar de sus piés es la recta CD interseccion de este plano con el de proyeccion MN.

El plano BAC es perpendicular al plano de proyeccion, puesto que contiene la proyectante AC perpendicular al plano MN (**286**), el cual se llama *plano proyectante* de la recta. Se llama proyeccion de una figura sobre un plano, la figura formada por las proyecciones de todos los puntos y de todas las líneas de la figura dada. Si el plano de proyeccion se mueve paralelamente á sí mismo, las líneas proyectantes no cambian y las proyecciones sobre los dos planos paralelos son iguales.

295. Es sabido que se llama *vertical* de un lugar la direccion de una plomada en dicho lugar. Las verticales de dos lugares diversos se juntan en el centro de la tierra; pero si estos lugares están poco separados, el ángulo de sus verticales es tan pequeño que pueden las verticales considerarse como paralelas, que es lo que hacemos en todo lo que sigue.

Se llama *plano horizontal* un plano perpendicular á la vertical. Todos los planos horizontales son paralelos (**269**). Toda recta trazada en un plano horizontal es una *horizontal*, y es perpendicular á la vertical.

Se llama *plano vertical* todo aquel que es perpendicular al horizontal : resulta de las propiedades de los planos perpendiculares :

1.º Que todo plano trazado segun una vertical es vertical (**286**).

2.º Que un plano vertical contiene todas las verticales que pueden trazarse por sus diferentes puntos (**288**).

3.º Que la interseccion de dos planos verticales es una vertical (**289**).

Cuando se quiere saber si una recta es vertical, se suspende á su lado una plomada y se observa si es paralela á la direccion del hilo.

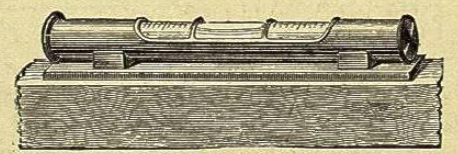

Fig. 199.

Para estar seguro de que un plano es horizontal se emplea un pequeño instrumento llamado *nivel de burbuja de aire* (fig. 199). Se compone de un tubo de cristal ligeramente convexo en la parte superior, encerrado en una armadura de cobre

que descansa sobre una platina de metal. El tubo está lleno de agua, menos en lo que ocupa una burbuja de aire que va por sí sola á colocarse en la parte superior del tubo, entre dos trazos señalados sobre el cristal, cuando la platina está horizontal. Para verificar la horizontalidad del plano se coloca el nivel de burbuja de aire sobre dicho plano en dos direcciones diversas y próximamente perpendiculares. Si la posicion de la burbuja indica que estas dos rectas del plano están horizontales, el plano contendrá dos rectas perpendiculares á la vertical, y será él mismo perpendicular á la vertical (**249**) esto es, será horizontal.

296. Cuando un terreno es plano y horizontal se llama *plano* de este terreno la figura formada por los puntos notables de este terreno y las líneas de toda especie que se trazan en él, tales como las líneas que saparan los trozos de terrenos, los bordes de los caminos y las corrientes de aguas, etc. Cuando el terreno es accidentado ó inclinado, que es lo mas frecuente, se imagina la proyeccion de la figura sobre un plano horizontal, y dicha proyeccion es lo que se llama plano del terreno.

Levantar el plano de un terreno, es tomar sobre el terreno todas las medidas necesarias para determinar completamente la figura formada por el plano.

Trasladar el plano sobre el papel, es construir sobre este una figura semejante á la figura del terreno : la relacion de las líneas trazadas sobre el papel con las líneas homólogas del terreno se llama *escala* del plano.

297. Sea cualquiera la figura cuyo plano se desea levantar, puede siempre descomponerse en polígonos, si no contiene mas que líneas rectas. Si hubiere curvas, se sustituyen por líneas quebradas que difieran poco de las curvas. La cuestion del levantamiento de planos queda, pues, reducida á levantar el de un cierto número de polígonos.

Por poco extenso que sea el terreno es mas conveniente dividir la operacion en dos partes. Debe primeramente determinarse un polígono que abrace la mayor parte de la extension del terreno y se levanta su plano; y luego se *fija* la posicion de los puntos notables y todos los detalles con respecto á los diversos lados de este polígono. Dicho polígono, que llamaremos *polígono topográfico*, ha de cumplir con ciertas condiciones: es menester en primer término que puedan medirse todos los lados y todos los ángulos, y además que los puntos notables del terreno puedan percibirse desde dos vértices al menos del polígono topográfico.

298. Levantamiento con el metro. Hemos explicado ya el uso de la cadena para medir las longitudes sobre un terreno plano y horizontal (**174**). Cuando está inclinado y desigual, no es la longitud misma de la línea AB (fig. 200) lo que hay ne-

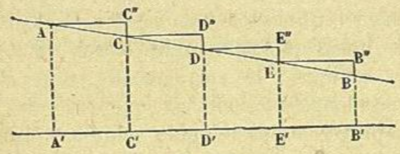

Fig. 200.

cesidad de medir, sino la longitud de su proyeccion horizontal. Para ello, cuando el operador tiene la mano apoyada fuertemente sobre el suelo en el punto A, el auxiliar tiende la cadena bien horizontal segun la línea AC''; despues con una plomada, ó ficha cargada de plomo marca el pié C en la vertical trazada desde el punto C''. El agrimensor se traslada luego á C, y la operacion se continúa con las mismas precauciones, obteniéndose como resultado la suma de las longitudes AC'', CD'', DE'', ED'', suma que es igual á A'B', es decir á la proyeccion horizontal de la recta AB.

Propongamonos ahora levantar el plano de un polígono ABCDEF (fig. 201). Se miden en primer termino todos los lados. Para determinar los ángulos, el A por ejemplo, se marcan dos puntos á voluntad A' y A'' sobre los lados de este ángulo. Se miden despues los tres lados del triángulo AA'A'', lo cual determina el triángulo y por consiguiente el ángulo en

A, haciéndose otro tanto para la determinacion de los otros ángulos.

Si la naturaleza del terreno lo permite, podrán tambien medirse todos los lados del polígono y todas las diagonales trazadas desde un mismo vértice, quedando de este modo totalmente determinado el polígono.

Si se desea referir á este polígono un punto especial del terreno, bastará medir su distancia á dos vértices del polígono, pudiendo en este caso considerar especialmente el triángulo que tiene por vértice el punto dado y por base un lado del polígono, y determinar los ángulos de la base de este triángulo por el procedimiento que acabamos de indicar.

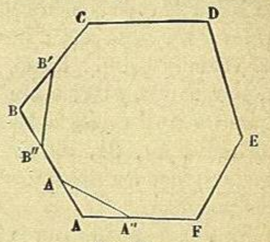

Fig. 201.

Vease, pues, como con la cadena y los jalones puede levantarse el plano de un terreno, por muy complicado que sea; y cuando la operacion la hace una persona práctica es muy exacta, por mas que sea un poco detenida.

299. Levantamiento con la escuadra. Hemos descrito la escuadra y dado á conocer cómo se trazan con este instrumento perpendiculares á una recta, sobre el terreno (**175**).

Para levantar con la cadena y la escuadra el plano de un polígono ABCD..., (fig. 202) se elige sobre el terreno una línea MN, sobre la cual puedan bajarse perpendiculares desde todos los vértices A, B, C.... y medirse con la cadena todas estas perpendiculares, y la misma línea MN. Se determinan despues, mediante la escuadra los piés *a*, *b*, *c*.... de las perpen-

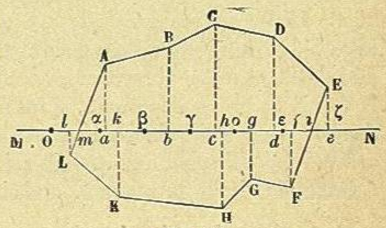

Fig. 202.

diculares bajadas, desde todos los vértices del polígono sobre MN. Se mide despues con la cadena la línea MN, á partir de un punto O tomado de manera que los piés de todas las perpendiculares estén á un mismo lado de este punto, notándose al llevar la cadena sobre MN la distancia á que están del punto O los l, m, a, k, etc.; una vez tendida la cadena desde O á α se mide Ol y Om; luego, llevada la cadena desde α á β, se determina Oa y Ok; sobre el tercer decámetro $\beta\gamma$ se determinara Ob y así de los demás. Se miden luego todas las perpendiculares Aa, Bb, Cc, Ll.... con lo cual se tienen evidentemente todos los elementos necesarios para determinar el área del polígono.

El levantamiento con la escuadra es muy expeditivo y bastante exacto, cuando el terreno es poco estenso, conviniendo sobre todo para levantamiento de detalles. Tiene además la ventaja de que puede desde luego determinarse el área sin trasladar el plano al papel.

300. Levantamiento con el grafómetro. El grafómetro es un instrumento que sirve para determinar sobre el terreno el ángulo de dos alineaciones. Se compone de un semi-círculo de cobre ALB, colocado sobre un pié de tres patas, y al que se articula mediante una rodilla colocada entre dos conchas *gh* (figs. 203 y 204). Esta disposicion permite dar al semicírculo una inclinacion cualquiera. El borde ó limbo de la circunferencia está dividido en grados y medios grados. El semicírculo lleva además dos reglas ó *alidadas* con pínulas (véase el n.º **175**), una de las cuales AB está fija, y el plano de los hilos de las dos pínulas pasa por el diámetro 0º-180º; la otra alidada CD es móvil al rededor del centro y sus extremos tienen la forma de arcos de círculo, terminados en bisel, que pueden moverse sobre la graduacion del limbo. Llevan una y otra un trazo ó señal que corresponde á la línea de visualidad ó *línea de fé* de la segunda alidada y además un *vernier* que permite valuar los ángulos con $\frac{1}{10}$ de grado ó 6 minutos de diferencia.

Veamos ahora como se mide el ángulo de dos alineaciones OA y OB (fig. 205). Se coloca el grafómetro en *estacion* en el vértice del ángulo de modo que su centro esté en la vertical de este punto; se desaprieta luego el tornillo r de la

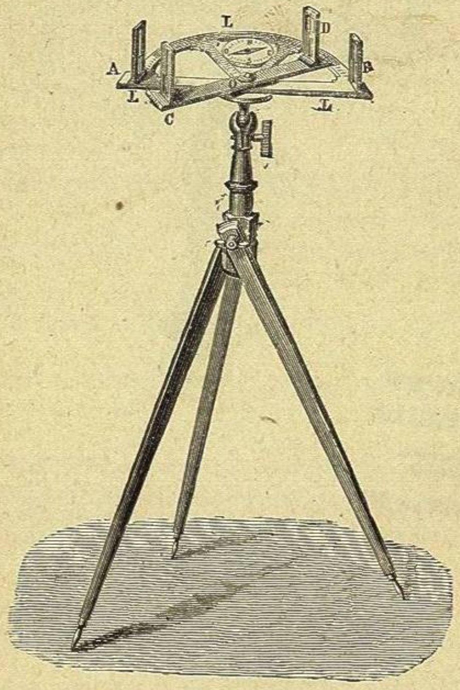

Fig. 205.

rodilla y se hace girar el limbo hasta que esté casi horizontal y el plano de visualidad de la alidada fijo coincida con el jalon A. Se aprieta luego un poco el tornillo en términos que pueda todavía imprimirse algun movimiento al aparato. Luego con un nivel de aire se coloca el plano del semi círculo completamente horizontal, confirmándose en que la alidada fija está coincidiendo con el punto A. Entonces se acaba de apretar el

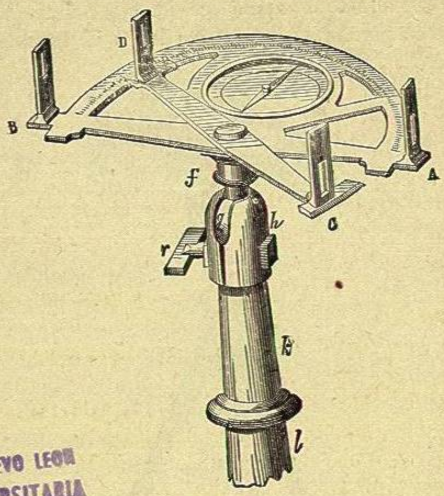

Fig. 204.

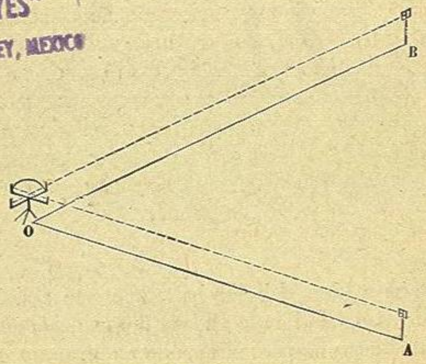

Fig. 205.

tornillo para fijar definitivamente el plano del limbo en esta

posicion, y se hace girar la alidada móvil hasta que la visual coincida con el jalon B, no faltando mas que leer ya sobre la graduacion del limbo la medida del ángulo AOB.

Si las rectas OA y OB están horizontales, se obtiene con efecto el ángulo AOB; pero si están inclinadas respecto al horizonte, se mide en realidad el ángulo de sus proyecciones horizontales, puesto que se ha tenido cuidado de colocar horizontal el limbo. El ángulo medido en esta forma se llama *ángulo reducido al horizonte*, que es cabalmente el que hay que tomar en cuenta en el levantamiento de planos.

Para levantar un plano con la cadena y el grafómetro, se emplean dos métodos principales, el método de *rodeo* y el de *interseccion;* mas largo pero mas exacto, el primero debe preferirse para levantar el plano de un polígono topográfico; mas rápido, el segundo debe emplearse con preferencia para el levantamiento de los detalles.

Método de rodeo. Se miden todos los lados del polígono con la cadena y todos los ángulos con el grafómetro, con lo cual evidentemente está determinado el polígono. Debe practicarse sobre el terreno un primer cotejo: es necesario que de este resulte que la suma de todos los ángulos medidos sea igual á tantas veces 180° como lados tiene el polígono menos dos. Si el error cometido no es, por término medio, mas que de 3 á 4 minutos por ángulo, ó sea 1° por un polígono de 12 á 15 lados se limita uno á repartirlos entre todos los ángulos medidos, puesto que el grafómetro no permite medir con mas aproximacion. Pero si el error es mayor hay que repetir la operacion. Otra verificacion puede realizarse cuando se traslada el plano al papel: porque cuando se conocen todos los ángulos de un polígono basta, para determinarlo, medir todos los lados menos dos; y como se han medido todos, si la operacion está bien hecha el polígono que se construya con los elementos medidos sobre el terreno deberá cerrar exactamente, cosa que no sucederá si se ha cometido cualquier error en la medida.

Método por interseccion. Se elije en el terreno una base MN que pueda medirse muy exactamente (fig. 206), y desde cuyos extremos puedan verse los puntos notables A, B, C, D.... que se desea determinar. Se mide luego la longitud MN y los ángulos AMN y ANM; BMN y BNM; CMN y CNM, etc. Cada uno de los triángulos AMN, BMN, CMN, etc., se determinará por su base MN y los ángulos adyacentes á la misma. La posicion de los puntos A, B, C, D.... quedará de este modo determinada.

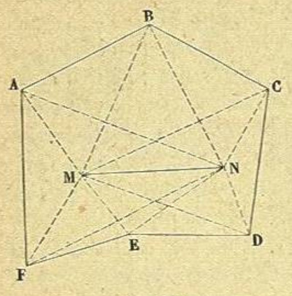

Fig. 206.

301. Traslacion del plano sobre el papel. Sabemos ya como se construye sobre el papel mediante el semicírculo un ángulo cuya medida en grados nos es conocida (**134**). Debemos ahora estudiar cómo se reduce una longitud cualquiera á una *escala* determinada. Ordinariamente la escala tiene un valor muy sencillo: las mas usuales son las de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{2500}$, $\frac{1}{5000}$. Cuando la escala es de $\frac{1}{100}$ basta para hacer la reduccion, emplear el doble decímetro dividido en milímetros, porque en esta escala el milímetro representa una longitud de un decímetro sobre el terreno, y es raro que se pueda obtener una exactitud mayor en las medidas practicadas con la cadena.

Pero cuando la escala es mas pequeña, por ejemplo de $\frac{1}{5000}$, es menester recurrir á otro medio mas preciso y construir lo que se llama una *escala de reduccion ó escala de diezmos* (décimas partes) (fig. 207). En escala de $\frac{1}{5000}$, 100 metros se reducirán á $\frac{100^m}{5000} = 0^m,02$. Segun esto, sobre una línea recta tomamos á la derecha de un punto marcado 0 las longitudes sucesivas de $0^m,02$, y en los puntos de division escribimos 100, 200, 300, 400, etc.; á la izquierda del punto 0 tomamos diez longitudes 10 veces mas pequeñas, es decir de $0^m,002$, escribiendo luego en los puntos de division 10, 20,

30.... 100. Tenemos con esto una escala que consiente valuar con exactitud las decenas del metro, ó los decámetros. Para valuar los metros tracemos debajo de la línea, así dividida diez paralelas equidistantes á esta línea y por los puntos de division primitivos perpendiculares á dichas líneas, repitiendo en la última paralela toda la numeracion que en la primera. Hecho esto, trazamos oblícuas que junten el punto 0 de la division superior con el punto 10 de la inferior, y de igual suerte los puntos 10, 20, 30.... 90 de la superior con los 20, 30, 40.... 100 de la inferior, con lo cual queda hecha la escala de décimos.

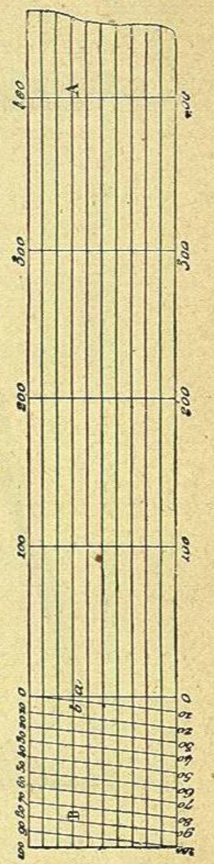

Fig. 207.

Observemos ahora que las porciones de paralelas comprendidas entre la perpendicular 0-0 y la oblícua 0-10, valen respectivamente $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., de la longitud 10 marcada en la línea inferior, cosa que resulta de las propiedades de los triángulos semejantes: así, la longitud ab valdrá $\frac{3}{10}$, de 10 metros, ó 3 metros. Si deseamos, pues, tomar una longitud de 473 metros con esta escala, colocarémos una de la puntas del compás sobre la perpendicular 400, en el punto A en que dicha perpendicular corta la 3.ª paralela, abriendo luego el compás hasta que la otra punta caiga en el punto B situado sobre la 3.ª paralela y sobre la oblícua 70-80. Decimos que en este caso AB representará 473 metros en escala de $\frac{1}{5000}$; porque en efecto $AB = Aa + Bb + ab$. Además $Aa = 400$ metros; $Bb = 70$ metros y $ab = 3$ metros. Luego $AB = 473$ metros.

Puede trazarse la escala sobre el papel, pero es preferible