LIBRO VII

LOS POLIEDROS

§ XXX. De los poliedros : propiedades principales de los prismas y de los paralelepípedos.

311. Definiciones. Se llama *poliedro* un cuerpo limitado por *caras* planas. Estas caras son polígonos planos; sus lados son las *aristas* del poliedro y sus vértices son los *vértices* del poliedro.

Los *ángulos diedros* de un poliedro son los diedros formados por las caras consecutivas, y los *ángulos poliedros* del poliedro son los que forman en cada uno de los vértices las caras que en él se cortan.

312. El *prisma* es un sólido comprendido entre dos polígonos iguales y paralelos, que se llaman las *bases* del prisma, y las *caras laterales* que son paralelógramos.

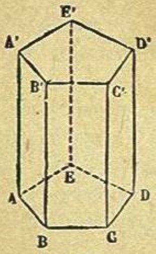

Fig. 223.

Para construir un prisma se toma como base un polígono ABCDE (fig. 223), y por los vértices A, B, C..., se trazan las líneas AA', BB', etc., paralelas, iguales y en el mismo sentido, situadas fuera del plano ABCDE;.... despues se unen sus extremos y el poliedro formado en estos términos es un prisma, porque las caras son paralelógramos (**78**) y los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' tienen sus lados iguales y sus planos paralelos (**272**).

El prisma se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal*, etc., cuando su base es un triángulo, un cuadrilatero, un pentágono, etc.

Un prisma es *recto* cuando sus aristas laterales AA', BB', etc., son perpendiculares á los planos de las bases, y *oblícuo* en el caso contrario. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.

Altura de un prisma es la distancia que media entre los planos de las dos bases, y en el prisma recto la altura es igual á la arista lateral.

313. Se llama *paralelipípedo* un prisma que tiene por base un paralelógramo : las seis caras de un paralelipípedo son paralelógramos.

Consideremos un paralelipípedo ABCDA'B'C'D' (fig. 224), cuyas bases son los paralelógramos iguales y paralelos ABCD y A'B'C'D'. Las rectas AD y BC son iguales y paralelas como lados opuestos de un paralelógramo ABCD. Las rectas AA' y BB' son iguales y paralelas por la misma razon. Luego los ángulos DAA', CBB' son iguales y sus planos son paralelos (**272**). Lo mismo se demostraría que los dos paralelógramos ABB'A', DCC'D' tienen todos sus ángulos y todos sus lados iguales uno á uno, y por tanto que son iguales. De esto resulta que *las caras opuestas de un paralelipípedo son iguales y paralelas*, y por consecuencia que pueden tomarse como bases de un paralelipípedo dos caras opuestas cualesquiera.

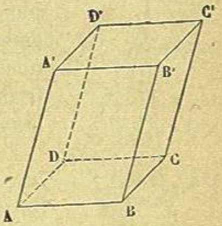

Fig. 224.

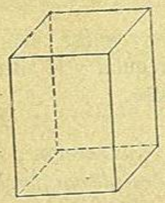
Fig. 225.

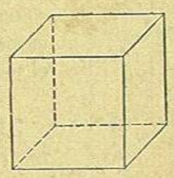
Fig. 226.

Cuando un paralelipípedo es recto y tiene por base un rectángulo se llama *paralelipípedo rectángulo* (fig. 225). Las seis caras de un paralelipípedo rectángulo son rectángulos. Las longitudes de las aristas que parten de un vértice mismo se llaman las *dimensiones* del paralelipípedo rectangular.

El *cubo* es un paralelipípedo rectángulo que tiene por base un cuadrado y cuya altura en igual al lado del cuadrado. Las seis caras de un cubo son cuadrados iguales (fig. 226).

314. La *pirámide* es un sólido una de cuyas caras es un polígono plano, y las otras triángulos que tienen por bases los lados del primer polígono y por vértice comun un punto tomado fuera del plano del primer polígono : tal es, por ejemplo, el poliedro SABCDE (fig. 227). El polígono ABCDE se llama la *base* de la pirámide; el punto S es el *vértice* y las caras triangulares SAB, SBC, etc., son las *caras laterales*.

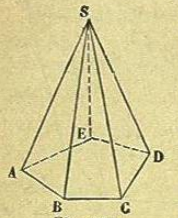

Fig. 227.

La pirámide es *triangular, cuadrangular, pentagonal*, etc., cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero un pentágono, etc. La piramide triángular se llama tambien *tetraedro* porque tiene cuatro caras que todas son triángulos.

La *altura* de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

La pirámide es *regular* cuando la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de la base.

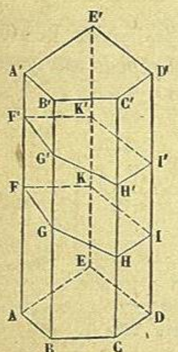
Fig. 228.

315. Teorema. *Las secciones hechas en un prisma por dos planos paralelos son polígonos iguales* (fig. 228).

Sean FGHIK, F'G'H'I'K' las secciones hechas por dos planos paralelos en el prisma AD'. Los lados FG, F'G' son parelelos como intersecciones de dos planos secantes paralelos con el plano ABB'A' (**266**). Igualmente GH es paralelo á G'H', HI á H'I', etc. Los dos polígonos que tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido son equiángulos (**272**). Además de esto FG = F'G' como paralelas comprendidas entre paralelas, y lo mismo GH = G'H', HI = H'I', etc. Los polígonos, pues, tienen los lados y los ángulos iguales y dispuestos en el mismo sentido. Luego son iguales.

316. Se llama *seccion recta* de un prisma oblícuo la que resulta cortándole por un plano perpendicular á las aristas. La seccion recta es la misma sea el que quiera el plano que la determine.

317. Teorema. *Si se corta una pirámide por un plano paralelo á la base :*

1.º *Las aristas laterales y la altura de la pirámide quedan divididas en partes proporcionates.*

2.º *La seccion es un polígono semejante á la base.*

3.º *La relacion de las áreas de la seccion obtenida y de la base es igual á la relacion de los cuadrados de sus distancias al vértice* (fig. 229).

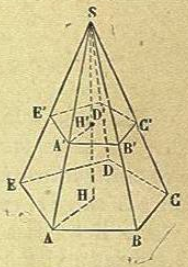
Fig. 229.

1.º Sea SABCDE la pirámide, A'B'C'D'E' una seccion obtenida por un plano paralelo á la base, SH la altura de la pirámide, cuya altura resulta cortada en H', por el plano de la seccion. Si por el punto S se imagina un plano paralelo á la base se tendrá en virtud del teorema del n.º **273**

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\ldots\ldots=\frac{SH'}{SH}. \qquad [1]$$

2.º Las líneas AB, A'B' son paralelas como interseccion de dos planos paralelos ABCDE, A'B'C'D'E' por el plano SAB (**266**). Lo mismo sucede con BC y B'C', CD y C'D', etc. Luego los polígonos son equiángulos (**272**). Además los triángulos semejantes SAB y SA'B', SBC y SB'C', etc., dan

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{SA'}{SA}, \qquad \frac{B'C'}{BC}=\frac{SB'}{SB}, \text{ etc.};$$

ó, teniendo cuenta de las igualdades [1] :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\ldots\ldots=\frac{SH'}{SH}; \qquad [2]$$

Luego los polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y por tanto son semejantes.

3.º Las áreas de los polígonos semejantes ABCDE, A'B'C'D'E' son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (**239**) y tendrémos :

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2};$$

y en virtud de las igualdades [2] :

$$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE}=\frac{\overline{SH'}^2}{\overline{SH}^2} \qquad \text{Q. E. L. D.}$$

318. Corolario. *Si dos pirámides tienen una misma altura* H *y se cortan las dos por planos paralelos á las bases, á la misma distancia* h *de los vértices, las secciones obtenidas son entre sí como las bases.*

Sean B y B' las dos bases, b y b' las secciones obtenidas. Se tienen en virtud del teorema precedente

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2}, \qquad \frac{b'}{B'}=\frac{h^2}{H^2};$$

de donde resulta, en virtud de la relacion comun,

$$\frac{b}{B}=\frac{b'}{B'}.$$

Supongamos como caso particular que las dos pirámides tengan bases equivalentes, esto es, que B sea equivalente á B', en cuyo caso b será tambien equivalente b'. Luego *si dos pirámides tienen alturas iguales y bases equivalentes, las secciones hechas en dichas pirámides por dos planos paralelos á las bases á la misma distancia de los vértices, son equivalentes.*

319. *Se llama tronco de pirámide de bases paralelas* ó simplemente tronco de pirámide, el poliedro obtenido cortando una pirámide por un plano paralelo á la base, y tomando lo que queda despues de desprendar la parte superior de la pirámide : tal es el poliedro ABCDEA'B'C'D'E' (fig. 229). Los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' se llaman las *bases* del tronco de pirámide, y su *altura* es la distancia HH' á que están los planos de las dos bases.

§ XXXI. Medida de los volúmenes : paralelepípedo, prisma, pirámide

320. Definiciones. Se toma por *unidad de volúmen el de un cubo que tiene por lado la unidad de longitud*. En Francia, en donde la unidad de medida son el metro, sus multiplos y submúltiplos, las unidades de volúmen seran los cubos que tengan por lado el metro, el decímetro, centímetro, ó el decámetro, hectómetro, kilómetro y miriámetro. Se llama *metro cúbico* al cubo que tiene un metro de lado, y *decímetro y centímetro cúbico* los cubos que tienen por lado el decímetro ó centímetro, etc.

321. El metro cúbico vale 1000 decímetros cúbicos. Con efecto, si consideramos una caja cúbica de un metro de lado (fig. 230) ABCDA'B'C'D', y dividimos el fondo, que es un metro cuadrado, en 100 decímetros cuadrados (**194**), sobre cado uno de ellos podemos colocar un decímetro cúbico, lo cual dará una primera capa de un decímetro de altura que contendrá 100 decímetros cúbicos. Para llenar toda la caja se necesitarán evidentemente sobreponer diez capas paralelas.

Luego el metro cúbico contiene 10 veces 100 ó sean 1000 decímetros cúbicos. Del mismo modo se puede probar que el decímetro cúbico tiene 1000 centímetros cúbicos, etc., y en general que *cada una de las unidades de volúmen vale* 1000 *veces la que le sigue inmediatamente en órden inferior de magnitud.* De donde resulta que para pasar de una de estas unidades á otra, bastará multiplicar ó dividir el número que exprese el volúmen por 1000, por 1 000 000 ó por 1 000 000 000, etc. Si por ejemplo un volúmen se expresa en centímetros cúbicos y deseamos referirlo al metro cúbico ó al decímetro cúbico bastará dividir el número que representa dicho volúmen por 1 000 000 ó por 1000.

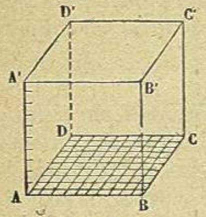

Fig. 230.

Se emplean además con el nombre de *medidas de capacidad*, unidades de volúmen que derivan de las precedentes; tales son el *litro* que equivale á un decímetro cúbico, el *decalitro* que vale 10 litros, el *hectólitro* que vale 100 litros, el *decilitro* que es la décima parte del litro, y el *centílitro* que es la centesima del mismo litro.

322. Dos cuerpos son *equivalentes* cuando tienen volúmenes iguales, por mas que no puedan superponerse. Así un prisma puede ser equivalente á una pirámide ó á un poliedro cualquiera.

323. Teorema. *Dos prismas rectos de la misma base y altura son iguales.*

Coloquemos uno de los prismas sobre el otro de manera que las bases inferiores coincidan. Las aristas laterales del segundo prisma, que son perpendiculares al plano de su base, tomarán la misma direccion que las correspondientes del primero (**246**), y como los prismas tienen la misma altura y son rectos, las aristas laterales son iguales, y por tanto las bases superiores de los dos prismas coincidirán y los dos primas resultarán iguales. Q. E. L. D.

324. Teorema. *Todo prisma oblícuo equivale á un prisma recto que tenga por base su seccion recta y por altura su arista lateral* (fig. 231).

Sea ABCDEA'B'C'D'E' un prisma oblícuo. Por los vértices A y A' de las dos bases trazamos las secciones rectas AFGHI, A'F'G'H'I', que forman con las aristas del prisma prolongadas un prisma recto que tiene por altura la arista lateral AA' del prisma dado. Y notamos en primer lugar que las aristas BB' y FF' de los dos prismas son iguales por ser ambas iguales á AA'. Resulta de aquí inmediatamente que FB=F'B', y que GC=G'C', HD=H'D', etc. Esto sentado llevemos el poliedro A'F'G'H'I'B'C'D'E' sobre AFGHIBCDE, de modo que el polígono A'F'G'H'I' coincida con su igual AFGAI (**319**). Las aristas F'B', G'C'.... perpendiculares al plano A'F'G' se confundirán con FB, GC.... perpendiculares al plano AFG. Además, teniendo las aristas igual longitud dos á dos, los poliedros coincidirán. Ahora bien, quitando del sólido total el poliedro A'F'G'.... E' resulta el prisma oblicuo, y quitando del mismo poliedro total el poliedro AFG....E' resulta el prisma recto. Luego el prisma oblícuo y el recto son equivalentes. Q. E. L. D.

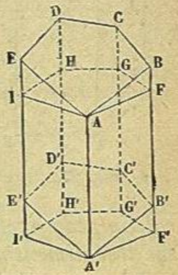

Fig. 231.

325. Teorema. *El plano trazado por dos aristas opuestas de un paralelipípedo le descompone en dos prismas triangulares equivalentes.*

Sea ABCDA'B'C'D' (fig. 232) un paralelepípedo cualquiera. Por las aristas opuestas AA' y CC' hacemos pasar un plano que descomponga el paralelipípedo en dos prismas triangulares ABCA'B'C', ADCA'D'C' que decimos que son equivalentes. En efecto: construyamos la seccion recta AEFG del paralelipípedo. Dicha seccion es un paralelógramo porque los lados opuestos son la interseccion del plano de la seccion recta por los planos de las caras opuestas del paralelipípedo, que son paralelos (**313**). Luego los triángulos AEF y AGF son iguales, y dichos triángulos son precisamente las secciones rectas de los prismas triángulares ABCA′B′C′ y ADCA′D′C′. El prisma oblícuo ABCA′B′C′ es equivalente al recto que tiene por base AEF y por altura AA′. De igual manera el prisma oblícuo ADCA′D′C′ equivalente al recto que tiene por base AGF y por altura AA′. Estos dos prismas rectos son iguales, porque tienen bases y altura iguales (**323**); luego los dos prismas oblícuos que son iguales á ellos respectivamente, son equivalentes entre sí. Q. E. L. D.

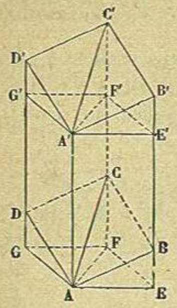

Fig. 232.

326. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo rectangular tiene por medida el producto de sus tres dimensiones.*

Suponemos desde luego que las dimensiones del paralelipípedo rectangular han de ser múltiplos de la unidad de longitud. Sea ABCDA′ (fig. 233) un paralelipípedo rectángular cuyas aristas AB, AD y AA′ son respectivamente iguales á 4 metros, 3 metros y 5 metros. La base ABCD del paralelipípedo contiene 4×3 ó 12 metros cuadrados (**156**). Sobre cada uno de estos metros cuadrados podrá colocarse un metro cúbico y de este modo se tendrá una capa de 12 metros cúbicos, capa que no tendrá mas que un metro de altura. Para llenar todo el paralelipípedo serán necesarias cinco capas iguales. El paralelipipedo tendrá, pues, en total $4\times3\times5$ ó sean 60 metros cúbicos: su volúmen está pues expresado por el producto de sus tres dimensiones. Q. E. L. D.

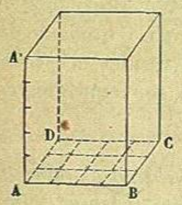

Fig. 233.

Tomenos ahora un paralelipípedo rectangular cuyas dimensiones sean arbitrarias, por ejemplos iguales á $2^m,5$, $4^m,92$ y $0^m,69$. Todas estas longitudes se expresaran en unidades muy pequeñas para que estén representadas por números enteros, v. g. en centímetros. Serán por tanto iguales á 250 centímetros, 492 id, y 69 id. La demostracion precedente prueba que el volúmen del paralelipípedo rectángular es igual á $450\times492\times69$ ó sean 8 487 000 centímetros cúbicos. Y como el centímetro cúbico es la millonésima parte del metro cúbico, dicho volúmen referido al metro cúbico como unidad será expresado por el número $8^{mc},487\,000$. Segun las reglas para la multiplicacion de los números decimales este número pudiera haberse obtenido multiplicando directamente los tres números decimales 2,50, 4,92, y 0,69. Por consecuencia el volúmen del paralelipípedo rectángular está tambien determinado por el producto de sus tres dimensiones. Q. E. L. D.

327. Corolario. I. La base del paralelipípedo es un rectángulo, cuya area tiene por medida el producto de sus dos dimensiones, luego el *paralelipípedo rectangular tiene por medida el producto de su base por su altura.*

328. Corolario. II. El cubo es un paralelípípedo rectangular cuyas dimensiones son todas iguales, de donde resulta que el *volúmen del cubo tiene por medida el cubo de su lado.* Por esta propiedad se ha dado á la tercera potencia de un número el nombre de cubo de dicho número.

Aplicaciones. I. Las dimensiones de una placa de marmol que tiene la forma da un paralelipípedo rectangular son las siguientes:

Largo	$1^m,28$
Ancho	$0^m,32$
Alto	18 milímetros.

¿Cuál será su volúmen?

Es necesario primeramente referir las tres dimensiones á una misma unidad, al metro por ejemplo, y hecho esto, el volúmen expresado en metros cúbicos será:

$$1,28\times0,32\times0,018=0^{mc},0073728;$$

pudiendo decirse tambien que es igual á 7 decímetros cúbicos, 372 centímetros cúbicos y 800 milímetros cúbicos.

II. Una pila de piedra rectangular tiene las dimensiones interiores siguientes :

Largo.	$0^m,94$
Ancho.	$0^m,45$
Profundidad.	$0^m,52$

¿Cuál será su capacidad en litros?

El volúmen interior de la pila expresado en metros cúbicos, será :

$$0^m,94 \times 0,45 \times 0,52 = 0^{mc},21996;$$

su valor en litros será $219^l,96$ ó sean 2 hectólitros, 19 litros y 96 centílitros.

III. Una piedra de talla de forma cúbica tiene 87 centímetros de lado, y se desea saber cuál será su volúmen.

El volúmen pedido, expresado en centímetros cúbicos, es :

$$87^3 = 658503^{c \cdot c};$$

cuya cantidad, expresada en metros cúbicos, para lo cual basta dividirla por 1 000 000, será $0^{m \cdot c}$, 658 503.

IV. Se desea fabricar una árca rectángular que pueda contener 25 hectólitros de trigo. La superficie del fondo es de 60 decímetros cuadrados: ¿cuál será la altura que habrá que darle?

25 hectólitros equivalen á $2^{m \cdot c}$, 5 y 60 decímetros cuadrados á $0^{m \cdot c}$, 6; si se conociera la profundidad multiplicándola por 0,6, se tendria el volúmen 2,5; luego la profundidad es igual á

$$\frac{2,5}{0,6} = 4^m,167,$$

con menos de un milímetro de error.

V. La capacidad de un vaso cúbico es de 216 centímetros cúbicos : ¿cuál será la longitud del lado?

Evidentemente será la raíz cúbica de 216, ó sean 6 centímetros.

329. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo recto es igual al producto de su base por su altura* (fig. 234).

Sea ABCD A′B′C′D′ el paralelipípedo recto cuya base es ABCD y la altura AA′. Tomemos ADD′A′ por base (**313**) y por el punto A tracemos un plano perpendicular á AB. Este plano contendrá á AA′ que es perpendicular al plano ABCD y por consiguiente á AB. La seccion AA′E′E determinada por este plano es un rectángulo, por que AA′ es perpendicular al plano ABCD, y por consiguiente á AE. Dicho esto, el prisma oblícuo AA′D′DB B′C′C es equivalente al prisma que tiene por base su seccion recta AA′E′E y por altura su arista lateral AB (**324**), y como este prisma recto tiene por base un rectángulo, su medida es (**326**) : AE×AA′×AB. Si ahora se tiene en cuenta que AB×AE es la medida del área del paralelógramo ABCD, resultará que el volúmen del paralelipípedo dado tiene por medida :

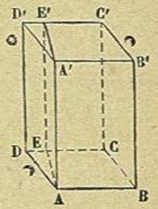

Fig. 234.

$$ABCD \times AA'.$$

330. Teorema. *El volúmen de un paralelipípedo oblícuo es igual al producto de su base por su altura* (fig. 235).

Sea ABCDA′ el paralelipípedo oblícuo que tiene por base ABCD. Tomemos por base ADD′A′ y construyamos la seccion recta EFGH perpendicular á la arista AB, en cuyo caso puede reemplazarse el paralelipípedo oblícuo por el recto que tiene por base EFGH y por altura AB (**324**). Su medida será, pues (**329**), EFGH×AB. Pero el área del paralelógramo EFGH es igual á su base por su altura, esto es EF×HL. Luego el volúmen del paralelipípedo es :

$$AB \times EF \times HL$$

Esto sentado, observemos que EF, que es una línea del plano EFGH perpendicular á AB, es ella misma perpendicular á AB, y por consiguiente, que el producto AB×EF representa el área del paralelógramo ABCD. De otro lado, los planos ABCD y