$0^m,75$. Hay que calcular en hectólitros el volúmen del agua.

14. El volúmen de un paralelipípedo rectangular es igual á $4762^{m \cdot c},7$ y sus aristas son entre sí como los números 3, 5, 7. Cuál será la longitud de sus aristas.

15. Se trata de un círculo cuyo rádio es 10 metros, y se le inscribe un triángulo equilátero. Hallar el volúmen de la pirámide que tenga dicho triángulo por base y una altura igual á 12 metros.

16. Hallar la altura de una pirámide regular de base cuadrada, sabiendo que la superficie de la base es igual á $6^{m \cdot c},7483$, y que la longitud de las aristas laterales es igual á $6^m,89$.

17. Calcular en hectólitros la capacidad de un estanque de forma cuadrada, cuyas paredes están en talud, siendo el fondo tambien un cuadrado. Dichos dos cuadrados tienen respectivamente 12 y 10 metros de lado, y la profundidad del estanque es de $2^m,10$.

LIBRO VIII

CUERPOS REDONDOS

§ XXXIII. Cilindro recto de base circular. — Medida de la superficie lateral y del volúmen.

344. Definiciones. Se llama *cilindro recto de base circular*, ó mas breve, *cilindro circular recto*, el sólido engendrado por la revolucion de un rectángulo OO′A′A (fig. 246), que gira alrededor de uno de sus lados OO′. En este movimiento, los lados OA, O′A describen dos círculos iguales y paralelos que son las *bases* del cilindro; el lado AA′ engendra la *superficie lateral* del cilindro; el lado fijo OO′ se llama *eje* ó *altura* del cilindro.

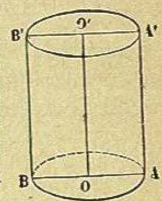

Fig. 246.

Es evidente que todo punto de AA′ girando alrededor de OO′, describe una circunferencia igual y paralela á las bases; y por tanto, si se corta un cilindro por un plano prependicular al eje, la seccion es un círculo igual á la base.

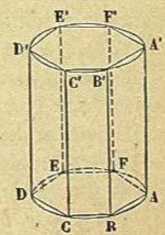

Fig. 247.

345. Teorema. *La superficie lateral de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura* (fig. 247).

En la base del cilindro inscribimos un polígono regular ABCDEF, y por los vértices trazamos las generatrices AA′, BB′, CC, etc., y unimos los extremos de estas líneas. Resultará de este modo un prisma *inscrito* en el cilindro. Siendo recto este prisma, sus caras laterales son rectángulos de la misma altura, y la suma de las áreas de dichos rectángulos, es decir, la superficie lateral del prisma tendrá por medida el perímetro de la base multiplicada por la altura. Ahora bien, si se aumenta indefinidamente el número de los lados del polígono ABCDEF, su perímetro tendrá por límite la longitud de la circunferencia base del cilindro, y la superficie lateral del prisma tendrá por límite la del cilindro. De aquí resulta que la superficie lateral del cilindro es igual á la circunferencia de su base, multiplicada por su altura.

346. Corolario. Si la base del cilindro es un círculo de rádio R, y llamamos á la altura H la superficie lateral será

$$2\pi RH;$$

y la superficie *tòtal* del cilindro, que se compone de la superficie lateral mas la superficie de las dos bases, tendrá por medida la expresion

$$2\pi RH+2\pi R^2,$$

ó, considerando $2\pi R$ como factor comun

$$2\pi R\times(H+R).$$

347. Observacion. Si se cortara la superficie del prisma inscrito en el cilindro segun una arista AA′, podria evidentemente desarrollarse esta superficie sobre un plano, y se obtendria de esta manera un rectángulo que tendria por base el perímetro de la base del prisma, y por altura la misma del prisma. De aquí se deduce que *la superficie lateral de un cilindro es desarrollable sobre un plano, y que el desarrollo tiene la forma de un rectángulo que tiene por altura la del cilindro y por base la circunferencia de la base del cilindro.*

348. Teorema. *El volúmen de un cilindro es igual al*

producto de su base por su altura. Este teorema es evidente sin mas que cosinderar al cilindro como el límite de un prisma inscrito, cuando aumenta indefinidamente el número de caras de dicho prisma.

349. Corolario. La fórmula siguiente expresa el volúmen del cilindro :

$$V=\pi R^2H.$$

Aplicaciones. I. El diámetro de un conducto hueco cilíndrico es igual á 18 centímetros, y su altura á 65 centímetros. ¿Cuál será la superficie de la plancha con que se ha hecho? La circunferencia de la base de este cilindro es igual á $18^c\times\pi$ y la superficie lateral, expresada en centímetros cuadrados será :

$$18\times\pi\times65=\pi\times1170=3676^{c.c},$$

con un centímetro de error.

II. Se desea fabricar un conducto cilíndrico con una placa de palastro rectangular cuya superficie es igual á 50 decímetros cuadrados. La base y altura de este rectángulo están en la relacion de 3 á 2, y se pide el diámetro y la altura del conducto que se va á hacer.

Hay que buscar en primer término las dimensiones del rectángulo de palastro : la base es $\frac{3}{2}$ de la altura y por tanto el área equivale á $\frac{3}{2}$ del cuadrado de la altura, y el cuadrado de la altura es los $\frac{2}{3}$ del área ó sea $\frac{50\times2}{3}=\frac{100}{3}$. La altura será la raiz cuadrada de este número es decir $\frac{10^d}{\sqrt{3}}=5^d,773$, cantidad que será la altura del conducto.

La base de dicho rectángulo es $\frac{3}{2}$ de sste número, ó sean $8^d,660$. Al formar el conducto, esta base se convierte en circunferencia del cilindro, y el diámetro se obtendrá dividiendo la circunferencia por π, y resultará

$$8^d,660\times\frac{1}{\pi}=2^d,76;$$

y por tanto el diámetro del conducto será igual á $2^d,76$ ó sean 276 milímetros y su altura 577 milímetros.

III. Una columna cilíndrica de fundicion tiene 12 centímetros de diámetro y $3^m,75$ de altura: ¿cuál será el volúmen?

El rádio de la base es igual á $0^m,06$, y por consiguiente, el volúmen será:

$$\pi\times0,06^2\times3,75=\pi\times0,0135=0^{m\cdot c},042412,$$

ó sean 42 decímetros cúbicos 412 centímetros cúbicos.

IV. Un hilo cilíndrico de cobre tiene 400 metros de longitud y pesa 2765 gramos. Sabiendo que un centímetro cúbico de cobre pesa $8^{gr},8$ se desea saber cuál es el diámetro de dicho hilo.

El volúmen del hilo será evidentemente $\frac{2765^{c\cdot c}}{8,8}=\frac{27650^{c\cdot c}}{88}$.
Su longitud es de 40 000 centímetros, y llamando R al rádio, tendrémos segun la fórmula del volúmen del cilindro

$$\pi R^2\times40\,000=\frac{27\,650}{88};$$

de donde se saca

$$R^2=\frac{27\,650}{88\times40\,000\times\pi}=\frac{2\,765}{352\,000}\times\frac{1}{\pi}=0,0025275,$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt{0,0025275}=0^c,05027.$$

El diámetro del hilo será el doble de este número, ó sea $0^c,10054$, es decir un milimetro próximamente.

V. Las medidas de capacidad para los líquidos tienen la forma de un cilindro cuya altura es doble del diámetro. Hallar el diámetro del litro.

Tomamos por unidad de longitud el decímetro, y por consiguiente, por unidad de volúmen el decímetro cúbico ó el litro. En este caso, si llamamos R al rádio del cilindro, su diámetro será 2R, su altura 4R, y tendremos segun la fórmula precedente

$$1=\pi R^2\times4R=4\pi R^3;$$

de donde se deduce

$$R^3=\frac{1}{4\pi}=0,079577471...$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt[3]{0,079577471}=0^d,430$$

con menos de una milésima de decímetro. El diámetro del litro será, pues, $0^d,86$ ó 86 milimetros, y su altura igual á 172 milímetros.

VI. Hallar el volúmen de la obra de fábrica empleada en la construccion de un pozo cilíndrico de $4^m,75$ de profundidad y de $1^m,24$ de diámetro interior, sabiendo que el espesor uniforme de la obra de fábrica es de $0^m,35$.

El volúmen de la obra de fábrica es la diferencia de los volúmenes de dos cilindros de la misma altura y cuyos rádios son respectivamente $0^m,62$ y $0^m,62+0^m,35=0^m,97$, cuyo volúmen será igual á

$$\pi\times0,97^2\times4,75-\pi\times0,62^2\times4,75,$$

ó bien:

$$(0,97^2-0,62^2)\times4,75\times\pi=8^{m\cdot c},304,$$

con un decímetro cúbico de diferencia.

§ XXXIV. Cono recto de base circular. — Superficie lateral del cono y del tronco de cono de bases paralelas. — Volúmen del cono.

350. Definiciones. Se llama *cono recto de base circular* el sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo SOA, girando alrededor de uno de los lados del ángulo recto SO (fig. 248). En este movimiento, el lado OA perpendicular á SO describe un círculo que tiene por centro el punto O, y cuyo plano es perpendicular á SO, y al que se llama *base* del cono. La línea SO se llama *eje* del cono, y su longitud es la *altura* del cono. La hipotenusa SA, girando alrededor de SO, engendra una superficie que se llama la *superficie lateral* del cono : esta hipotenusa se llama *lado ó apotema* del cono.

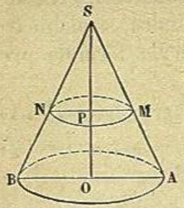

Fig. 248.

351. Consideremos un punto M de la hipotenusa SA, y bajemos desde este punto la perpendicular MP al eje. Cuando el triángulo SOA gira alrededor de SO, la línea PM perpendicular al eje describe un círculo que tiene por centro el punto P, y cuyo plano es perpendicular al eje. *Las secciones dadas en el cono por planos perpendiculares al eje, son pues círculos que tienen su centro en el eje.*

352. Se llama *tronco de cono de bases paralelas* el sólido que se obtiene cortando un cono por un plano paralelo á la base, como el cuerpo ABMN. El círculo de base del cono AOB y el círculo paralelo MPN son las *bases* del tronco; PO es en él la *altura*, AM el *lado;* la *superficie lateral* del tronco de cono es la porcion de la superficie lateral del cono comprendida entre los planos de las dos bases.

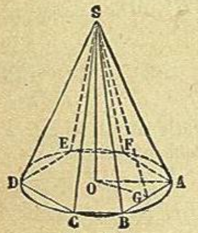

Fig. 249.

353. Teorema. *La superficie lateral del cono es igual á la circunferencia de su base, multiplicada por la mitad del lado* (fig. 249).

En la base del cono inscribimos un polígono regular ABCDEF, y unimos el vértice S del cono con todos los vértices de este polígono. Tenemos así una pirámide regular *inscrita* en el cono. La superficie lateral de esta pirámide se compone de triángulos isosceles,

todos iguales entre sí. Trazando la altura SG de uno de ellos, la suma de todos estos triángulos tendrá por medida el perímetro de la base de la pirámide, multiplicada por $\frac{1}{2}$ SG. Si se aumenta indefinidamente el número de estos lados de la base ABCDEF, el perímetro de dicha base tendrá por límite la circunferencia de la base del cono y la línea SG se aproximará á ser el lado SA del cono. Por fin la superficie lateral del cono será igual al producto de la circunferencia OA por $\frac{1}{2}$ SA.

Q. E. L. D.

354. Corolario. Si R es el radio de la base del cono y A su lado, la superficie lateral del cono será :

$$2\pi R \times \frac{A}{2} = \pi RA,$$

y la superficie total será :

$$\pi RA + \pi R^2 = \pi R(R + A).$$

355. Teorema. *La superficie lateral de un tronco de cono es igual á la semi-suma de las circunferencias de las bases multiplicada por el lado* (fig. 250).

En el cono SAD inscribimos una pirámide regular. El plano de la base superior del tronco de cono determina un tronco de pirámide ABCD..... A'B'C'D'..... cuya superficie lateral se compone de trapecios isosceles todos iguales entre sí. Esta superficie es, pues, igual á la semi-suma de los perímetros de las bases del tronco, multiplicadas por GG', altura de uno de los trapecios, de donde resulta inmediatamente que la del tronco de cono es igual á

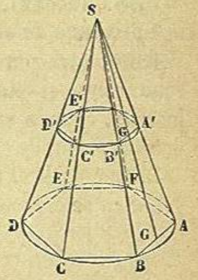

Fig. 250.

$$\frac{\text{cir. AB} + \text{cir. A'B'}}{2} \times \text{AA'}.$$

356. Corolario. I. Llamando R y r los rádios de las dos bases y A el lado del tronco de cono, su superficie lateral será la contenida en la fórmula

$$S = \pi(R + r)A.$$

357. Corolario. II. Por el punto medio D del lado AA′ (fig. 251) trazamos un plano paralelo á las bases. Dicho plano corta el tronco de cono segun un circulo cuyo rádio CD es igual á la semi-suma de los rádios OA y O′A′ (**186**); luego puede muy bien reemplazarse la semi-suma de las circunferencias de las bases por cir. CD. *La superficie lateral del tronco del cono es, pues, igual á la circunferencia media multiplicada por el lado.*

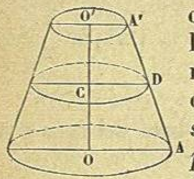

Fig. 251.

Esta medida se aplica tambien á la superficie lateral del cilindro y á la del cono : en el cilindro, la circunferencia media es igual á la circunferencia de base, y el lado es igual á la altura; en el cono, la circunferencia media es igual á la mitad de la de la base.

358. Teorema. *El volúmen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Basta, para convencerse de ello, considerar el volúmen del cono como el límite del volúmen de la pirámide regular inscrita, cuando aumenta indefinidamente el número de caras de esta pirámide.

Llamando R el rádio de la base y H la altura del cono, su volúmen se expresará por

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

359. Teorema. *El volúmen de un tronco de cono de bases paralelas es igual á la suma de tres conos que tengan por altura comun la del tronco y por bases, el primero, la base inferior, el segundo la base superior y el tercero una media proporcional entre las dos bases*

Demostracion análoga á las precedentes, considerando el tronco de cono como el límite de un tronco de pirámide.

Llamando R y r los rádios de las dos bases del tronco y H á su altura, las bases de los tres conos serán iguales, la primera á πR^2, la segunda á πr^2 y la tercera á

$$\sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi R r;$$

el volúmen del tronco de cono tendrá, pues, por expresion

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi R r H,$$

ó, considerando como factor comun $\frac{1}{3}\pi H$,

$$\frac{1}{3}\pi H \times (R^2 + r^2 + Rr).$$

Aplicaciones. I. Hallar la superficie lateral de un cono, de cuya base el rádio es igual á $2^m,5$ y el lado á $6^m,4$.

Dicha superficie es igual á

$$2,5 \times 6,4 \times \pi = 50^{m\cdot c},2655.$$

con un centímetro cuadrado de diferencia.

II. Los rádios de las dos bases de un tronco de cono son $0^m,16$ y $0^m,3$, y el lado es igual $0^m,15$ y se desea saber cuál es la superficie lateral del tronco de cono.

La superficie pedida es igual á :

$$(0,16 + 0,03) \times 0,15 \times \pi = 0,0285 \times \pi = 0^{m\cdot c},0895.$$

con un centímetro cuadrado de diferencia.

III. El diámetro de la base de un cono es igual á su lado. Sabiendo ahora que la superficie total de este cono es igual á 1 metro cuadrado, calcular su diámetro.

La superficie total de un cono tiene por expresion $\pi R(R + A)$ y como A es igual á 2R, esta expresion se convierte en

$$\pi R \times 3R = 3\pi R^2;$$

y tendremos segun esto

$$3\pi R^2 = 1;$$

de donde se deduce

$$R^2=\frac{1}{3\pi}=0,106103,$$

y por consiguiente

$$R=\sqrt{0,106103}=0^{m},326,$$

con un milímetro de diferencia; el diámetro del cono es doble de este número ó $0^{m},652$.

IV. El rádio de la base de un cono es igual á $0^{m},62$ y su altura á $1^{m},50$; ¿cuál será su volúmen?

Será igual á

$$\frac{1}{3}0,62^2\times1,50\times\pi=0,1922\times\pi=0^{m\cdot c},603814,$$

con un centímetro cúbico de diferencia.

V. El diámetro de un cono es igual á 1 metro, su lado tiene la misma longitud. Calcular su volúmen.

La altura se calcula teniendo presente que el lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son la altura y el rádio. Resulta de esto que la altura es igual á $\sqrt{1^2-0,5^2}=\sqrt{0,75}$, y por consiguiente el volúmen será igual á

$$\frac{1}{3}0,5^2\times\sqrt{0,75}\times\pi=0^{m\cdot c},2267,$$

con un 0,0001 de diferencia.

VI. Un cono cuya altura es igual á $0^{m},42$ tiene un volúmen de 25 decímetros cúbicos; calcular el rádio de la base.

El volúmem es igual á $0^{m\cdot c},025$ y por tanto, llamando R al rádio, tendremos

$$\frac{1}{3}\pi R^2\times0,42=0,025;$$

de donde se deduce

$$R^2=\frac{0,025\times3}{0,42\times\pi}=\frac{25}{140}\times\frac{1}{\pi}=0,056841:$$

luego R será igual $\sqrt{0,056841}=0^{m},238$, con un milímetro de aproximacion.

VII. Un cubo de zinc tiene la forma de un tronco de cono y las dimensiones siguientes:

Rádio de la base mayor	$12^{c},5$,
Rádio de la menor	10^{c},
Altura.	25^{c},

y se desea saber su capacidad en litros.

Como se pide su capacidad en litros ó en decímetros cúbicos, hay que referir todas estas longitudes al decímetro, y hay que aplicar además la fórmula del n.º **359**, que da:

$$V=\frac{2,5\times\pi}{3}(1,25^2+1^2+1,25\times1)=9^{lit},981$$

con menos error de un centímetro cúbico.

§ XXXV. Esfera. — Secciones planas. — Círculos máximos, círculos mínimos. — Polo de un círculo. — Dada una esfera hallar su rádio mediante una construccion plana.

360. Definiciones. Se llama *esfera* un cuerpo limitado por una superficie cuyos puntos están todos distantes igualmente de otro interior llamado *centro*. La esfera puede considerarse como engendrada por la revolucion de un semi-círculo alrededor de su diámetro.

Se llama *rádio* toda línea que une el centro con cualquier punto de la superficie; todos los rádios son iguales, segun lo dicho. Por último se llama *diámetro* de la esfera toda línea que pasando por el centro termina en dos lados opuestos de la esfera. Todos los diámetros son iguales, porque cada uno de ellos es doble del rádio.

361. Teorema. *Toda seccion plana de la esfera es un círculo* (fig. 252).

Todo plano que pase por el centro O de la esfera la corta segun una curva cuyos puntos están todos á igual distancia del punto O, es decir, segun un círculo de rádio igual al de la esfera.

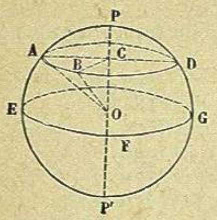

Fig. 252.

Consideremos ahora un plano que la corte no pasando por el centro y sea ABD la seccion. Tracemos los rádios OA, OB, OD, etc. Todas estas líneas son iguales; luego los piés A, B, D, de estas oblícuas al plano secante están en la circunferencia de un círculo que tiene por centro el pié C de la perpendicular OC, bajada desde el centro sobre el plano secante (**252**).

362. Corolario I. El rádio CA del círculo ABD es mas pequeño que el de la esfera, y disminuye á medida que el plano secante se aleja del centro.

Se llama *círculo mínimo* todo círculo de la esfera cuyo plano no pasa por el centro y *círculo máximo* á todo aquel cuyo plano pasa por el centro de la esfera.

363. Corolario II. Dos círculos máximos se cortan siempre segun un diámetro. Por dos puntos tomados en la superficie de una esfera puede siempre hacerse pasar un círculo máximo, pero uno solo, á menos que los dos puntos dados no sean los extremos de un mismo diámetro, porque los dos puntos dados y el centro determinan la posicion de un plano.

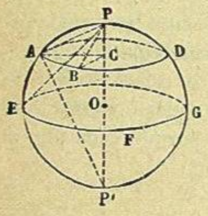

Fig. 253.

364. Definiciones. Se llaman polos de un círculo de la esfera los extremos del diámetro de la esfera perpendicular á dicho círculo. Los puntos P y P′ son los polos del círculo ABD (fig. 253). Todos los círculos de la esfera cuyos planos son paralelos tienen los mismos polos.

365. Teorema. *El polo de un círculo de la esfera está igualmente distante de todos los*

puntos de la circunferencia de dicho círculo (fig. 253).

Sea P el polo del círculo ABD. El centro C de este círculo está en la línea OP (**361**) y por tanto PA y PB etc. son oblícuas al plano ABD igualmente distantes del pié C de la perpendicular y por consiguiente son iguales. Q. E. L. D.

366. Observacion. Resulta de este teorema que si se coloca en P una de las puntas del compás y se le da una abertura igual á PA, la otra punta trazará sobre la esfera el círculo ABD. Pueden pues trazarse sobre la esfera círculos, como sobre un plano, con la sola diferencia de emplear un compás de brazos curvos, que es lo que se llama *compás esférico*.

La distancia del polo P á todos los puntos del círculo se llama la *distancia polar* de este círculo. En el caso de que se trate de un círculo máximo EFG la distancia polar es el lado de un cuadrado inscrito en el círculo máximo PEP′ y se denomina la *cuerda de un cuadrante*. Cuanto se ha dicho del polo P puede decirse relativamente al P′.

367. Problema. *Hallar el rádio de una esfera sólida dada* (fig. 254).

Desde un punto P cualquiera de la superficie de la esfera se

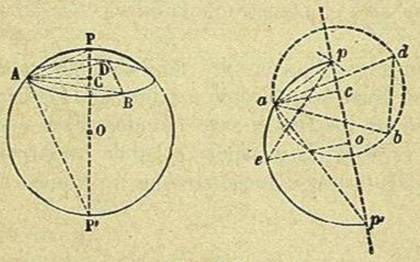

Fig. 254.

traza con una distancia polar PA tomada arbitrariamente un círculo ABD. Sea C el centro de este círculo, P′ su segundo polo y A uno de los puntos de su circunferencia, y unamos PA y PA′.